IngMa 2 : Woche 6.

Vorgelegt: Ein Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$, eine Indexmenge I, für $i \in I$ ein Untervektorraum U_i.

Dann ist $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ der größte Untervektorraum von V, der in allen U_i, $i \in I$, enthalten ist.

Abkürzungen: VR steht für VektorRaum
UVR steht für UnterVektorRaum

2.10 Beobachtung: Ist $X \subseteq V$ eine Teilmenge, so gilt

$$\boxed{\operatorname{span}(X) = \bigcap \underbrace{\{U \subseteq V \mid U \text{ UVR von } V,\ X \subseteq U\}}_{\mathfrak{M}}}$$

Beweis: • $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, denn $V \in \mathfrak{M}$.

• Für jedes $U \in \mathfrak{M}$ gilt $X \subseteq U$, also $X \subseteq \bigcap \mathfrak{M}$.
$\bigcap \mathfrak{M}$ ist UVR, also $\operatorname{span}(X) \subseteq \bigcap \mathfrak{M}$.
[$\vec{v} \in \operatorname{span}(X)$ ⇝ es gibt $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in X$ und Zahlen $r_1, \dots, r_n$ mit $\vec{v} = r_1 \vec{x}_1 + \dots + r_n \vec{x}_n$. Alle $\vec{x}_i$ liegen in X, also auch in $\bigcap \mathfrak{M}$, dies ist ein UVR, also $\vec{v} = r_1 \vec{x}_1 + \dots + r_n \vec{x}_n \in \bigcap \mathfrak{M}$

- $\mathrm{span}(X)$ ist ein UVR, der X enthält.

Also ist $\mathrm{span}(X) \in \mathfrak{M} = \{ U \subseteq V \mid U \text{ UVR}, X \subseteq U \}$

Es folgt $\mathrm{span}(X) \supseteq \bigcap \mathfrak{M}$.

<u>Notiz</u>: Die Vereinigung von UVR ist i.a. <u>kein</u> UVR.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2$

Aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$

Folgt: $U_1 \cup U_2$ ist <u>kein</u> UVR von $\mathbb{R}^2$.

<u>Notiz</u>: I Indexmenge, $U_i \subseteq V$ UVR für $i \in I$.

Dann: $\mathrm{span}\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)$ ist der kleinste Untervektorraum, der alle U_i enthält.

2.11 Satz: Sind $U_1, \ldots, U_n$ UVR von V, so gilt $\operatorname{span}(U_1 \cup \ldots \cup U_n) = \{\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n \mid \vec{u}_1 \in U_1, \ldots, \vec{u}_n \in U_n\}$.

Vokabel: $\{\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n \mid \vec{u}_1 \in U_1, \ldots, \vec{u}_n \in U_n\} = U_1 + \ldots + U_n$

Summe der Untervektorräume $U_1, \ldots, U_n$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, $Y = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$

$$\operatorname{span}(X \cup Y) = X + Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

x-y-Ebene.

Beweis: • $U_1 + \ldots + U_n$ ist ein UVR

- $\vec{u} \in U_1 + \ldots + U_n \rightsquigarrow \vec{u} = \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n$ mit $\vec{u}_1 \in U_1, \ldots, \vec{u}_n \in U_n$

  $\rightsquigarrow \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in U_1 \cup \ldots \cup U_n \rightsquigarrow \vec{u} = \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n \in \operatorname{span}(U_1 \cup \ldots \cup U_n)$

  Fazit: $U_1 + \ldots + U_n \subseteq \operatorname{span}(U_1 \cup \ldots \cup U_n)$

- $U_i \subseteq U_1 + \ldots + U_n$ (denn z.B. $\vec{u}_1 = \vec{u}_1 + \vec{0}_V + \ldots + \vec{0}_V$)

  $U_1 + \ldots + U_n$ ist ein UVR.

  Also $U_1 + \ldots + U_n \supseteq \underbrace{\operatorname{span}(U_1 \cup \ldots \cup U_n)}_{\text{kleinste UVR, der alle } U_i \text{ enthält}}$ ∎

Also: $U_1 + \ldots + U_n$ ist der kleinste UVR, der $U_1, \ldots, U_n$ enthält.

2.12 Direkte Summen von Untervektorräumen

$U_1, \dots, U_n \subseteq V$ UVRe

Jedes $\vec{u} \in U_1 + \dots + U_n$ kann als Summe

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_n \quad \text{mit } \vec{u}_1 \in U_1, \dots, \vec{u}_n \in U_n$$

geschrieben werden.

Bsp $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in U_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in U_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in U_2}$$

Zerlegung nicht eindeutig

Vokabel: Falls es für jedes $\vec{u} \in U_1 + \dots + U_n$ eindeutig bestimmte $\vec{u}_1 \in U_1, \dots, \vec{u}_n \in U_n$ gibt mit $\vec{u} = \vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_n$, so schreibe $U_1 + \dots + U_n = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ direkte Summe

Vokabel: Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt **Erzeugendensystem**, wenn $\operatorname{span}(X) = V$ ist.

Bsp.:

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist <u>kein</u> Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

- $\mathbb{L}$ = Lösungsraum des LGS

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ x + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Gauß

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

freie Var.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{L}$

Typische Aufgabe: Vorgelegt sind die Untervektorräume

$$U_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^4$. Bestimme $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

<u>Lsg</u>: $\underline{u} \in U_1 \cap U_2$ bedeutet

Es gibt $r, s, a, b \in \mathbb{R}$ mit $\underline{u} = \boxed{r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

bzw. $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

bzw. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ LGS

Gauß: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} + \mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ -\mathrm{III} \end{array} \begin{array}{l} +\mathrm{III} \\ +2\cdot\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4t \\ 8t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Typische Aufgabe: Vorgelegt sind die Untervektorräume

$$U_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^4$. Bestimme $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Lsg: $\underline{u} \in U_1 \cap U_2$ bedeutet

Es gibt $r, s, a, b \in \mathbb{R}$ mit $\underline{u} = \boxed{r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 8t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{u} \in U_1 \cap U_2$ ist gleichwertig zu

$$\underline{u} = 2t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } t$$

$$= t \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von $U_1 \cap U_2$

Typische Aufgabe: Vorgelegt sind die Untervektorräume

$$U_1 = \operatorname{span}\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}}_{X_1} \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{span}\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\0\\2\end{pmatrix}\right\}}_{X_2}$$

von $\mathbb{R}^4$. Bestimme $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

o.k.!

$$U_1 + U_2 = \operatorname{span}(X_1) + \operatorname{span}(X_2)$$

$$= \operatorname{span}(X_1 \cup X_2) \qquad (\text{hoffentlich} \dots)$$

Dann: $U_1 + U_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$

zu: $\boxed{\operatorname{span}(X_1) + \operatorname{span}(X_2) = \operatorname{span}(X_1 \cup X_2)}$

(ganz allgemein)

- $X_1 \cup X_2 \subseteq \operatorname{span}(X_1) + \operatorname{span}(X_2)$ UVR
  $\operatorname{span}(X_1 \cup X_2) \subseteq \operatorname{span}(X_1) + \operatorname{span}(X_2)$
- Umgekehrt: $\operatorname{span}(X_1), \operatorname{span}(X_2) \subseteq \operatorname{span}(X_1 \cup X_2)$ UVR
  $\operatorname{span}(X_1) + \operatorname{span}(X_2) \subseteq \operatorname{span}(X_1 \cup X_2)$ ∎

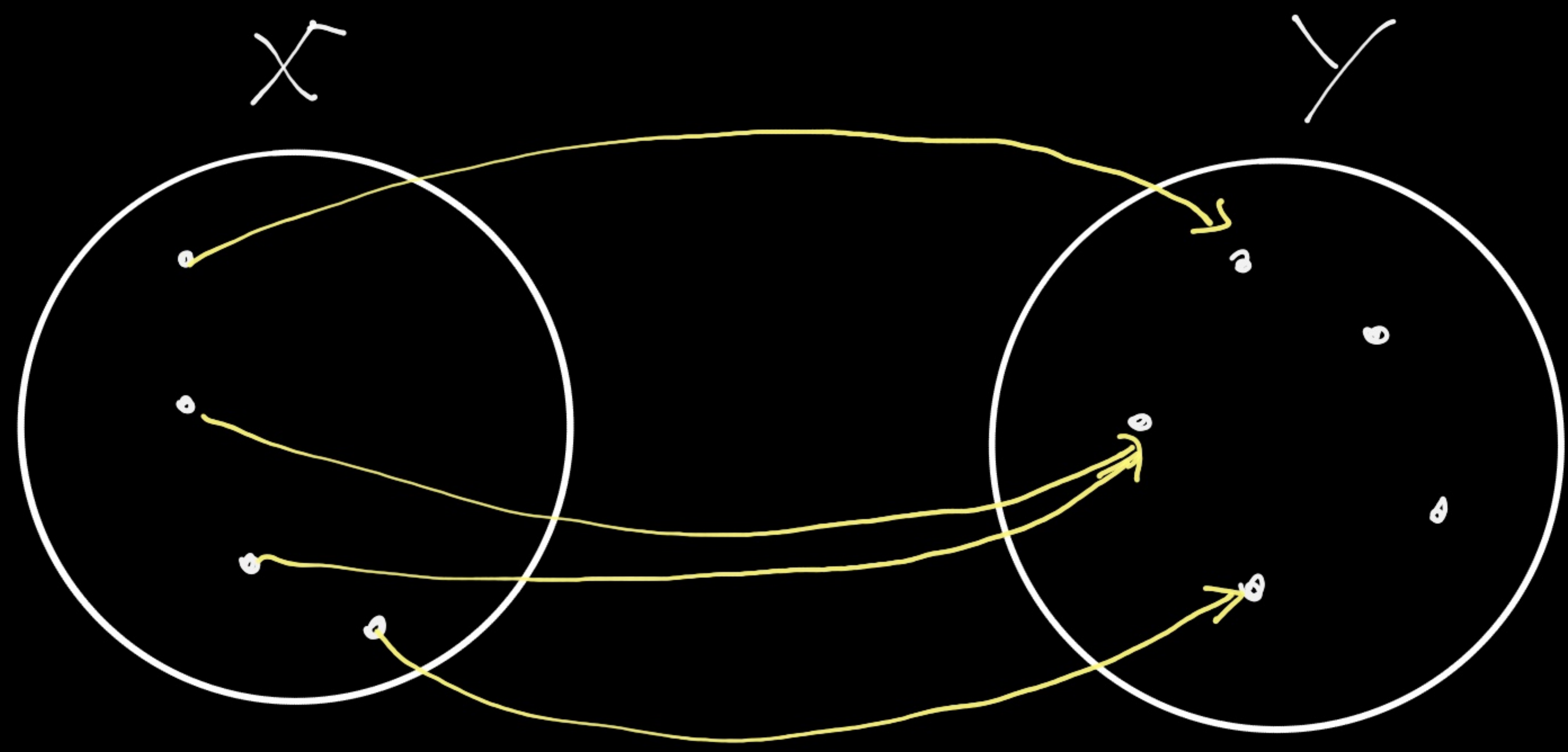
HAUSAUFGABE 06A

Berechne den Schnitt der Untervektorräume

$$U_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^4$. Wieso gilt $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^4$?

Einschub: Abbildungen



Jedem $x \in X$ wird ein $y \in Y$ zugeordnet

Abkürzung
Abb. steht für Abbildung

Vorgelegt: Mengen X, Y.

Eine Abbildung von X in Y ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu.

Schreibweise: Statt "die Abbildung f ordnet einem x ein y zu" schreibe $y = f(x)$.

Schreibweise: $f: X \longrightarrow Y, \; x \longmapsto f(x)$

meint eine Abb. mit Namen f, die einem $x \in X$ das Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

Beispiele für Abbildungen

(a) $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$

oder $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x) = x^2$

z.B. $q(5) = 5^2 = 25$

(b) $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

oder $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad p(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$

gleiche Abbildung!

Allgemein: Definitionsbereich / Urbildmenge, Zielmenge

$$f : X \longrightarrow Y$$

(c) $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$

und $\tilde{q} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), \quad x \longmapsto x^2$

und $\hat{q} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$

sind verschiedene Abbildungen!

Zu einer Funktion gehört der Definitionsbereich, die Zielmenge und Funktionsvorschrift $f(x) = y$

Vorgelegt ist eine Abbildung $f: X \to Y$.

- Ist $T \subseteq X$ eine Teilmenge, so heißt die Abb. $f|_T : T \to Y$, $x \mapsto f(x)$ Einschränkung von f auf T.

Notiz: $y = f(x)$

Funktionswert ↑ ↑ Argument

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$

Gerade $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

$f|_L : L \to \mathbb{R}^2$, $f|_L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} x - 2x \\ x + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 3x \end{pmatrix}$

- Ist $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann $\{ f(x) \mid x \in T \} = f(T)$ heißt das Bild von T.

Bsp (von oben): $f(L) = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ 3x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -3t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

Das Bild der Geraden L ist daher die Gerade $y = -3x$

Ist $S \subseteq Y$ eine Teilmenge,
so nennt man $f^-(S) = \{ x \in X \mid f(x) \in S \}$
das Urbild von S.

<u>Beispiel</u> $f : [-10, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$.

$S = [-3, 4]$: $f^-(S) = [-2, 2]$

$f^-(S)$: Menge aller x, deren Quadrat zwischen -3 und 4 liegt.

$S_2 = \{-1, -2, -3\}$: $f^-(S_2) = \emptyset$

$S_3 = \{-5, 1, 4, 10.000\}$: $f^-(S_3) = \{1, -1, 2, -2\}$

<u>Bem</u> : Schreibe $f(x) = y$ für $x \in X$,
aber $f^-(y) = \{ x \in X \mid f(x) = y \} = f^-(\{y\})$
für $y \in Y$

<u>Bsp</u> : $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(4) \end{pmatrix}$

z.B. $f(x^2 - x + 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$

§3: Lineare Abbildungen

Vorgelegt
- ein Körper $\mathbb{K}$
- zwei $\mathbb{K}$-VR V und W
- eine Abbildung $f: V \longrightarrow W$

Dann nennen wir f eine lineare Abbildung, wenn

(1.) $f(\vec{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Add. in } V}}{+} \vec{y}) = f(\vec{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Add. in } W}}{+} f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$

(2.) $f(r \cdot \vec{x}) = r \cdot f(\vec{x})$ für alle $r \in \mathbb{K}$, $\vec{x} \in V$.

3.1 Satz: Ist A eine $(m \times n)$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K}$, so ist $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$; $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ eine lineare Abbildung.

Beweis: (1.) $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $f(\underline{x} + \underline{y}) = A \cdot (\underline{x} + \underline{y})$

$$\underset{(*)}{=} A \cdot \underline{x} + A \cdot \underline{y} = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$$

fehlt: Nachweis von $(*)$

Es fehlt noch $(*)$: $A \cdot (\underline{x} + \underline{y}) = A \cdot \underline{x} + A \cdot \underline{y}$ ✓

Schreibe $A = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n)$ in Spaltenvektoren

$$\underline{A \cdot (\underline{x} + \underline{y})} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 + y_1) \cdot \underline{a}_1 + \dots + (x_n + y_n) \cdot \underline{a}_n$$

$$= x_1 \cdot \underline{a}_1 + \dots + x_n \cdot \underline{a}_n + y_1 \underline{a}_1 \dots + y_n \underline{a}_n$$

$$= (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{A \cdot \underline{x} + A \cdot \underline{y}}$$

(2.) $f(r \cdot \underline{x}) = A \cdot (r \cdot \underline{x}) \overset{(**)}{=} r \cdot (A \cdot \underline{x}) = r \cdot f(\underline{x})$

$(**)$ $A \cdot (r \cdot \underline{x}) = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} r x_1 \\ \vdots \\ r x_n \end{pmatrix} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} (r x_i) \cdot \underline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} r \cdot (x_i \cdot \underline{a}_i) = r \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underline{a}_i$$

$$= r \cdot (A \cdot \underline{x})$$

∎

<u>Also</u> $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \underline{x} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & \pi^2/6 \\ 42 & 0 & 1 & 10^{10} & 3/2 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$

ist linear.

3.2 Satz Vorgelegt ist eine lineare Abbildung $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.
Dann gibt es eine $(n \times m)$-Matrix A mit
$f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ für alle $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$.

Beweis: Setze $\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle

$\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ heißt Standardbasis von $\mathbb{K}^n$

Schreibe $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ als $\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \underline{e}_i$

$$f(\underline{x}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i\right) \underset{\text{"1." bei "linear"}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{i=1}^n f(x_i \underline{e}_i)$$

$$\underset{\text{"2."}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(\underline{e}_i) = \underbrace{\left(f(\underline{e}_1) \ \dots \ f(\underline{e}_n)\right)}_{= A \text{ Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Also: $f(\underline{x}) = \left(f(\underline{e}_1) \ \dots \ f(\underline{e}_n)\right) \cdot \underline{x}$ für alle $\underline{x}$

d.h. in den Spalten der für f zuständigen Matrix stehen die Bilder $f(\underline{e}_i)$ der Standardbasis.

∎

WEITERE BEISPIELE LINEARER ABBILDUNGEN

(1.) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\sin \pi/6 & 0 \\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ x- y- Ebene

$g: U \to U$, $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos \pi/6 - y \cdot \sin \pi/6 \\ x \cdot \sin \pi/6 + y \cdot \cos \pi/6 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2.) $f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ (Ableiten von Polynomen)

$f\left(\sum_{i=0}^{n} r_i \cdot x^i \right) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot r_i \, x^{i-1}$

z.B. $f(x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 8x - 42) = 5x^4 - 12x^3 + 12x + 8$

f ist linear :

$f(p(x) + q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$

$f(r \cdot p(x)) = r \cdot f(p(x))$

($(p(x) + q(x))' = p(x)' + q(x)'$

$(r \cdot p(x))' = r \cdot p(x)'$)

(3.) $f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $p(x) \mapsto p(1)$ ist linear

$f\left(\sum_{i=0}^{n} r_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{m} s_i \cdot x^i \right) = f\left(\sum_{i=0}^{n} (r_i + s_i) \cdot x^i \right)$

OE $n = m$ $\quad = \sum_{i=0}^{n} (r_i + s_i) = \sum_{i=0}^{n} r_i + \sum_{i=0}^{m} s_i$

$= f\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i \right) + f\left(\sum_{i=0}^{m} s_i x^i \right)$; Rest analog!

<u>Übung</u>: Gibt es eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$?

Wenn ja, bestimme die Matrix A mit: $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ für alle $\underline{x}$.
Berechne außerdem $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

<u>Ansatz</u>: Finde A mit

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \text{ und } A \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

$A = (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \underline{a}_3)$, dabei $\underline{a}_1 = A \cdot \underline{e}_1$ $\qquad \underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Wäre nett: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad (*)$

Dann: $\underline{a}_1 = A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = r_1 \cdot A \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s_1 \cdot A \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + t_1 \cdot A \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$= r_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$(*)$ ist ein LGS: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & 2\\1 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}r_1\\s_1\\t_1\end{pmatrix}$

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\3 & 0 & 2\\2 & 2 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}r_1\\s_1\\t_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \underline{a}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \underline{a}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_3 \\ s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_3 \\ s_3 \\ t_3 \end{pmatrix} = \underline{a}_3$$

↑ linke Seite der LGS identisch :

$$M \mid \underline{b}_1 \; \underline{b}_2 \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\Big|\; Lsg_1 \; Lsg_2$$

Zusammengefasstes Schema

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\right\|\; \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \;\Big\|\; \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & +2 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix} \;\Big\|\; \begin{matrix} -\frac{1}{2}\mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \\ :2 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{matrix} \;\Big\|\; \begin{matrix} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\Big|\; \begin{array}{ccc} -1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} r_3 \\ s_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Es gibt so eine lineare Abb., nämlich $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$,

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3/2 & 3 & 7/2 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Es gilt $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\checkmark$

HAUSAUFGABE 06 B

Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
mit $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$?

Wenn ja: Bestimme $f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

HAUSAUFGABE 06 C

Vorgelegt ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$.

Wir setzen $\ker(f) = \{ \vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_W \} = f^{-}(\vec{0}_W)$

("Kern von f")

Zeige, dass $\ker(f)$ ein Untervektorraum von V ist.

<u>Sä</u>: $f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 \cdot f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

d.h. jede lineare Abb. bildet den Nullvektor von V auf den von W ab.