§2: Vektorräume

Ein Vektorraum besteht aus einer Menge V
mit einer Addition $+$ $\qquad (\vec{a}, \vec{b} \in V \leadsto \vec{a}+\vec{b} \in V)$
und einer skalaren Multiplikation $\qquad (r \in \mathbb{K}, \vec{a} \in V \leadsto r \cdot \vec{a} \in V)$

Dabei sollen "alle coolen Rechengesetze gelten".

<u>Bsp.</u>: $\mathbb{K}^n$ mit der eingeführten Addition / Multiplikation

<u>Bsp.</u>: V = Menge der reellen Polynome

$$(x^3 - x + 2) + (x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + 3 \qquad \text{"}+\text{"} \checkmark$$

$$5 \cdot (x^4 + x^2 - 1) = 5x^4 + 5x^2 - 5 \qquad \text{"}\cdot\text{"} \checkmark$$

"alle coolen Rechengesetze gelten"

Also: V ist ein Vektorraum!

2.1 Definition [Vektorraum]

Vorgelegt sei
- ein Körper $\mathbb{K}$ (Addition $+$, Multiplikation $\cdot$)
- eine Menge V
- eine Addition $\oplus$ auf V (d.h. zu $\vec{a}, \vec{b} \in V$ können wir $\vec{a} \oplus \vec{b} \in V$ bilden)
- eine skalare Multiplikation $\odot$ (d.h. zu $r \in \mathbb{K}$ und $\vec{a} \in V$ können wir $r \odot \vec{a}$ bilden)

Dann heißt $(V, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, falls die folgenden Rechengesetze gelten (stets Punkt- vor Strichrechnung):

(1.) Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt $(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$ (Assoziativgesetz)

(2.) Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$ (Kommutativgesetz)

(3.) Es gibt ein Element $\vec{0}_V \in V$ mit $\vec{0}_V \oplus \vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in V$ (Existenz eines Nullvektors $\vec{0}_V$)

(4.) Zu jedem $\vec{a} \in V$ gibt es ein $\vec{a}\,' \in V$ mit $\vec{a} \oplus \vec{a}\,' = \vec{0}_V$ (Existenz von inversen Elementen)

(5.) Für alle $r \in \mathbb{K}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt $r \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = r \odot \vec{a} \oplus r \odot \vec{b}$

(6.) Für alle $r, s \in \mathbb{K}$, $\vec{a} \in V$ gilt $(r+s) \odot \vec{a} = r \odot \vec{a} \oplus s \odot \vec{a}$

(7.) Für alle $r, s \in \mathbb{K}$, $\vec{a} \in V$ gilt $(r \cdot s) \odot \vec{a} = r \odot (s \odot \vec{a})$

(8.) Für alle $\vec{a} \in V$ gilt $1 \odot \vec{a} = \vec{a}$

Schreibe meist $-\vec{a}$ statt $\vec{a}\,'$.

Schreibe $+, \cdot$ statt $\oplus, \odot$.

Bemerkungen

(a) Elemente von V heißen Vektoren.

(b) Elemente von $\mathbb{K}$ heißen Skalare.

(c) Man kann weitere Rechengesetze nachprüfen, z.B.

$r \in \mathbb{K}$, $\vec{a} \in V$ Dann gilt $(-r) \odot \vec{a} = r \odot \vec{a}' = (r \odot \vec{a})'$

bzw. $(-r) \cdot \vec{a} = r \cdot (-\vec{a}) = -(r \cdot \vec{a})$

Dazu: Weise $(-r) \odot \vec{a} = \underbrace{-(r \odot \vec{a})}_{\text{zu } r \odot \vec{a} \text{ inverses Element!}}$ nach

$$\vec{0}_V = r \odot \vec{a} \oplus (-(r \odot \vec{a})) \quad \text{(nach Def. des Inversen)}$$

$$\vec{0}_V \stackrel{?}{=} r \odot \vec{a} \oplus (-r) \odot \vec{a} = (r - r) \odot \vec{a} = 0 \odot \vec{a}$$

Bleibt zu zeigen:

(i) $0 \odot \vec{a} = \vec{0}_V$

und (ii) $\vec{b} \oplus \vec{c} = \vec{0}_V \longrightarrow \vec{c} = -\vec{b}$ ✓

Dann $-(r \odot \vec{a}) = (-r) \odot \vec{a}$ (beide zu $r \odot \vec{a}$ invers)

(ii): $\vec{b} \oplus \vec{c} = \vec{0}_V$ Also $-\vec{b} = -\vec{b} \oplus \vec{0}_V = -\vec{b} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$

$= (-\vec{b} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{0}_V \oplus \vec{c} = \vec{c}$

(i) $(0 \odot \vec{a}) \oplus \vec{a} = (0 \odot \vec{a}) \oplus (1 \odot \vec{a}) = (0+1) \odot \vec{a}$

$= 1 \odot \vec{a} = \vec{a} \qquad | \oplus (-\vec{a})$

$(0 \odot \vec{a}) = (0 \odot \vec{a}) \oplus \vec{0}_V = (0 \odot \vec{a}) \oplus \vec{a} \oplus (-\vec{a}) = \vec{a} \oplus (-\vec{a})$

$= \vec{0}_V$ ∎

Beispiele

(a) Der $\mathbb{K}^n$ mit der bereits bekannten Addition und skalaren Multiplikation ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Nullvektor $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

z.B. $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + s_1 \\ r_2 + s_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + r_1 \\ s_2 + r_2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} = \quad \rightsquigarrow \text{Kommutativgesetz}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $r \in \mathbb{K}$

Setze $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & b_{22} + a_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$

sowie $r \cdot A = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & \dots & r \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r \cdot a_{m1} & \dots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$

Damit ist $\mathbb{K}^{m \times n}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(c) Auf $\mathbb{R}^2$ setze $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + s_2 \\ r_2 + s_1 \end{pmatrix}$ und $t \odot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t r_1 \\ t r_2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \neq$$

, Kommutativgesetz gilt nicht

Also: $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ ist <u>kein</u> Vektorraum.

(d) Ist x eine Variable

Setze $\mathbb{K}[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = p(x)$ "Polynom"

Koeffizienten: $a_0, \dots, a_n$

Falls $a_n \neq 0$, so heißt a_n "Leitkoeffizient", a_0 heißt "absolutes Glied", $n = \operatorname{grad} p(x)$ heißt der "Grad" von $p(x)$

z.B. $p(x) = 2x^5 - 3x^3 + 10^{1000}x^2 - 42$

Grad: 5

Leitkoeffizient: 2

absolutes Glied: -42

skalare Multiplikation $r \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)$

$= (r a_0) + (r a_1) x + (r a_2) x^2 + \dots + (r a_n) \cdot x^n$

Addition: $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$; $\quad$ OE $n = m$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ $\quad$ (notfalls mit 0en auffüllen)

$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_n + b_n) x^n$ $\quad$ ohne Einschränkung

$(m = n\ ?)$

$\mathbb{K}[x]$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(e) $U = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; r, s \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ 0 \\ \tilde{s} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + \tilde{r} \\ 0 \\ s + \tilde{s} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot r \\ 0 \\ t \cdot s \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Vektorraum.

Einschub: Sind A, B Mengen, so heißt A eine Teilmenge von B, i.Z. $A \subseteq B$, falls jedes Element von A auch in B liegt.

z.B. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl)

Im Beispiel (e) $U \subseteq \mathbb{R}^4$

2.2 Def. [Untervektorraum / Teilraum]

Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann heißt U ein Untervektorraum von V, wenn gilt:

(1.) $\vec{0}_V \in U$

(2.) Sind $\vec{a}, \vec{b} \in U$, so liegt auch $\vec{a} + \vec{b} \in U$

(3.) Ist $r \in \mathbb{K}$, $\vec{a} \in U$, dann ist auch $r \cdot \vec{a} \in U$

2.3 Notiz: Ist U ein Untervektorraum von $(V, +, \cdot)$, so ist $(U, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beispiel

(a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$,

denn:
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \qquad (r = s = 0)$
- $\begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$. Dann: $\begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + s_1 \\ 0 \\ r_2 + s_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$
- $r \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r s_1 \\ 0 \\ r s_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$. ∎

(b) $\mathbb{K}[x]_n = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \}$
ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}[x]$
Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n

(c) Es sei A eine $m \times n$ Matrix.
Der Lösungsraum $\mathbb{L} = \{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{0} \}$ des homogenen LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

2.4 Notiz Ist $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine Matrix, so ist der Lösungsraum $\mathbb{L} = \{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{0} \}$ des homogenen LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$

Beweis:

- $\underline{0} \in \mathbb{L}$, denn $A \cdot \underset{\text{aus } \mathbb{K}^n}{\underline{0}} = \underset{\text{aus } \mathbb{K}^m}{\underline{0}}$

- $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{L}$, d.h. $A \cdot \underline{u} = A \cdot \underline{v} = \underline{0}$

  $$A \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = A \cdot \underline{u} + A \cdot \underline{v} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

  Also $\underline{u} + \underline{v} \in \mathbb{L}$

- $r \in \mathbb{K}$, $\underline{x} \in \mathbb{L}$, d.h. $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$

  $$A \cdot (r \cdot \underline{x}) = r \cdot (A \cdot \underline{x}) = r \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

  Also $r \cdot \underline{x} \in \mathbb{L}$ $\blacksquare$

Rechenregel:
$$A \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = A \cdot \underline{u} + A \cdot \underline{v}$$
$$A \cdot (r \cdot \underline{x}) = r \cdot (A \cdot \underline{x})$$

2.5 Rechenregeln : Vorgelegt: $r \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{K}^n$

Dann gilt

- $A \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = A \cdot \underline{u} + A \cdot \underline{v}$
- $A \cdot (r \cdot \underline{u}) = r \cdot (A \cdot \underline{u}) = (r \cdot A) \cdot \underline{u}$

<u>Beweis</u> $A = (\underline{a}_1 \; \dots \; \underline{a}_n)$ mit: $\underline{a}_1, -, \underline{a}_n$ Spalten

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A \cdot (\underline{u} + \underline{v}) &= (\underline{a}_1 \; \dots \; \underline{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \\
&= (u_1 + v_1) \cdot \underline{a}_1 + \dots + (u_n + v_n) \cdot \underline{a}_n \\
&= u_1 \underline{a}_1 + v_1 \underline{a}_1 + \dots + u_n \underline{a}_n + v_n \underline{a}_n \\
&= u_1 \underline{a}_1 + \dots + u_n \underline{a}_n + v_1 \underline{a}_1 + \dots + v_n \underline{a}_n \\
&= (\underline{a}_1 \; \dots \; \underline{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_2 \end{pmatrix} + (\underline{a}_1 \; \dots \; \underline{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= A \cdot \underline{u} + A \cdot \underline{v} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Hausaufgabe A: Weise die zweite Gleichung nach. Schreibe dabei die verwendeten Rechenregeln auf.

Jetzt: Lösungsraum von $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

2.6 Linearkombinationen

Vorgelegt: Körper $\mathbb{K}$ sowie ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$; $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{K}$.

Dann heißt $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Bsp.: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$: $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dann ist $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\pi^2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 + \frac{\pi^2}{6} \end{pmatrix}$

eine Linearkombination von $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

Bsp: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}[x]$

$$p(x) = 1 - x, \quad q(x) = \frac{5}{2} + x^2, \quad r(x) = x^2 + x + 1$$

$$2 \cdot p(x) - q(x) + 3 \cdot r(x) = 2 \cdot (1 - x) - \left(\frac{5}{2} + x^2\right) + 3 \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$= 2x^2 + x - \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}[x]$$

Notiz: Linearkombinationen von Elementen aus V liegen in V.

Möchte: Summe von Linearkombinationen ist Linearkomb.

$$(r_1 \vec{a}_1 + \dots + r_n \vec{a}_n) + (s_1 \vec{b}_1 + \dots + s_m \vec{b}_m) \quad \checkmark$$

Das Summenzeichen:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \Sigma : \text{Sigma}$$

z.B.: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Dann: $\sum_{k=1}^{3} \vec{a}_k = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\sum_{k=2}^{4} \vec{a}_k = \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=2}^{3} k \cdot \vec{a}_k = 2 \cdot \vec{a}_2 + 3\,\vec{a}_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Formale Summen (V sei $\mathbb{K}$ - Vektorraum)

$$\sum_{\vec{a} \in V} r_{\vec{a}} \cdot \vec{a}$$ mit $r_{\vec{a}} \neq 0$ für nur endlich viele $\vec{a} \in V$

Jetzt ist das eine Linearkombination:

$r_{\vec{a}} \neq 0$ für $\vec{a} = \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$

$$\sum_{\vec{a} \in V} r_{\vec{a}}\, \vec{a} = r_{\vec{a}_1} \vec{a}_1 + \ldots + r_{\vec{a}_n} \vec{a}_n = \sum_{k=1}^{n} r_{\vec{a}_k} \cdot \vec{a}_k$$

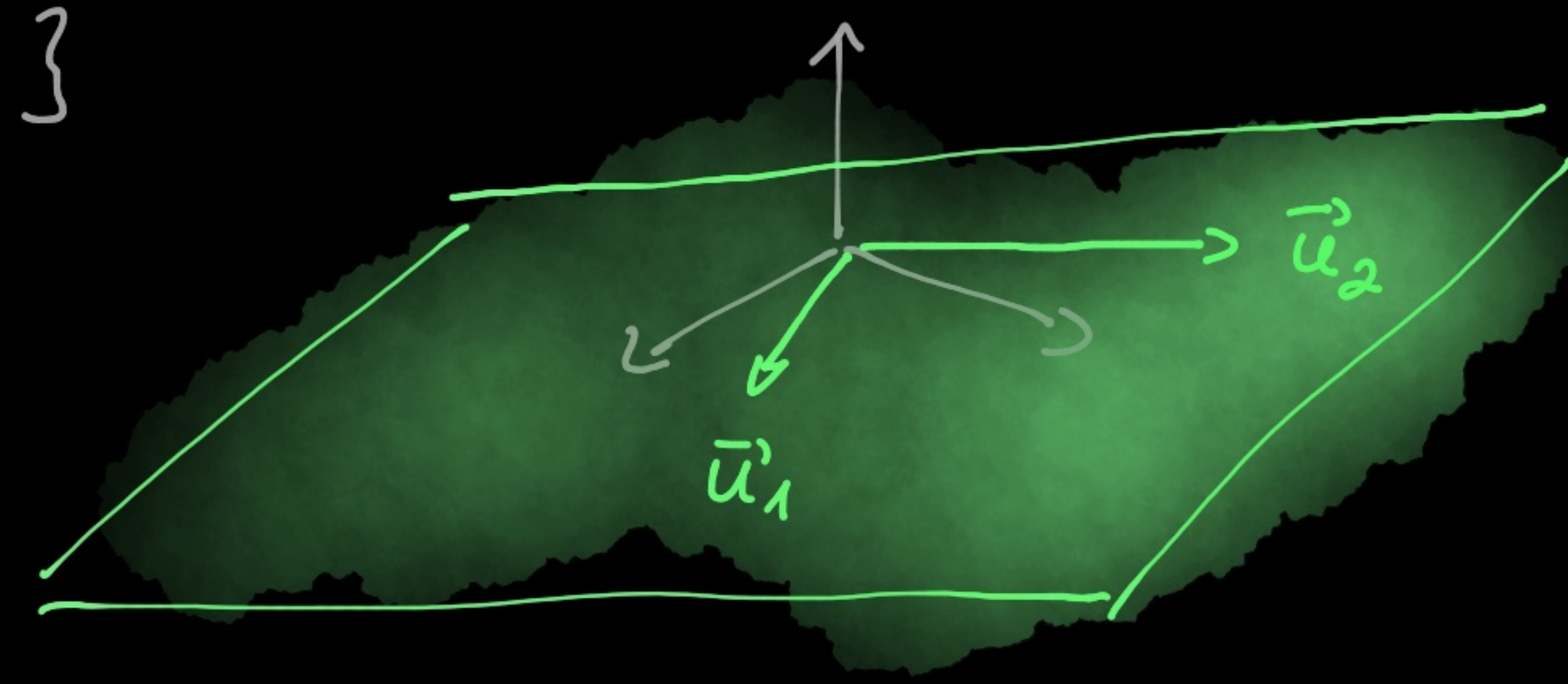
2.7 Aufspann einer Teilmenge

Vorgelegt: $\mathbb{K}$ Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subseteq V$ eine Teilmenge

zum Bsp.: $U = \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \}$

Bilde $\{ r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 \mid r_1, r_2 \in \mathbb{K} \}$

Erhalte einen UVR



Dann heißt

$$\mathrm{span}(U) = \Big\{ \sum_{\vec{a} \in U} r_{\vec{a}} \vec{a} \;\Big|\; r_{\vec{a}} \in \mathbb{K},\ r_{\vec{a}} \neq 0 \text{ für nur endlich viele } \vec{a} \in U \Big\}$$

der **Aufspann** von U.

Lemma: $\mathrm{span}(U)$ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis: Formal: $\mathrm{span}(\emptyset) = \{ \vec{0}_V \}$ (Def.)

- $\vec{0}_V \in \mathrm{span}(U)$? Ja: $\vec{0}_V = \sum_{\vec{a} \in U} 0 \cdot \vec{a}$
- Sind $\sum_{\vec{a} \in U} r_{\vec{a}} \vec{a}$, $\sum_{\vec{a} \in U} s_{\vec{a}} \vec{a} \in \mathrm{span}(U)$, so gilt

$$\sum_{\vec{a} \in U} r_{\vec{a}} \vec{a} + \sum_{\vec{a} \in U} s_{\vec{a}} \cdot \vec{a} = \sum_{\vec{a} \in U} \underbrace{(r_{\vec{a}} + s_{\vec{a}})}_{\neq 0 \text{ für nur endl. viele } \vec{a}} \cdot \vec{a} \in U$$

- Rest analog ....

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $\quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\operatorname{span}(U) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} = W \quad \text{Untervektorraum}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + 2s + 3t \\ 2r + s + 3t \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Beh.: $W \subseteq \operatorname{span}(U)$. Dann: $\boxed{\operatorname{span}(U) = W}$ (x-y-Ebene)

A, B Mengen. Dann ist $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt.

Bew Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, so gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

mit $t = 0$ und $x = r + 2s$, $y = 2r + s$

Schema: $\left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ -2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & y - 2x \end{array}\right\| : (-3)$

$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} y + \frac{2}{3} x \end{array}\right\| \begin{array}{l} -2 \cdot \mathrm{II} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} x + \frac{2}{3} y \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} x - \frac{1}{3} y \end{array}$

also für $r = -\frac{1}{3} x + \frac{2}{3} y$, $s = \frac{2}{3} x - \frac{1}{3} y$, $t = 0$.

<u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^3$, $U' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 + y^2 = 5 \right\}$

Klar: $\operatorname{span}(U') \subseteq W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Außerdem: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U'$.

Von oben: $\left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\} = W$

Also: $W \subseteq \operatorname{span}(U')$

Insgesamt: $\operatorname{span}(U') = W$.

Entdeckung: Gilt $U \subseteq U' \subseteq V$, so folgt $\operatorname{span}(U) \subseteq \operatorname{span}(U')$.

2.8 Schnitt und Vereinigung von Mengen

Vorgelegt: Mengen A, B

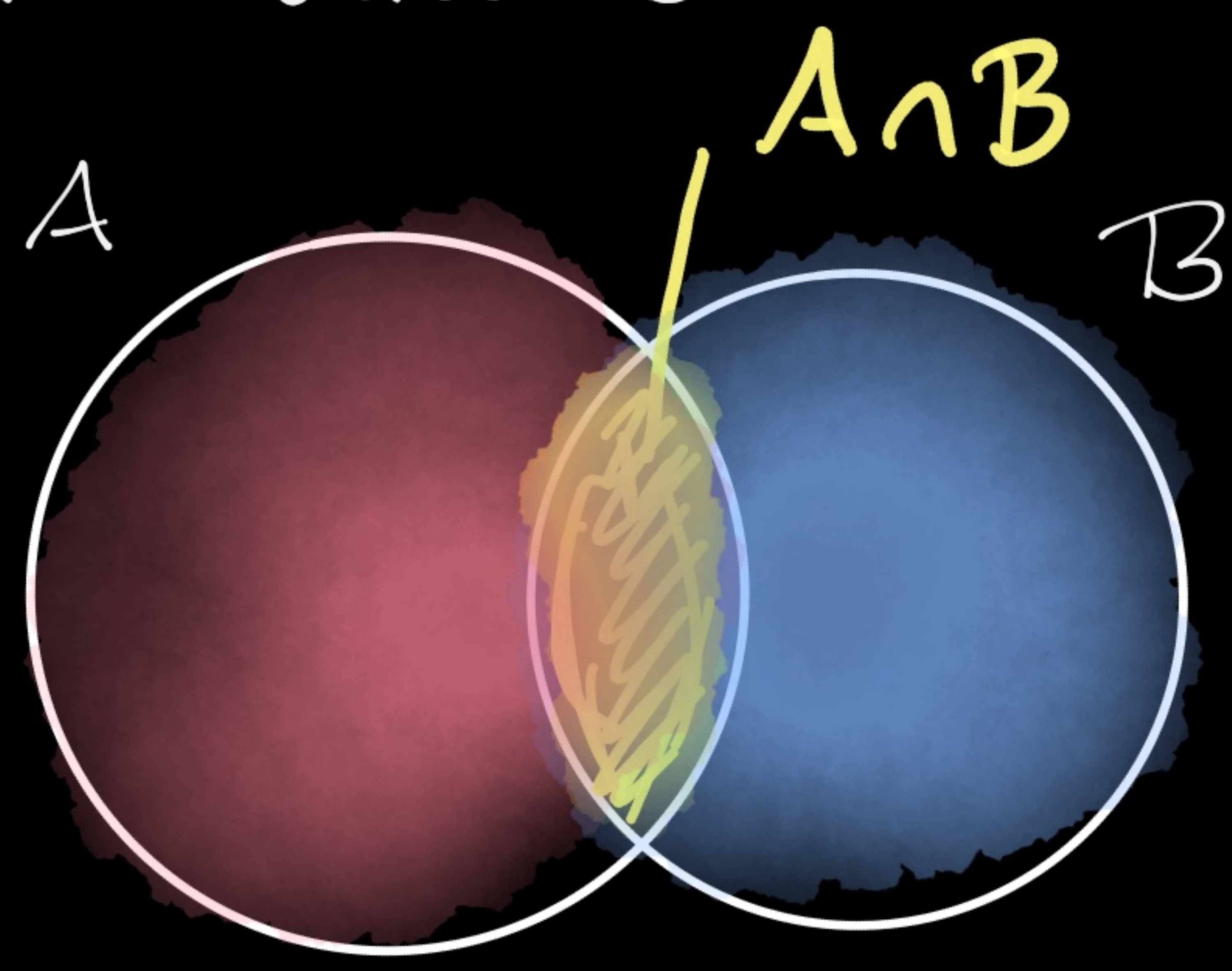
Dann:

- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$
  heißt die Vereinigung von A und B.

Abkürzung für "oder": $\vee$ (vel)

$$\underline{A \cup B} = \{ x \mid x \in A \,\underline{\vee}\, x \in B \}$$

- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$
  heißt der Schnitt von A und B



VENN-Diagramm

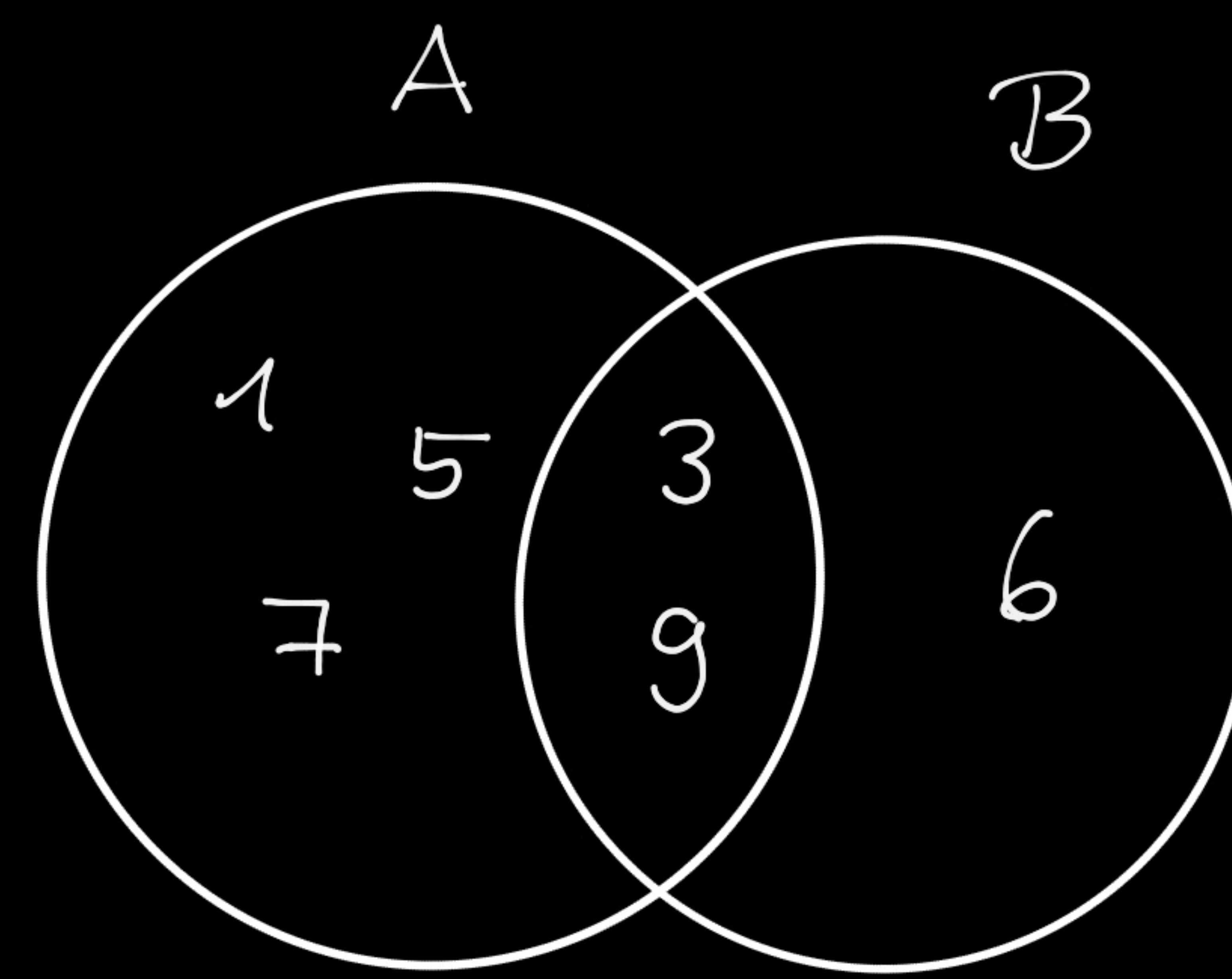
Beispiel

(1.) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ teilt nicht } x \text{ und } x \leq 10\}$

$B = \{3, 6, 9\}$

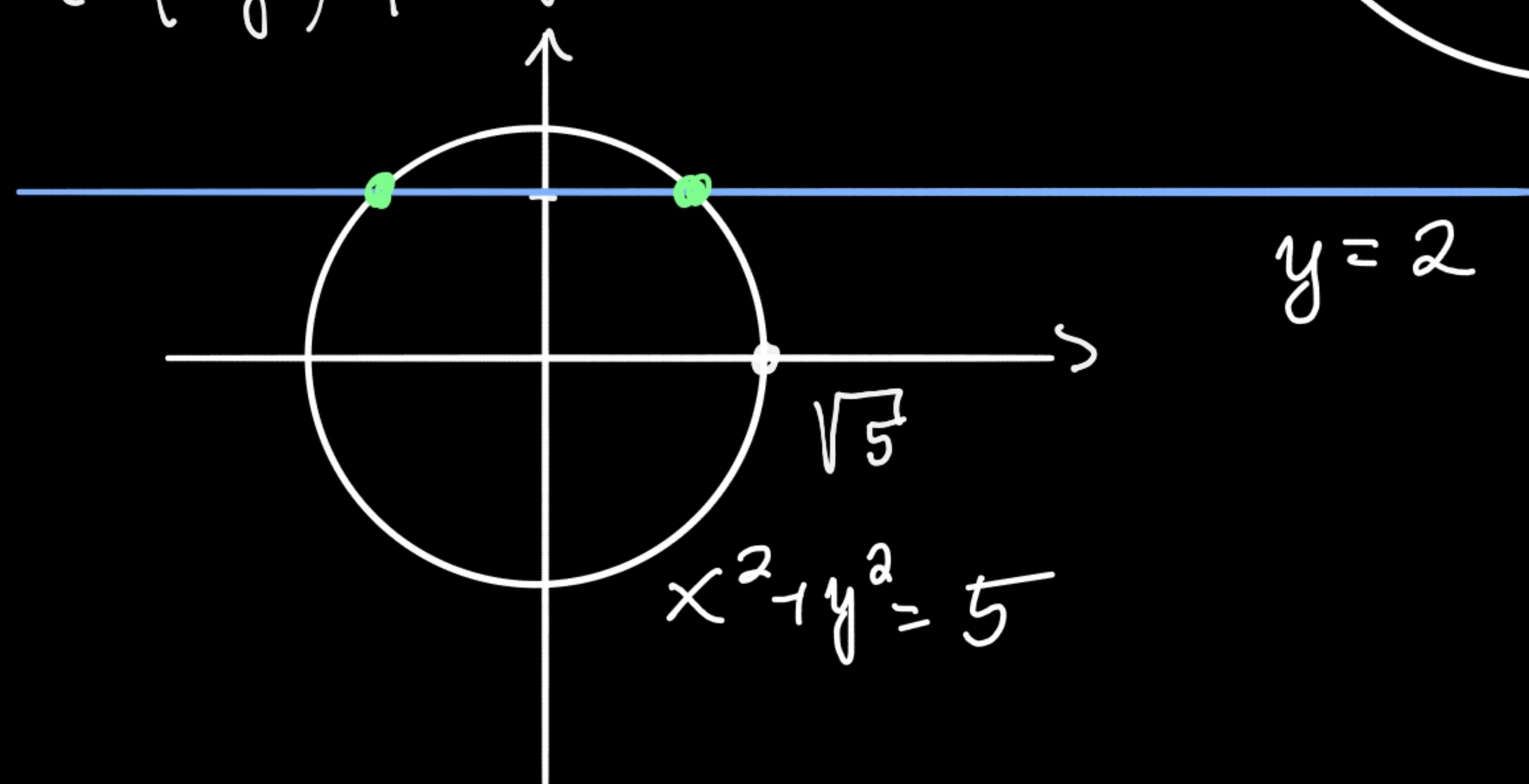
$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

$A \cap B = \{3, 9\}$



(2.) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 + y^2 = 5 \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; y = 2 \right\}$



$A \cap B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 + y^2 = 5 \text{ und } y = 2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

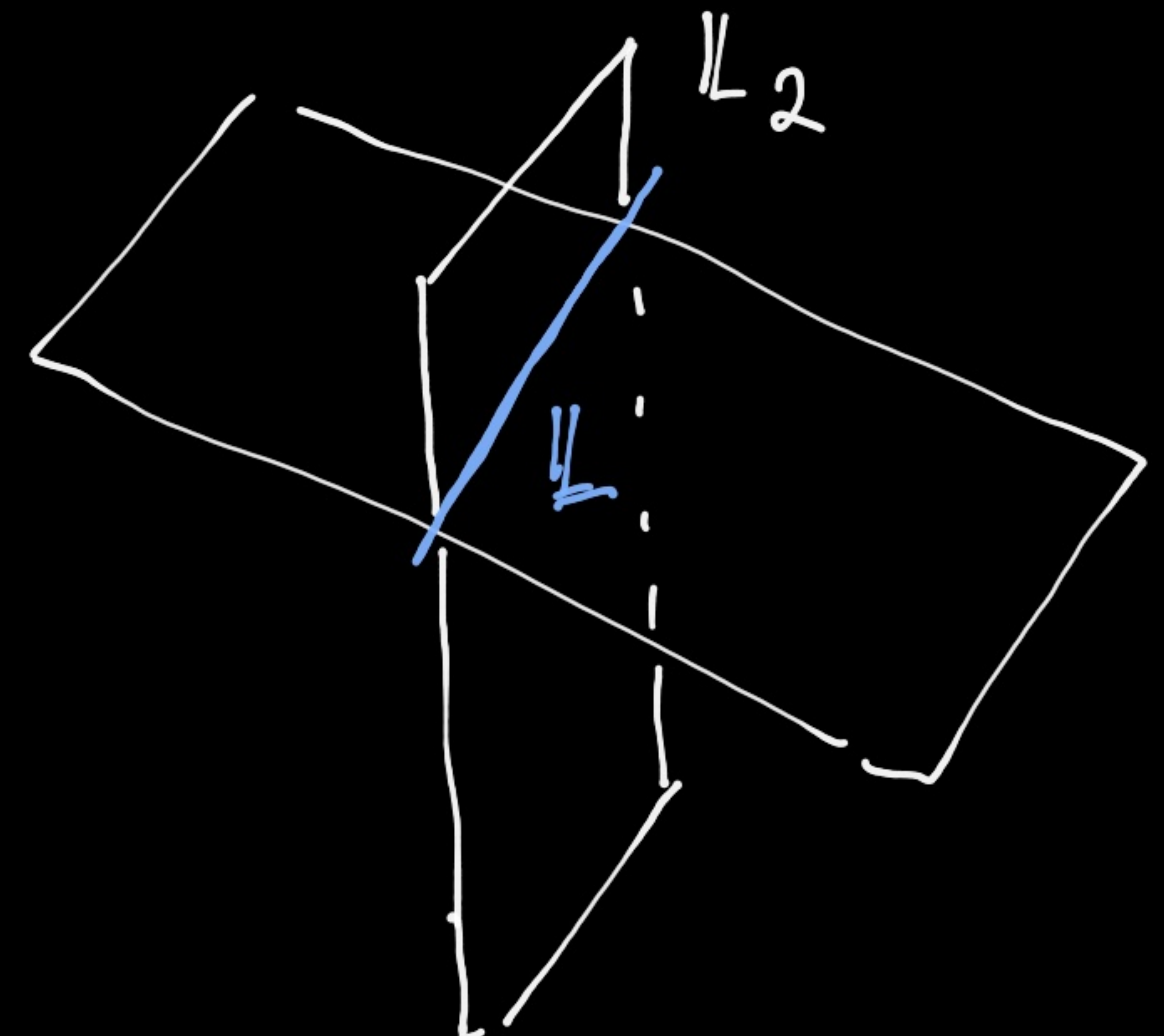
(3.) Der Lösungsraum $\mathbb{L}$ des LGS

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ \text{und} \quad x - y \phantom{{}+z} &= 0 \end{aligned}$$

ist der Schnitt der Lösungsräume

$$\mathbb{L}_1 : x + y + z = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{L}_2 : x - y = 0$$

d.h. $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$



$\mathbb{L}_1$ (Ebene durch $\underline{0}$ im $\mathbb{R}^3$)

Klar: $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ genauso

$\{x \mid x \in A_1 \text{ oder } x \in A_2 \text{ oder } . \text{ oder } x \in A_n\}$

Vereinigung und Schnitt beliebig vieler Mengen

Vorgelegt: Menge I (Indexmenge)

Für jedes $i \in I$ sei A_i eine Menge.

Dann: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i \}$

Vereinigung der A_i

$$\bigcup \underbrace{\{ A_i \mid i \in I \}}_{\text{"Mengensystem"}} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

<u>Bsp.:</u> $I = \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$: $A_r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ r \cdot x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$

Zusätzlich: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$ (y-Achse)

$\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r \cup B = \mathbb{R}^2$, denn: "$\subseteq$" ist klar.

Umgekehrt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Falls $x = 0$, so gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in B$.

Falls $x \neq 0$, so gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{x} \cdot x \end{pmatrix} \in A_{y/x}$

Notiz: $A_1 \cup \dots \cup A_n = \bigcup \{ A_i \mid i = 1, \dots, n \}$

I Indexmenge. Für $i \in I$ sei A_i eine Menge.

kurz: $\{A_i \mid i \in I\}$ sei ein Mengensystem.

Dann: $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \{x \mid x \in A_i$ für wenigstens ein $i \in I\}$

Kla: $A_1 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap \{A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Beispiel: $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $A_i = \left[1 - \frac{1}{10^i} ; 1 + \frac{1}{10^i}\right]$ Intervall

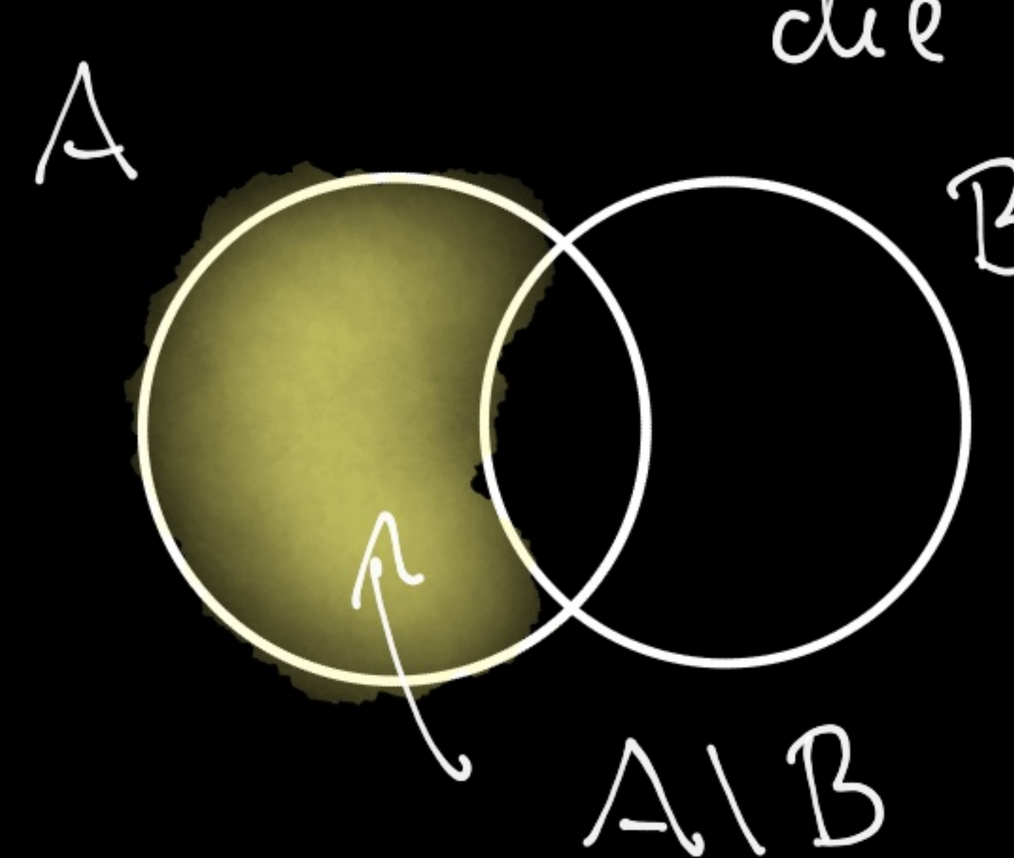
natürliche Zahlen ohne die 0

$A_1 = [0{,}9 ; 1{,}1]$, $A_2 = [0{,}99 ; 1{,}01]$; ...

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[1 - \frac{1}{10^i} ; 1 + \frac{1}{10^i}\right] = \{1\}$$

<u>Notiz</u>: A, B Mengen. Die Differenz von A und B ist die Menge $\underbrace{A \setminus B}_{\text{lies}} = \{x \mid x \in A$ und $x \notin B\}$

lies "A ohne B"



$x \notin B$: x ist kein Element von B

2.9 Schnitt von Untervektorräumen

Vorgelegt: $\mathbb{K}$ Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, I Indexmenge. Für $i \in I$ sei $U_i \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Dann ist auch $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ ein Untervektorraum, und zwar der größte, der in allen U_i, $i \in I$, enthalten ist.

<u>Beweis</u>: (1.) U Untervektorraum:

- $U \subseteq V$, da alle $U_i \subseteq V$.
- $\vec{0}_V \in U_i$ gilt für jedes $i \in I$, da U_i ein Untervektorraum.
  Also: $\vec{0}_V \in \bigcap_{i \in I} U_i = U$.
- $\vec{a}, \vec{b} \in U$. Dann gilt für jedes $i \in I$: $\vec{a}, \vec{b} \in U_i$, also auch $\vec{a} + \vec{b} \in U_i$, denn U_i ist ein Untervektorraum.
  Also liegt $\vec{a} + \vec{b}$ in jedem U_i und somit auch in $U = \bigcap_{i \in I} U_i$.
- $\vec{a} \in U$, $r \in \mathbb{K}$. Dann $r \cdot \vec{a} \in U$: genauso. ✓

(2.) Sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit: $W \subseteq U_i$ für $i \in I$. Ist $\vec{w} \in W$, so gilt $\vec{w} \in U_i$ für alle i, also $\vec{w} \in U$.
Folgt: $W \subseteq U$, d.h. U ist der größte in allen U_i enthaltenen Untervektorraum. ∎

Der zweite Teil der Hausaufgabe:

<u>Ha. B</u>: Vorgelegt: $\mathbb{K}$ Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $A, B \subseteq V$ (nicht-leere) Teilmengen.

Gilt dann $\operatorname{span}(A \cap B) = \operatorname{span}(A) \cap \operatorname{span}(B)$?

Also: Nachweisen oder (ein) konkretes Gegenbeispiel.

<u>Ha. C</u>: Der Lösungraum $\mathbb{L}$ des homogenen(!) LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ist bekanntlich ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$.

Gib eine möglichst kleine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{L} = \operatorname{span}(T)$ an.