Kapitel 1: Grundlagen

In diesem Kapitel geht es um die unverzichtbaren Grundlagen der Linearen Algebra: Körper, Vektorräume und lineare Abbildungen.
Zunächst aber lernen wir unser wichtigstes Rechenverfahren kennen: den Gaußalgorithmus.

§1: Lineare Gleichungssysteme und Gaußalgorithmus

Ein Beispiel eines linearen Gleichungssystems (vgl. Woche 2):

$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \quad \leftarrow \text{lineare Gleichung} \\ 2x & + & y & & & = & 3 \\ -x & + & 4y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right\} \text{lineares Gleichungssystem.}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: "Kombinationen" von x, y, z, die alle Gleichungen gleichzeitig erfüllen.

Was ist eine "lineare Gleichung"?

z.B. $2 \cdot x + 3 \cdot y - 8 \cdot z = 42$ $\quad$ $\cancel{2 \cdot x + 4 \cdot x y - 3 \cdot y = 0}$

Lineare Gleichung in n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$\uparrow$ natürliche Zahl $\quad$ ("gesucht")

Veränderliche = Variable

(1. Zahl) · (1. Variable) + (2. Zahl) · (2. Variable) + (3. Zahl) · (3. Variable) + … + (n-te Zahl) · (n-te Variable)

= rechte Seite (auch eine Zahl)

wird später erläutert.

Dabei: "Zahlen" stammen aus einem "Körper", also aus einem speziellen Rechenbereich. Wichtigstes Beispiel eines Körpers bilden die reellen Zahlen: $\boxed{\mathbb{R}}$

Alle Zahlen stammen aus einem speziellen Körper $\mathbb{K}$.

Eine lineare Gleichung über dem Körper $\mathbb{K}$ sieht folgendermaßen aus: $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$

Dabei: $x_1, -, x_n$ sind die "Variablen",

$a_1, -, a_n, b$ sind aus $\mathbb{K}$.

Lösung so einer Gleichung: Kombination von Zahlen $x_1, -, x_n$ aus $\mathbb{K}$, so dass erfüllt ist.

Beispiel: $2x - 3y = 1$

$n = 2$: a_1, 1. Var., a_2, 2. Var., b

Lösung: $x = 2, y = 1$

keine Lösung: $x = \pi, y = 42$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ und $a_1 + a_2 + \text{—} + a_n$ meint dasselbe.

Zum Begriff "Lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen mit n Unbekannten über dem Körper $\mathbb{K}$".

"Doppelindex" $a_{\text{Nr. der Gleichg, Nr. der Variablen}}$. Meist a_{32} statt $a_{3,2}$

Vorgelegt: $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, b_1, a_{2,1}, a_{22}, \dots, a_{2n}, b_2,$
$\dots, a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,n}, b_m$ Zahlen aus $\mathbb{K}$
sowie Variable $x_1, \text{—}, x_n$

Dann:

$$\begin{aligned} a_{1,1}\cdot x_1 + a_{1,2}\cdot x_2 + \dots + a_{1,n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{2,1}\cdot x_1 + a_{2,2}\cdot x_2 + \dots + a_{2,n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}\cdot x_1 + a_{m,2}\cdot x_2 + \dots + a_{m,n}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

heißt lineares Gleichungssystem (kurz: LGS) über $\mathbb{K}$.

Lösung: Kombinationen von <u>Zahlen</u> $x_1, \text{—}, x_n$ aus $\mathbb{K}$, so dass <u>alle</u> Gleichungen des LGS simultan erfüllt sind.

Ziel: Finde <u>alle</u> Lösungen eines solchen LGS.

Die Gesamtheit aller Lösungen eines LGS heißt Lösungsraum.

Geometrische Interpretation

Algebra

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \text{LGS}$$

$y = 3x - 1$

$y = 3 - x$

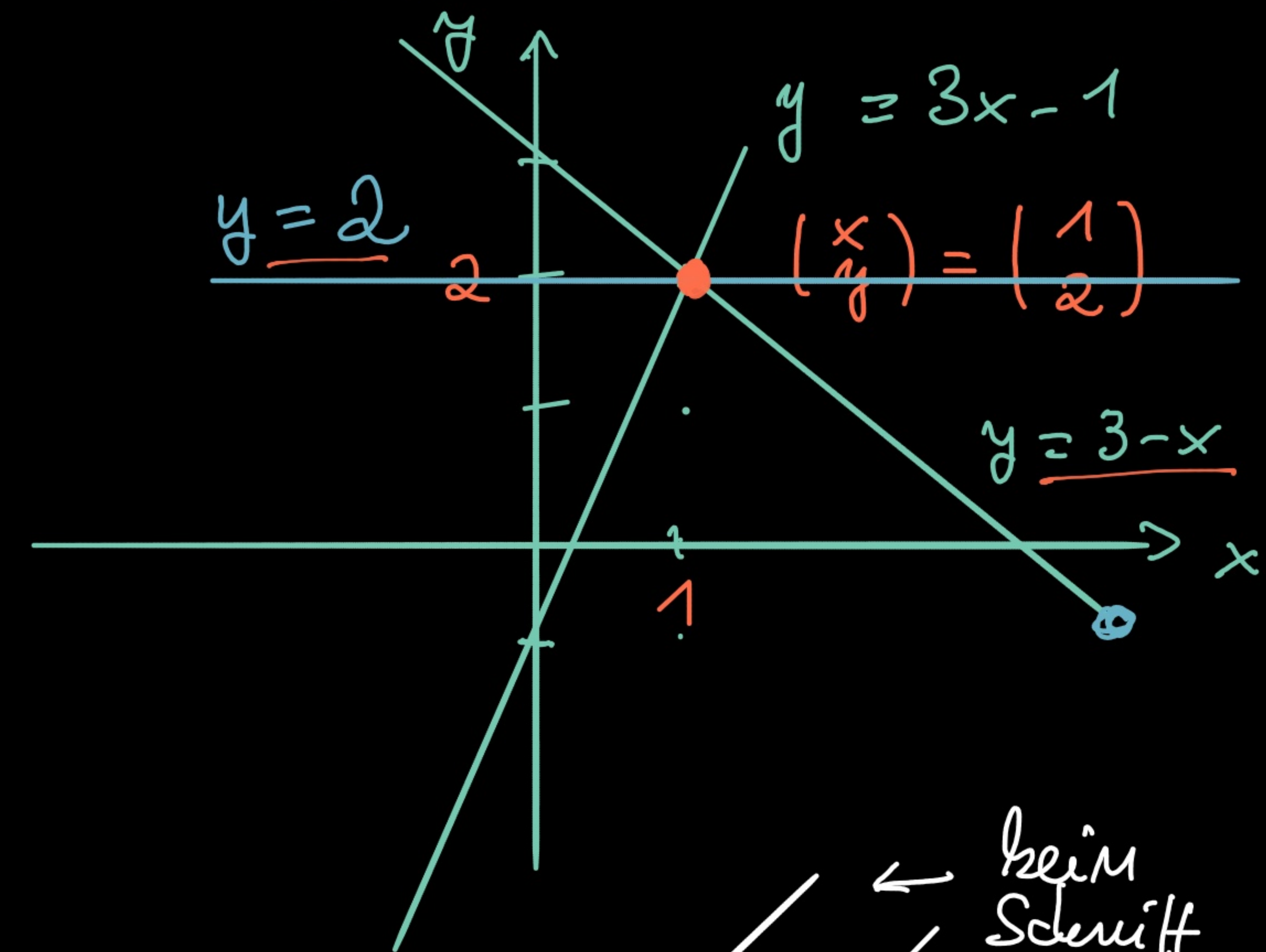
Lsg.: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad\vdots\quad$ $x = 1$, $y = 2$

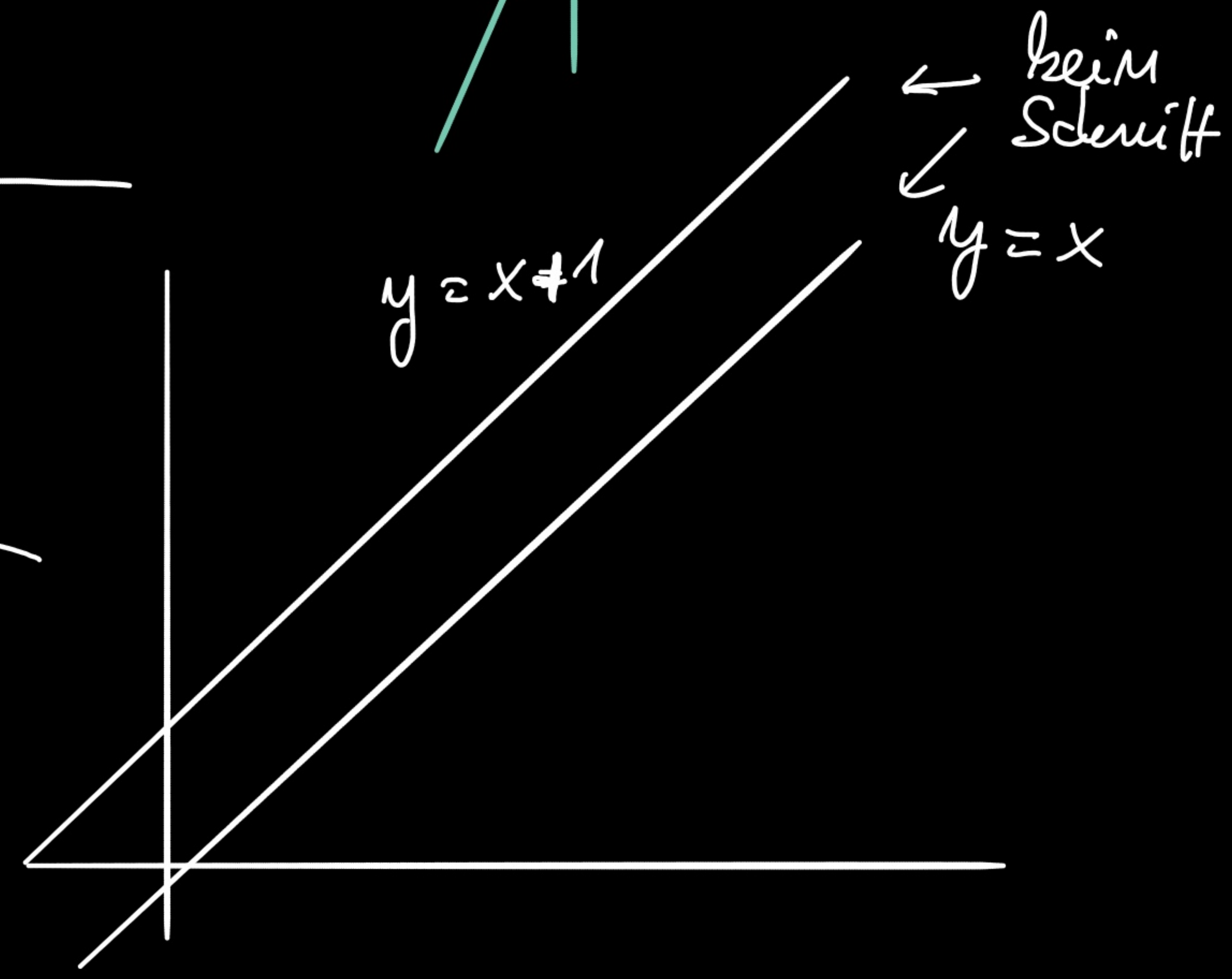
$$\begin{array}{rl} x + y = 3 & \\ 3x - y = 1 & \quad \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x + y = 3 & \\ -4y = -8 & \quad \mathrm{III} \quad y = 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x - y = -1 \end{array}\right| \text{ keine Lösung}$$

Geometrie





Bemerkung zu den "Zahlbereichen"

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}\cdot x_1 + a_{1,2}\cdot x_2 + \dots + a_{1,n}\cdot x_n &= b_1\\
a_{2,1}\cdot x_1 + a_{2,2}\cdot x_2 + \dots + a_{2,n}\cdot x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m,1}\cdot x_1 + a_{m,2}\cdot x_2 + \dots + a_{m,n}\cdot x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Wie darf ich dieses System umformen, ohne den Lösungsraum zu ändern?

Zur Erläuterung betrachten wir ein Beispiel:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \quad (\mathrm{I}.a)\\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \quad (\mathrm{I}.b)\\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \quad (\mathrm{I}.c)
\end{aligned}
\right\} (\mathrm{I})
$$

$\boxed{A}$ Man darf Gleichungen vertauschen, ohne den Lösungsraum zu ändern.

$\boxed{B}$ Man darf eine Gleichung mit einer Zahl $r \neq 0$ multiplizieren

z.B. die 2. Gleichung, dann erhalte

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \quad (\mathrm{II}.a)\\
(r a_{21})x + (r a_{22})y + (r a_{13})z &= r b_2 \quad (\mathrm{II}.b)\\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \quad (\mathrm{II}.c)
\end{aligned}
\right\} (\mathrm{II})
$$

$$
\begin{aligned}
r\cdot(a_{21}x + a_{22}y + a_{13}z) &\overset{\text{1. Rechenregel}}{=} r(a_{21}x) + r(a_{22}y) + r(a_{23}z)\\
&\underset{\text{2. Rechenregel}}{=} (r a_{21})\cdot x + (r a_{22})y + (r a_{23})z
\end{aligned}
$$

$\boxed{B}$ Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $r \neq 0$ ändert den Lösungsraum nicht.

Benötigte Rechenregeln:
- $r \cdot (a \cdot u) = (r \cdot a) \cdot u$ für alle Zahlen r, a, u — Assoziativgesetz
- $r \cdot (a + u) = r \cdot a + r \cdot u$ — " — Distributivgesetz
- $(r + a) + u = r + (a + u)$ — Assoziativgesetz

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = b_1 \quad (\mathrm{I}.a) \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = b_2 \quad (\mathrm{I}.b) \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = b_3 \quad (\mathrm{I}.c) \end{array}\right\} (\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = b_1 \quad (\mathrm{II}.a) \\ (r a_{21}) x + (r a_{22}) y + (r a_{13}) z = r b_2 \quad (\mathrm{II}.b) \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = b_3 \quad (\mathrm{II}.c) \end{array}\right] (\mathrm{II})$$

- Jede Lösung von (I) löst auch (II).
- Jede Lösung von (II) löst auch (I).

- x, y, z sei eine Lösung von (I) [x, y, z sind jetzt Zahlen]
  x, y, z löst (II.a) und (II.c) (die sind aus (I.a), (I.c) abgeschrieben)
  Außerdem $a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = b_2$ (I.b)
  Also $r \cdot b_2 = r \cdot (a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z)$
  $= r \cdot (a_{21} x) + r (a_{22} y) + r \cdot (a_{23} z)$
  $= (r \cdot a_{21}) x + (r \cdot a_{22}) y + (r a_{23}) z$
  Folgt: x, y, z erfüllt (II.b), also ist x, y, z eine Lösung von (II)
- x, y, z Lösung von (II). Idee: Durch Multiplikation der Gleichung (II.b) mit $\frac{1}{r}$ erhalte (I.b); jetzt wie oben. x, y, z löst (I)
  so etwas muss es für $r \neq 0$ geben!

Bisherige Rechenregeln:

Assoziativität der Addition: $a+(b+c) = (a+b)+c$

Assoziativität der Multiplikation: $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

Distributivgesetz: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ ←

Es muss so etwas wie $\frac{1}{r}$ geben (später mehr)

Es muss so etwas wie $-r$ geben (später mehr)

$\boxed{C}$ Darf das r-fache einer Gleichung zu einer anderen addieren.

zum Beispiel das r-fache der dritten Gleichung zur ersten:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & (I.a) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & (I.b) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & (I.c) \end{array}\right\} (I) \qquad \left.\begin{array}{ll} (a_{11}+ra_{31})x + (a_{12}+ra_{32})y + (a_{13}+ra_{33})z = b_1+rb_2 & (II.a) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & (II.b) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & (II.c) \end{array}\right\} (II)$$

(I) und (II) haben den gleichen Lösungsraum

Reicht: Jede Lösung von (I) löst auch (II).

Umgekehrt: Von (II) nach (I) gelange per Addieren des $(-r)$-fache von (II.c) zu (II.a) → gleiche Begründung führt dann auf: jede Lösung von (II) löst auch (I).

Vorgelegt: Lösung x,y,z von (I) (x,y,z Zahlen)

Klar: x,y,z lösen (II.b), (II.c). Fehlt: x,y,z löst (II.a).

Nach Voraussetzung gilt $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$ und $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$,

also gilt auch $b_1 + r\cdot b_3 = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + r\cdot(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$

$= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + (ra_{31})x + (ra_{32})y + (ra_{33})z$

Es gelte $u+v = v+u$ und $a\cdot b = b\cdot a$

$= a_{11}x + (ra_{31})x + a_{12}y + (ra_{32})y + a_{13}z + (ra_{33})z$

$= (a_{11}+ra_{31})\cdot x + (a_{12}+ra_{32})\,y + (a_{13}+ra_{33})\cdot z$: (II.a) gilt

Körper

Ein **Körper** ist eine Menge $\mathbb{K}$ (ein "Haufen" von Dingen, die Zahlen genannt werden) mit Addition "+" und Multiplikation "·" (d.h. zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{K}$ kann man die Zahlen $a+b$ und $a \cdot b$ bilden, wobei wir $a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$ vereinbaren).

$\in$: lies "ist Element von"

Dabei sollen folgende Rechenregeln gelten:

(1.) $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle a, b, c — Assoziativität der Addition

(2.) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle a, b, c — Assoziativität der Multiplikation

(3.) $a+b = b+a$ für alle a, b — Kommutativgesetz der Addition

(4.) $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b — Kommutativgesetz der Multiplikation

(5.) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ — Distributivgesetz

(6.) Es gibt eine Zahl n, so dass $a+n = a$ für alle a gilt.
Existenz eines neutralen Elements der Addition ("Null")

(7.) Es gibt eine Zahl e, so dass $e \cdot a = a$ für alle a gilt.
Existenz eines neutralen Elements der Multiplikation ("Eins")

(8.) $n \neq e$

(9.) Zu jedem a gibt es ein a' mit $a + a' = n$
Existenz von Inversen bzgl. der Addition

(10.) Zu jedem $a \neq n$ gibt es ein a^* mit $a \cdot a^* = e$
Existenz von Inversen bzgl. der Multiplikation

Für die reellen Zahlen: $n = 0$, $e = 1$, $a' = -a$, $a^* = \frac{1}{a}$

Mengen: Eine kurze Einführung

Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Dinge (den Elementen der Menge) zu einem Ganzen.

Bsp.: $A = \{1, \pi, \text{"rot"}\}$ besteht aus den Elementen $1, \pi,$ "rot". $\{,\}$: Mengenklammern

Bsp.: $B = \{x \mid x \text{ ist eine durch 5 teilbare ganze Zahl}\}$

alternativ: $B = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$

lies: Die Menge aller x für die gilt: x ist eine durch 5 teilbare ganze Zahl.

Für eine Menge M und ein "Ding" x schreibe

$x \in M$ (lies: x ist Element von M), falls x ein Element von M ist.

$x \notin M$, falls x nicht zu M gehört.

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$

Also: $7328 \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi^6}{6} \notin \mathbb{N}$.

Bsp. $A = \{1, \pi, \text{"rot"}\}$: $\pi \in A$, $\frac{\pi^2}{6} \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen; $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen

Ein seltsamer Körper (Übung)

Setze $GF(2) = \{0, 1\}$

"Galois field"; Galois: Mathematiker, field: Körper

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

"Verknüpfungstafeln"

Mit diesen Verknüpfungen ist $GF(2)$ ein Körper.

"Klar" (nach einem Blick auf die Tafel): $+, \cdot$ sind kommutativ

$+$ ist assoziativ: $a + (b+c) = (a+b) + c$ ✓

a	b	c	$b+c$	$a+(b+c)$	$a+b$	$(a+b)+c$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1

$n = 0$, $e = 1$, $0' = 0$, $1' = 1$, $1^* = 1$ etc.: $GF(2)$ ist ein Körper.

$GF(2) = \{0, 1\}$,

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

1. Interpretation:

0 steht für gerade Zahl (0, 1 = Rest bei
1 steht für ungerade Zahl Division durch 2)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$0 + 0 = 0$: gerade Zahl plus gerade Zahl ergibt gerade Zahl

$1 + 1 = 0$: ungerade Zahl plus ungerade Zahl ergibt gerade Zahl

2. Interpretation: Aussagen sind sprachliche Konstrukte, die wahr oder falsch sind.

A, B Aussagen : A xor B : exklusiv-oder
wahr, wenn entweder A oder B wahr ist

A and B : und
wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind

xor	F	W
F	F	W
W	W	F

+	0	1
0	0	1
1	1	0

and	F	W
F	F	F
W	F	W

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$0 \longleftrightarrow W$
$1 \longleftrightarrow F$
$+ \longleftrightarrow \text{xor}$
$\cdot \longleftrightarrow \text{and}$

GF(2) neu in der Logik interpretiert

$\rightsquigarrow (\{W, F\}, \text{xor}, \text{and}) = \mathbb{K}$ ist ein Körper

$\mathbb{K}$ und $GF(2)$ sind "isomorph"

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (Übung)

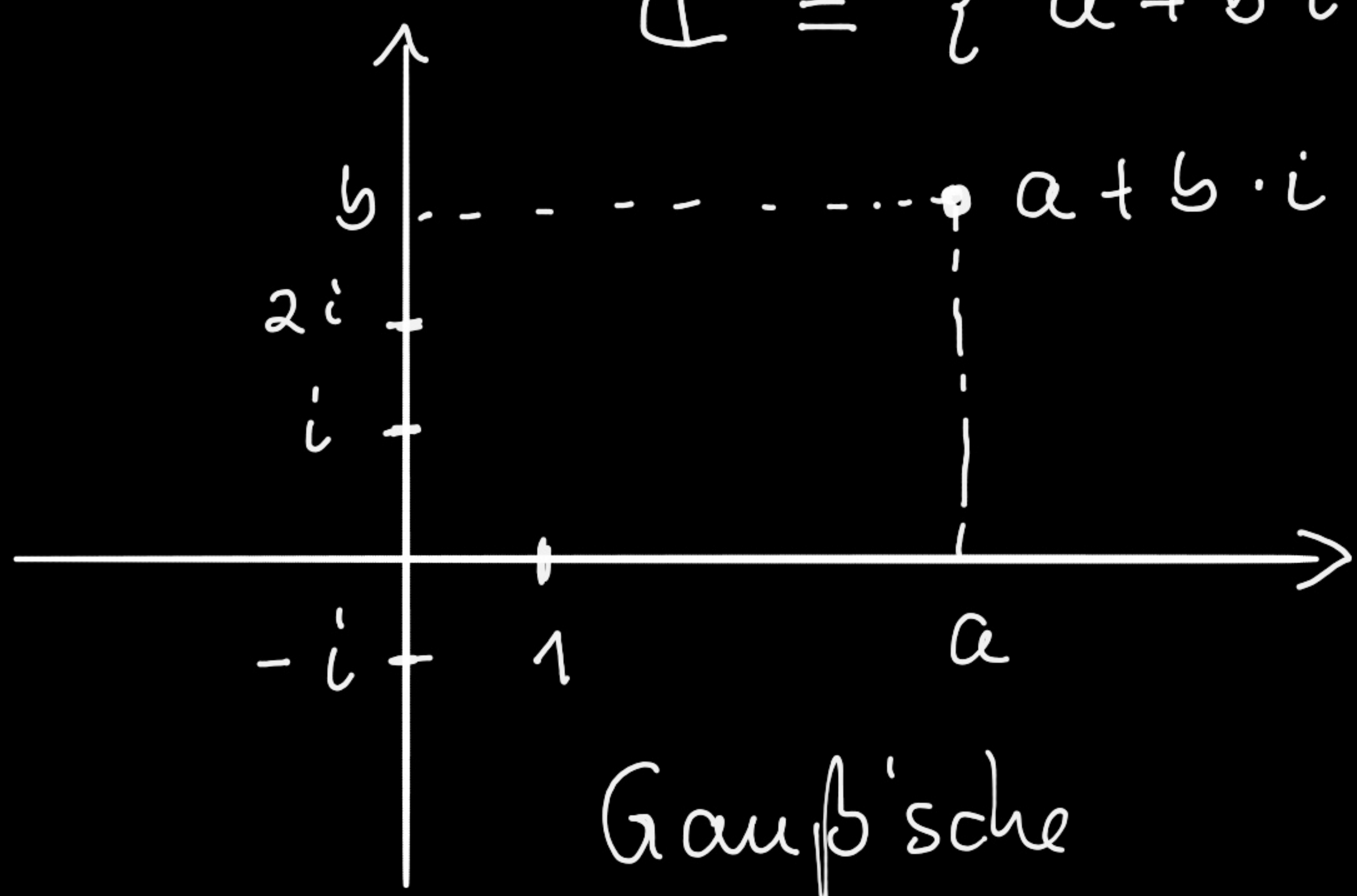
$x^2 = -1$ wird durch keine reelle Zahl x gelöst.

Symbolische Lösung i (Elektrotechnik: j) (oder $\sqrt{-1}$)

$\boxed{i \cdot i = -1}$, $i + i = 2i$, $\underbrace{e^{\sqrt{2}} \cdot i}$, $\underbrace{\frac{\pi^2}{6} + e^{\sqrt{2}} i}$

Komplexe Zahl $a + b \cdot i$ mit reellen Zahlen a und b

$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$: Menge der komplexen Zahlen.



Gauß'sche Zahlenebene

Festlegung:

$$(a + bi) + (u + vi) := (a + u) + (b + v) \cdot i$$

$$(a + b \cdot i) \cdot (u + vi)$$

$$= au + b \cdot i \cdot u + a \cdot v \cdot i + \underbrace{b \cdot i \cdot v \cdot i}_{= b \cdot v \cdot i^2 = -b \cdot v}$$

$$= (au - bv) + (bu + av) \cdot i$$

$$\mathbb{C} = \{ a + b\cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$(a+bi) + (u+vi) := (a+u) + (b+v)\cdot i$ Addition

$(a+bi)\cdot(u+vi) := (au-bv) + (av+ub)\cdot i$ Multiplikation

Beispiele:

- $(1+3i) + (7-i) = (1+7) + (3-1)\cdot i$
  $= 8 + 2i$

- $(1+3i)\cdot(7-i) = 7 + 21\cdot i - i + \underbrace{(3i)\cdot(-i)}_{+3}$
  $= 10 + 20\cdot i$

$x^2 + 2x + 8 = 0$ $\quad (x+1)^2 + 7 = 0$

hat keine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

p-q-Formel: $x = -1 \pm \sqrt{1-8} = -1 \pm \sqrt{-7} = -1 \pm \sqrt{7}\cdot i$

$x = -1 + \sqrt{7}\cdot i$ in die Gleichung einsetzen:

$(-1+\sqrt{7}\cdot i)^2 + 2\cdot(-1+\sqrt{7}\,i) + 8$

$= 1 - 7 - 2\sqrt{7}\cdot i + 6 + 2\sqrt{7}\cdot i = 0 + 0\cdot i = 0$

$x^2 + 2x + 8 = 0$ hat die Lösungen $x = -1 + \sqrt{7}\cdot i$ und $x = -1 - \sqrt{7}\cdot i$ in den komplexen Zahlen.

$\mathbb{C}$ ist ein Körper

Statt $a + 0 \cdot i$ schreibe a, statt $0 + b \cdot i$ schreibe $b \cdot i$.

$\mathrm{Re}(a + b \cdot i) = a$ heißt Realteil von $a+bi$

$\underline{\mathrm{Im}}(a + b \cdot i) = b$ heißt Imaginärteil von $a+bi$

$\overline{a+bi} = a - b \cdot i$ heißt die zu $a+b\cdot i$ konjugierte Zahl.

Es gilt $(a+bi) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$

(1.) Kommutativgesetz für die Multiplikation: ✓

$$\left.\begin{aligned}(a+bi)\cdot(u+vi) &= au - bv + (av+bu)\cdot i\\ (u+vi)\cdot(a+bi) &= ua - vb + (ub+va)\cdot i\end{aligned}\right\} =$$

(2.) Kommutativgesetz für $+$, Assoziativgesetz, Distributivgesetz: genauso langweilig wie (1.) nachzurechnen

(3.) $0 + (a+bi) = a + bi \longrightarrow 0 = 0 + 0 \cdot i$ neutrale Element der Addition

$1 \cdot (a + b \cdot i) = a + bi \longrightarrow 1$ neutrale Element der Mult.

$0 \neq 1$: na klar !

(4.) $(a + b \cdot i) + (-a - b \cdot i) = 0$

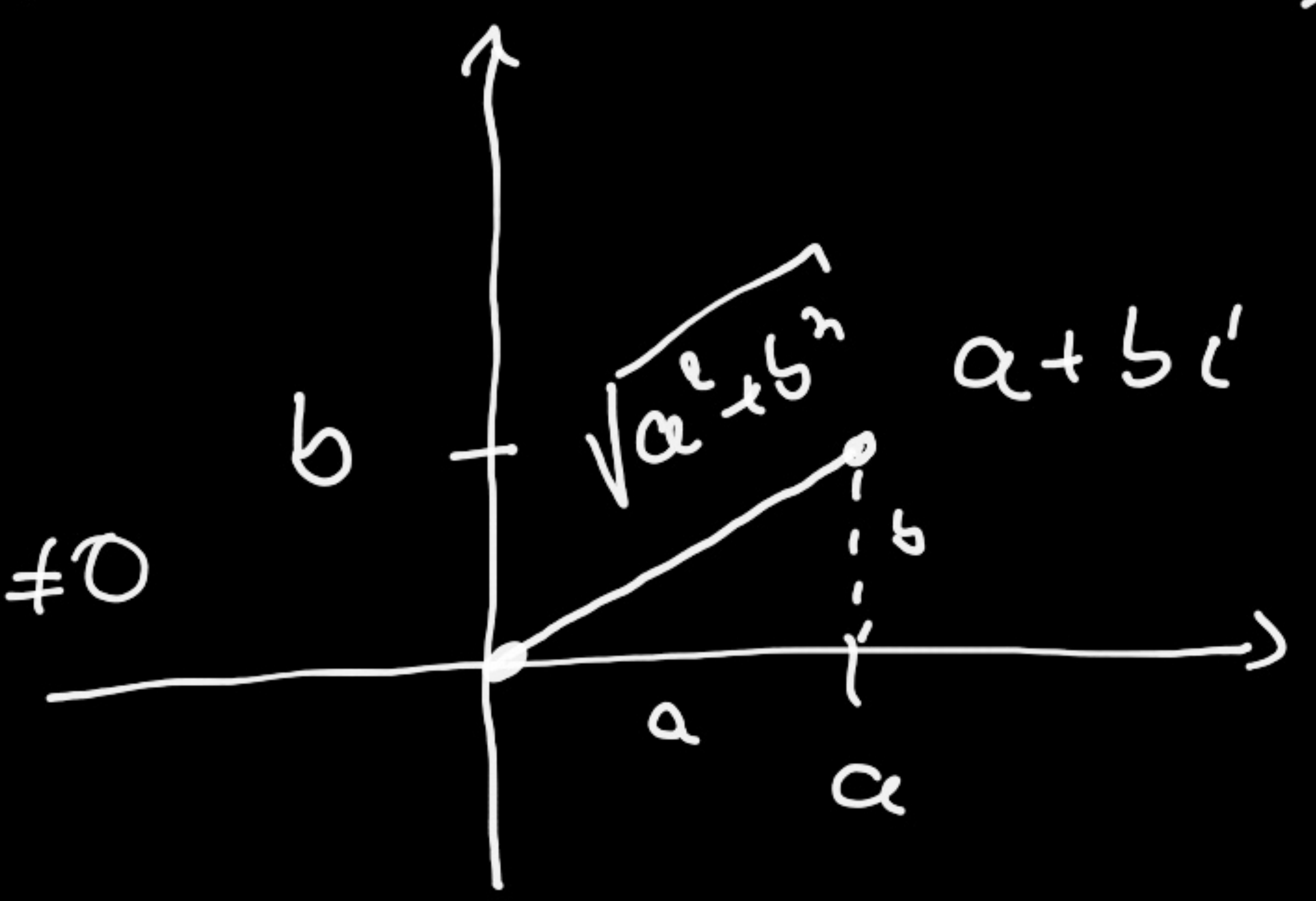
$\uparrow$ additives Inverses von $a+bi$

Ist $a+bi \neq 0$, so gibt es ein multiplikatives Inverses $(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = u+vi$, d.h. es gibt reelle Zahlen u, v mit $(a+bi)\cdot(u+vi) = 1$

$$(a+b\cdot i)\cdot(\overline{a+bi}) = (a+bi)\cdot(a-bi)$$
$$= a^2 - b^2 \underbrace{i^2}_{=-1} - a\cancel{bi} + \cancel{ba}\,i = a^2+b^2 \neq 0 \quad (\text{wg. } a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0)$$
$$= |a+bi|^2$$

Betrag von $a+bi$ ist $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

"Abstand von 0"



$z = a+bi$: $\quad z\cdot\overline{z} = |z|^2 \neq 0$ für $z \neq 0$

Also $\quad z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\,\overline{z}}{|z|^2} = 1$

Folglich ist $\quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ bzw. $(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\cdot i \in \mathbb{C}$$

das multiplikative Inverse von $z = a+bi$

Bsp $\quad \frac{1+2i}{3-i} = (1+2i)\cdot(3-i)^{-1} = (1+2\cdot i)\,\frac{\overline{3-i}}{|3-i|^2}$

$$= (1+2i)\cdot\frac{3+i}{10} = (1+2i)\cdot\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i + \frac{6}{10}i - \frac{2}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

Die Hausaufgabe

Löse die folgenden Gleichungssysteme über dem jeweils angegebenen Körper $\mathbb{K}$:

(a)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 3x \phantom{{}+2y} - z &= 3 \end{aligned} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

(b)
$$\begin{aligned} ix + (1+i)y &= 2+2i \\ (1+2i)x + (4+2i)y &= 10+3i \end{aligned} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

(c)
$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + z &= 1 \\ x + y \phantom{{}+z} &= 0 \\ y + z &= 1 \end{aligned} \qquad \mathbb{K} = GF(2)$$