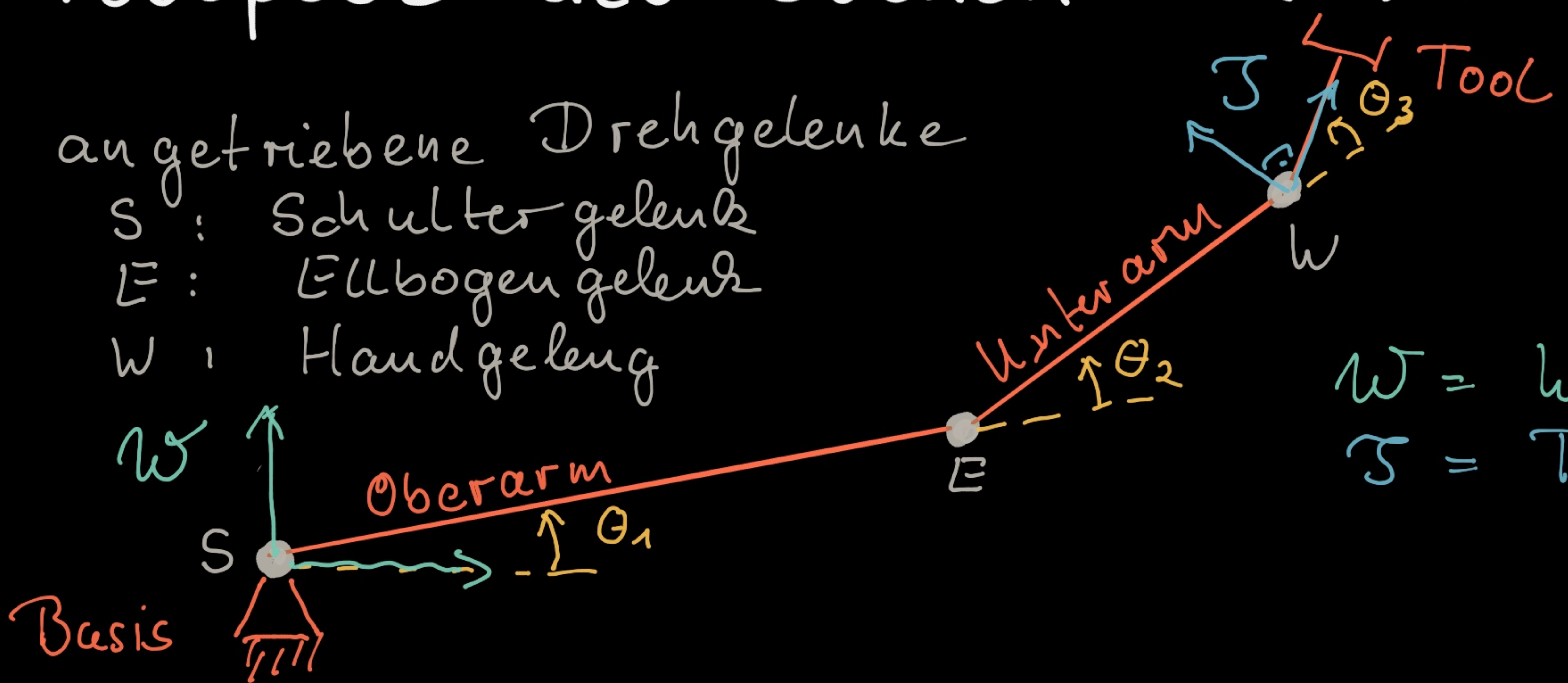
Toolpose des ebenen 3R-Arms

angetriebene Drehgelenke
- S : Schultergelenk
- E : Ellbogengelenk
- W : Handgeleng



Gelenkwinkel
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$

$\mathcal{W}$ = Weltsystem
$\mathcal{T}$ = Toolsystem

Pose des Tools = Koordinatentrafo von $\mathcal{T}$ in $\mathcal{W}$;
wird definiert durch eine Matrix und einen Vektor

Matrix ↗ Drehung
Vektor ↗ Verschiebung

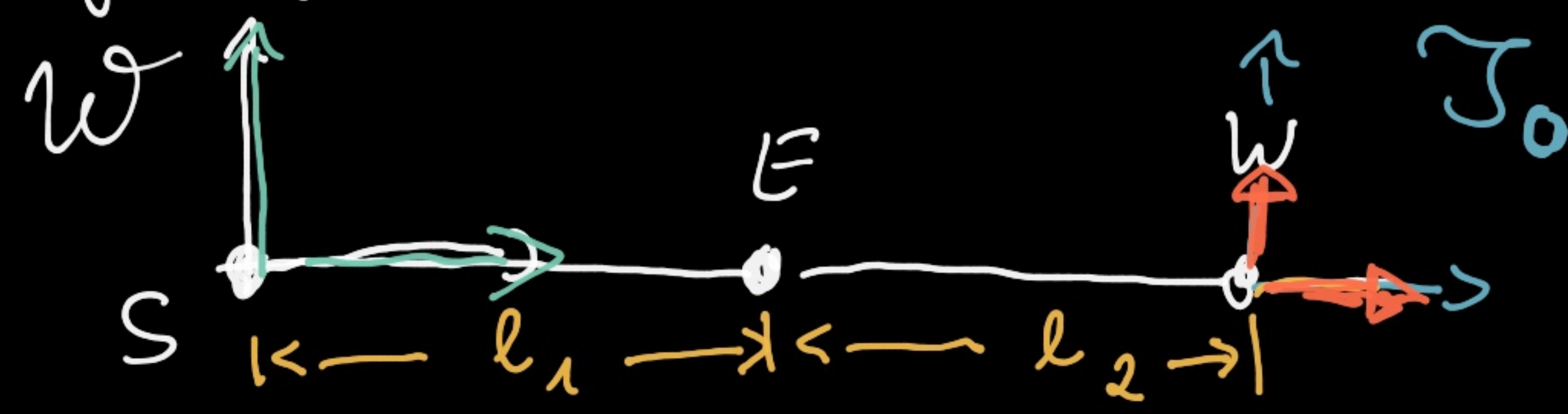
$$[P]_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot [P]_{\mathcal{T}} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

α = Winkel zwischen x-Achsen von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{T}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = [Ursprung von $\mathcal{T}$ $]_{\mathcal{W}}$

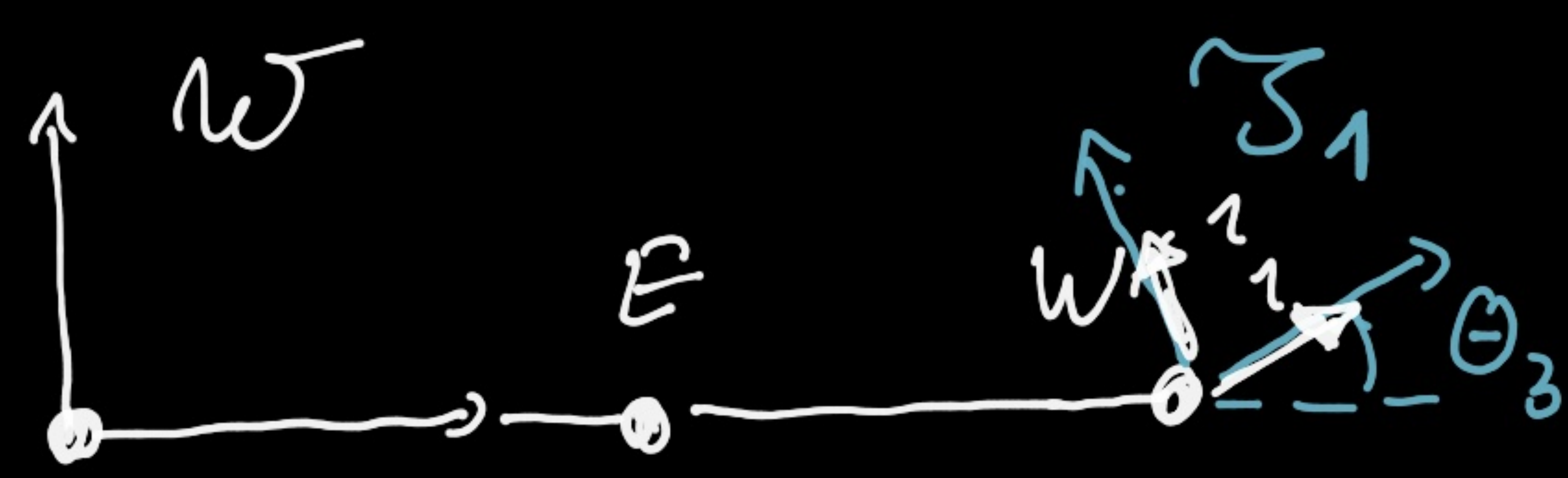
Plan zur Bestimmung der Pose

- Ausgangspunkt $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$



Pose $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Einheitsmatrix}}, \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

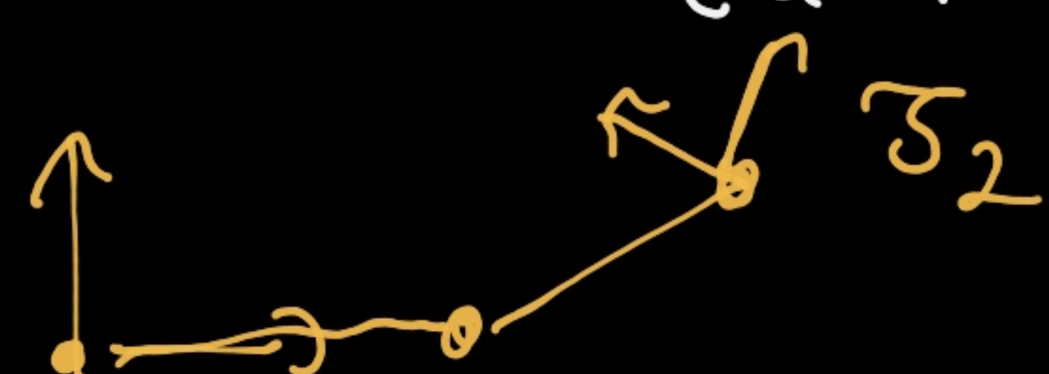
- 1. Schritt : $\theta_1 = \theta_2 = 0$, θ_3 bel.



Pose $\begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2. Schritt : $\theta_1 = 0$, θ_2, θ_3 bel.

Zu tun: Drehe das Toolsystem $\mathcal{T}_1$ um den Punkt E mit dem Winkel θ_2 drehen



d.h. : – Drehe den Ursprung W

– Drehe die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \end{pmatrix}$

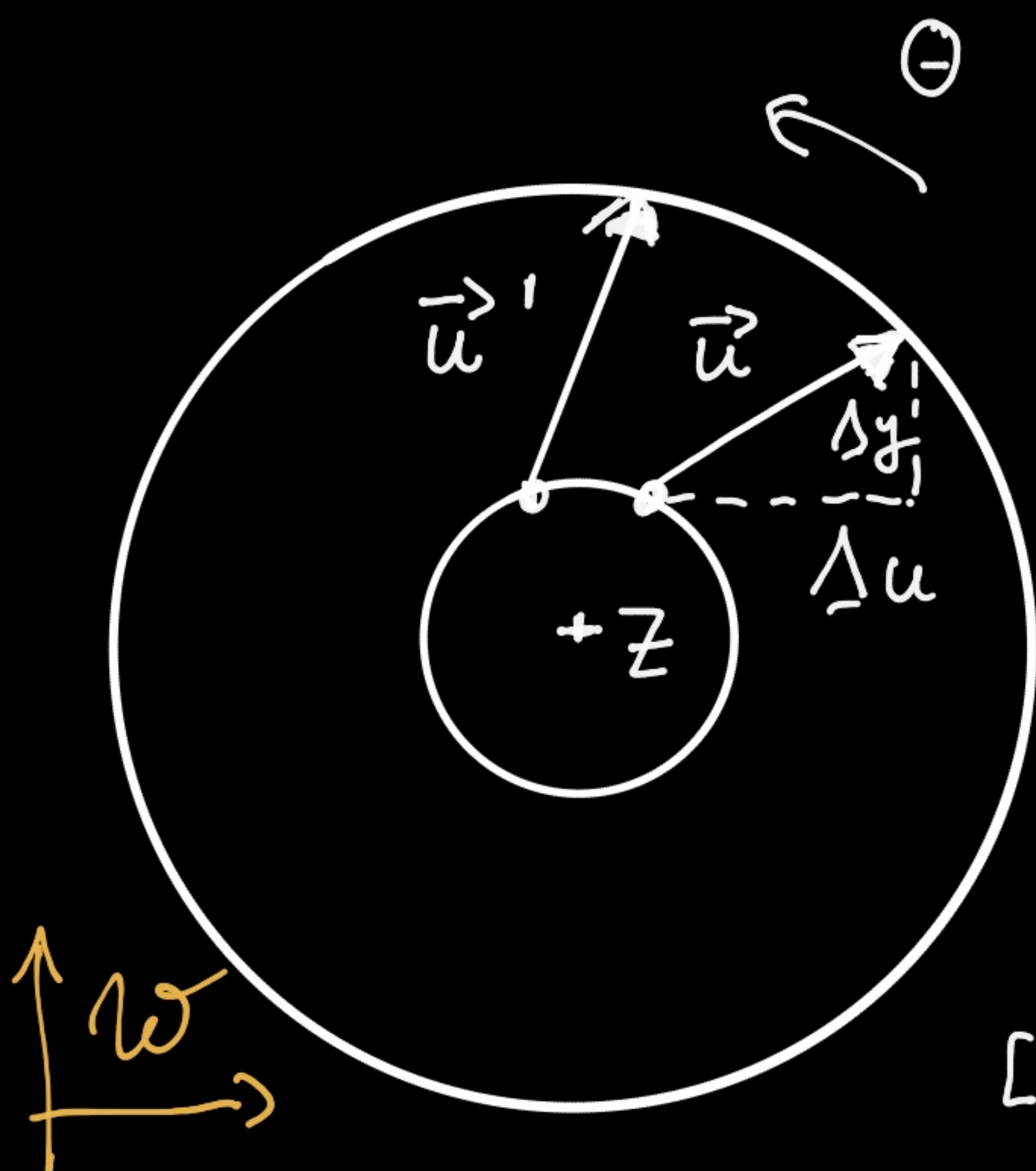
Wie beschreibt man Drehungen von Punkten / Vektoren in Koordinaten?

3. Schritt : $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ bel.

Drehe $\mathcal{T}_2$ um S mit θ_1 drehen : können wir ...

Wie beschreibt man Drehungen in Koordinaten?

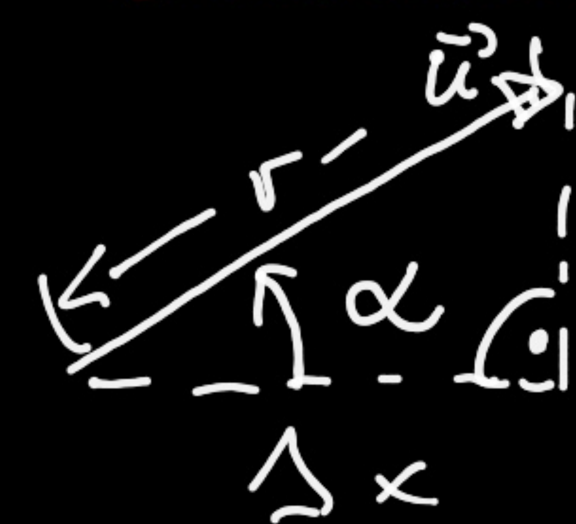
Vorgelegt: Drehzentrum Z, Drehwinkel Θ



Drehung eines Vektors $\vec{u}$

$\vec{u}$ wird um Z auf den Vektor $\vec{u}\,'$ gedreht.

Berechne $[\vec{u}\,']_\omega$ aus $[\vec{u}]_\omega$



$$[\vec{u}]_\omega = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$ "Polarkoordinaten"

$$[\vec{u}\,']_\omega = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha+\Theta) \\ r \sin\alpha(\alpha+\Theta) \end{pmatrix}$$

$$[\vec{u}\,']_\omega = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\Theta - r\sin\alpha\sin\Theta \\ r\cos\alpha\sin\Theta + r\sin\alpha\cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta x\cdot\cos\Theta - \Delta y\cdot\sin\Theta \\ \Delta x\cdot\sin\Theta + \Delta y\cdot\cos\Theta \end{pmatrix} = \Delta x\begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} + \Delta y\begin{pmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}_{[\vec{u}]_\omega}$$

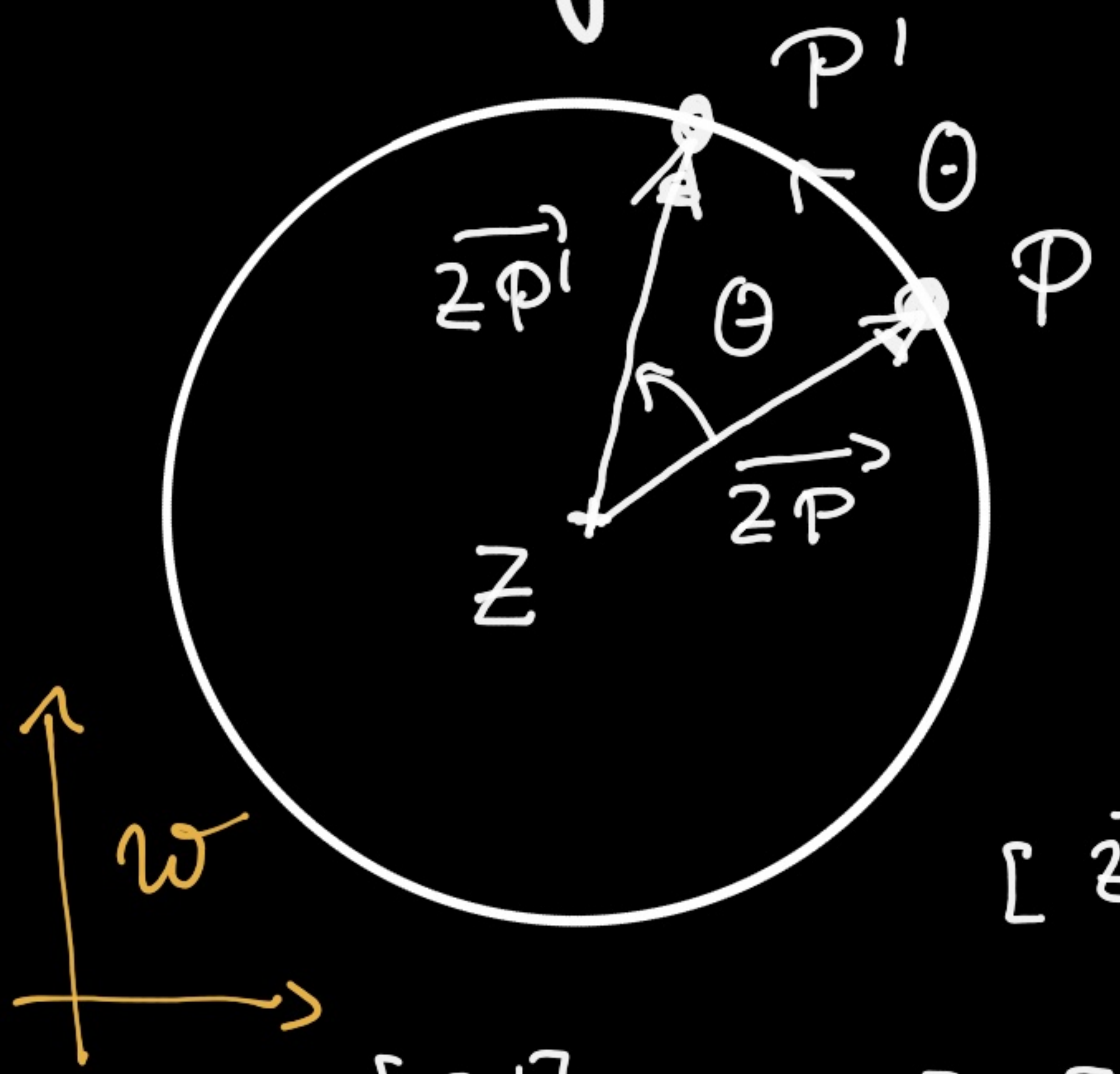
Also: $$\boxed{[\vec{u}\,']_\omega = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}\cdot[\vec{u}]_\omega}$$

Die Drehung wird durch die Drehmatrix $R_\Theta = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$ beschrieben

Additionstheoreme

$\cos(\alpha+\Theta) = \cos\alpha\cos\Theta - \sin\alpha\cdot\sin\Theta$; $\sin(\alpha+\Theta) = \cos\alpha\sin\Theta + \sin\alpha\cos\Theta$

Drehung eines Punkts P



Der Punkt P wird um das Drehzentrum Z mit dem Winkel Θ auf den Punkt P' gedreht

Frage: Berechne $[P']_w$ aus $[P]_w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Benötige: $[Z]_w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (vorgegeben)

$\overrightarrow{ZP}$ wird auf $\overrightarrow{ZP'}$ gedreht

$$[\overrightarrow{ZP}]_w = \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix} \underset{\text{s.o.}}{\rightsquigarrow} [\overrightarrow{ZP'}]_w = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix}$$

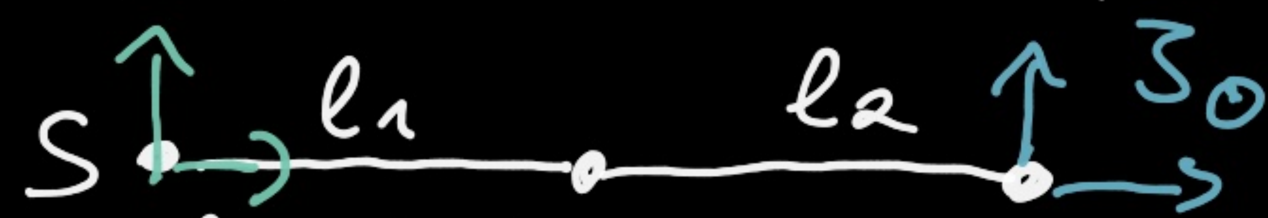
$$[P']_w = [Z]_w + [\overrightarrow{ZP'}]_w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix}$$

$$[P']_w = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot [P]_w + \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \cdot [Z]_w}_{\text{konstante Vektor}}$$

Systematische Lösung des direkten kinematischen Problem

Gesucht: Pose des Tools des ebenen 3R-Arms für bel. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

Ausgangspunkt: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$



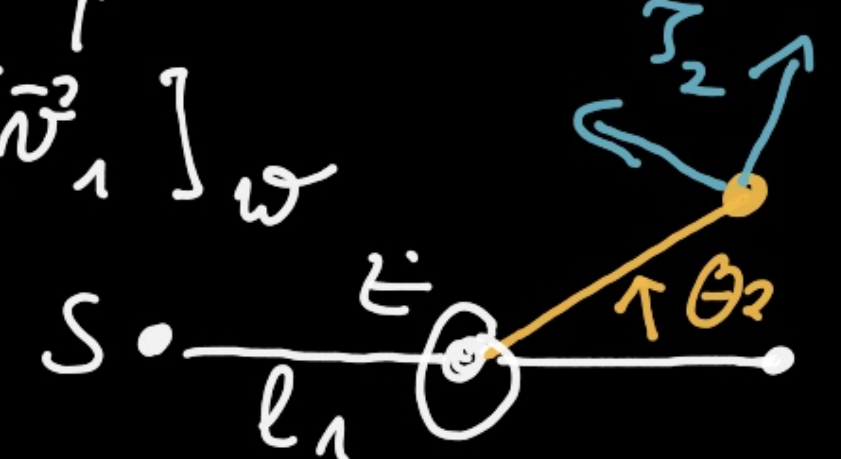
Pose: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Schritt: $\theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \theta_3$ bel.

Pose: $\begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[\vec{u}_1]_W \qquad [\vec{v}_1]_W \qquad [O_1]_W$

2. Schritt: $\theta_1 = 0; \ \theta_2, \theta_3$ beliebig



Drehe $\mathcal{T}_1$ um E mit θ_2 ↺

Drehe $\vec{u}_1$ auf $\vec{u}_2$: $[\vec{u}_2]_W = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3 \\ \sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2+\theta_3) \\ \sin(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix}$$

$$[\vec{u}_2]_W = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_2+\theta_3) \\ \cos(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix}$$

$[O_1]_W \qquad$ Drehzentrum $[E]_W$

$$[O_2]_W = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & 1-\cos\theta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (l_1+l_2)\cos\theta_2 + l_1 \cdot (1-\cos\theta_2) \\ (l_1+l_2)\sin\theta_2 - l_1\sin\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 + l_2\cos\theta_2 \\ l_2\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

Pose: $\begin{pmatrix} \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) \\ \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} l_1 + l_2\cos\theta_2 \\ l_2\sin\theta_2 \end{pmatrix}$

Multiplikation von Matrizen

$$R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

Wir mussten rechnen

- $R_{\theta_2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{pmatrix}$ bzw. $R_{\theta_2} \cdot \Big(1.$ Spalte von $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}}_{R_{\theta_3}} \Big)$

  liefert 1. Spalte von $\begin{pmatrix} \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) \\ \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix}$

- $R_{\theta_2} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \end{pmatrix}$ bzw. $R_{\theta_2} \cdot \Big(2.$ Spalte von $\begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} \Big)$

  liefert 2. Spalte von $\begin{pmatrix} \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) \\ \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix}$

A, B Matrizen, $B = (\vec{b}_1 \;\; \vec{b}_2)$ $\quad \vec{b}_1, \vec{b}_2$: Spaltenvektoren von B

Setze $A \cdot B = A \cdot (\vec{b}_1 \;\; \vec{b}_2) \overset{\text{Def.}}{=} (A\vec{b}_1 \;\; A\vec{b}_2)$

Speziell: $\underset{\text{Drehmatrix}}{R_{\theta_2}} \cdot \underset{\text{Matrix zu } \mathfrak{I}_1}{R_{\theta_3}} = \underset{\text{Matrix zu } \mathfrak{I}_2}{R_{\theta_2+\theta_3}}$

$$R_{\theta_2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} = \left(R_{\theta_3} \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{pmatrix} \quad R_{\theta_3} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \end{pmatrix} \right)$$

Einige Rechenregeln:

1.) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, r Zahl

Dann gilt: $A \cdot (r \cdot \vec{x}) = r \cdot (A \cdot \vec{x})$

Nachrechnen $A (r \cdot \vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r x_1 \\ r x_2 \end{pmatrix}$

$$= r x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + r x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r x_1 a_{11} \\ r x_1 a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r x_2 a_{12} \\ r x_2 a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r x_1 a_{11} + r x_2 a_{12} \\ r x_1 a_{21} + r x_2 a_{22} \end{pmatrix} \quad (*)$$

und $r \cdot (A \cdot \vec{x}) = r \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \dots = r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} r \cdot (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) \\ r \cdot (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r a_{11} x_1 + r a_{12} x_2 \\ r a_{21} x_1 + r a_{22} x_2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

$(*)$ und $(**)$ stimmen überein: Alles gezeigt

2.) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Dann gilt $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}$

Nachrechnen $\boxed{\text{Ha } 1}$

(3.) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Dann gilt: $A \cdot (B\vec{x}) = (A \cdot B) \cdot \vec{x}$

$\boxed{\text{HA 2}}$ Finde Matrizen A und B, so dass $A \cdot B$ und $B \cdot A$ verschieden sind.

$\boxed{\text{HA 3}}$ Finde Matrizen $A, B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Systematische Lösung des direkten kinematischen Problems für den ebenen 3R-Arm

Grundposition $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$

Ursprung $[O_0]_W = \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Koord. bzgl. W)

x-Richtg $[\vec{u}_0]_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

y-Richtg. $[\vec{v}_0]_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{I}$

Allgemeine Pose: Drehe O_0, $\vec{u}_0$, $\vec{v}_0$ nacheinander um W mit θ_3, um E mit θ_2 und um S mit θ_1. Erhalte Pose des Tools

$$\underset{\text{x-Achse von T}}{[\vec{u}]_S} = R_{\theta_1} R_{\theta_2} R_{\theta_3} [\vec{u}_0]_S \quad , \quad \vec{v}_0 \text{ analog ;} \quad ([\vec{u}_0]_S \; [\vec{v}_0]_S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$([\vec{u}]_S \; [\vec{v}]_S) = R_{\theta_1} R_{\theta_2} \underbrace{R_{\theta_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_{\theta_3}} = \underline{R_{\theta_1+\theta_2+\theta_3}} \qquad \left(A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \right)$$

und

$$[O]_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{\theta_1} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} l_1 (1 - \cos\theta_2) + \\ - l_1 \sin\theta_2 \end{pmatrix}}_{(I - R_{\theta_2}) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix}} + R_{\theta_2} \cdot \underbrace{\left(\begin{pmatrix} (l_1 + l_2)(1 - \cos\theta_3) \\ - l_2 \cdot \sin\theta_3 \end{pmatrix} + R_{\theta_3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{[O_0]_W} \right)}_{\begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right)$$

$$= R_{\theta_1} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \cdot (1 - \cos\theta_2) \\ - l_1 \cdot \sin\theta_2 \end{pmatrix} + R_{\theta_1+\theta_2} \cdot \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (R_{\theta_1} \cancel{- R_{\theta_1+\theta_2}}) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \cancel{R_{\theta_1+\theta_2} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix}} + R_{\theta_1+\theta_2} \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

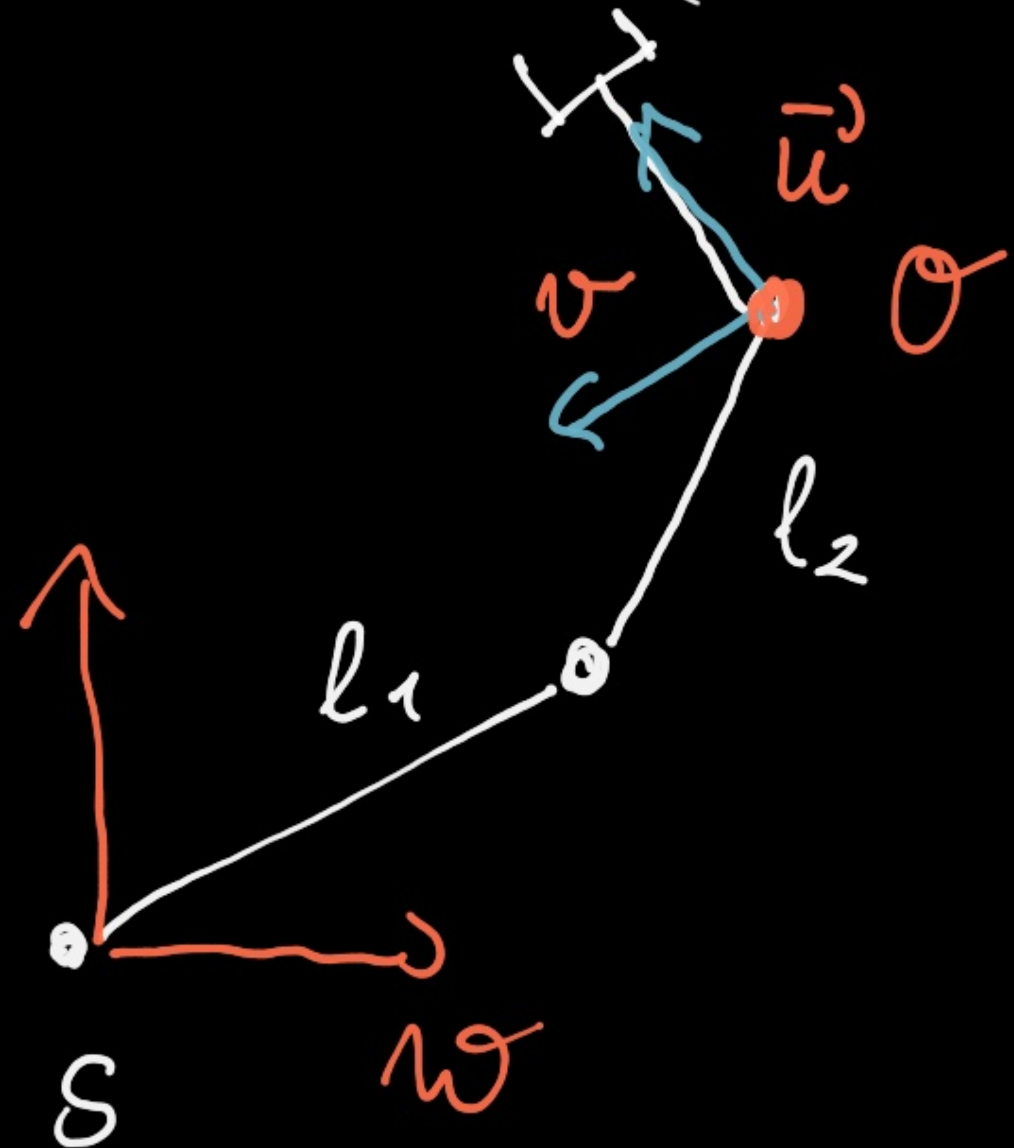
$$\underline{[O]_W} = R_{\theta_1} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{\theta_1+\theta_2} \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

Ebener 3R-Arm: Pose des Tools für bel. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

$$([\vec{u}]_w, [\vec{v}]_w) = R_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix}$$

$$[O]_w = R_{\theta_1} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{\theta_1+\theta_2} \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$



— Ende —

Rechnen mit Polynomen

$p(x) = a + bx + cx^2$ $\quad$ a, b, c Zahlen

$p'(x) = b + 2\cdot c x$ $\quad$ "Ableitung" $\quad$ Bsp.: $(1-2x+3x^2)' = -2+6\cdot x$

$(x-1)\cdot p'(x) = (x-1)\cdot(b+2cx) = bx + 2cx^2 - b - 2cx$

$= -b + (b-2c)x + 2cx^2$

$p(x) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\quad$ "Koordinatenvektor"

$\downarrow$

$(x-1)\cdot p'(x) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -b \\ b-2c \\ 2c \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

"In Koordinaten": $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}}$

Gibt es a, b, c mit $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$? $\to$ Gauß-Algorithmus

(gibt es $p(x)$ mit $(x-1)\cdot p'(x) = 1 - 2x + 3x^2$?)

Übung: Gibt es Zahlen x, y, z mit

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x + y &= 3 \quad \leftarrow \\ -x + 4y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

Gleichungen im "Vektorform"

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x + y \\ -x + 4y + 2z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

↑ "Koeffizientenmatrix"

Übung: Gibt es Zahlen x, y, z mit

$$2 = 1\cdot x - 2y + 3z$$ benutze diese Gleichung

$$3 = 2x + 1\cdot y + 0\cdot z$$
$$4 = -1x + 4y + 2z$$

um x aus diesen Gleichungen verschwinden zu lassen

2·(1. Gl) abziehen

1. Gl. addieren

$$2 = 1\cdot x - 2y + 3z$$

$$3 - 2\cdot 2 = 2x + 1y + 0z - 2\cdot(1x - 2y + 3z)$$

$$= (2 - 2\cdot 1)\cdot x + (1 - 2\cdot(-2))\cdot y + (0 - 2\cdot 3)z$$

Koeff. der 2. Gleichung

− 2·(Koeff. der 1. Gleichung)

$$-1 = 5y - 6z$$

$$6 = 2y + 5z$$

Neues Gleichungen (exakt gleiche Lösungen wie ursprüngliche)

und hier auch!

$$2 = x - 2y + 3z$$
$$-1 = 5y - 6z$$
$$6 = 2y + 5z$$

benutze diese Gleichung um y hier zu entfernen

Übung:

$$\begin{array}{rcl} 2 &=& x - 2y + 3z \\ -1 &=& 5y - 6z \\ 6 &=& 2y + 5z \end{array}$$

$+\frac{2}{5}\cdot \mathrm{II}$

"II" $\hat{=}$ 2. Gleichung

$-\frac{2}{5}\cdot \mathrm{II}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{8}{5} &=& x + \frac{3}{5}\cdot z \\ -\frac{1}{5} &=& y - \frac{6}{5}\cdot z \\ \frac{32}{5} &=& \frac{37}{5}\cdot z \end{array} \longrightarrow \boxed{z = \frac{32}{37}}$$

$$x = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{32}{37} = \ldots$$

$$y = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\cdot\frac{32}{37} = \ldots$$

Neues Beispiel:

$$1 \cdot x + 2y - 1z = 1$$
$$3x - 1y + 0z = -1 \quad | -3 \cdot \mathrm{I}$$
$$0x + 5y + 1z = 2$$

$$3x - 1y + 0z = -1$$
$$-3 \cdot 1 x \quad -3(-1) y \quad -3(-1) z = -3 \cdot 1$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ -3 \cdot 1 & -3 \cdot 2 & -3 \cdot (-1) & -3 \cdot 1 \\ \hline 0 & -7 & 3 & -4 \end{array}$$

Schema

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ x & y & z & \end{array} \quad \Big\| -3 \cdot \mathrm{I} \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}$$

schematisches Rechnen

$$x + 2y - z = 1$$
$$-7y + 3z = -4$$
$$5y + z = 2$$