3.3 Satz Vorgelegt ist eine lineare Abbildung $f: V \to W$. Es versteht sich von selbst, dass V und W Vektorräume über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$ sind.

Der **Kern** von f ist die Menge

$$\ker(f) = \{ \vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_W \}$$

Das **Bild** von f ist die Menge

$$\operatorname{im}(f) = f(V) = \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in V \}$$

Es gilt: $\ker(f)$ ist ein Untervektorraum von V.
$\operatorname{im}(f)$ ist ein Untervektorraum von W.

Beweis: $\ker(f)$ ist UVR $\longrightarrow$ siehe Hausaufgabe

$\operatorname{im}(f)$ ist ein UVR:

- $\vec{0}_W \in \operatorname{im}(f)$, denn $\vec{0}_W = f(\vec{0}_V)$
- $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \operatorname{im}(f)$, d.h. $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$, $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$ für passende $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. Daher $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$
$\overset{f \text{ linear}}{=} f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in f(V)$ (denn $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$).
- $\vec{w} \in \operatorname{im}(f)$, $r \in \mathbb{K}$, d.h. $\vec{w} = f(\vec{v})$ für ein passendes $\vec{v}$.
Dann: $r \cdot \vec{w} = r \cdot f(\vec{v}) = f(r \cdot \vec{v}) \in \operatorname{im}(f)$ $\blacksquare$

Bem.: Ist $f: V \to W$ linear und ist U ein UVR von V, so ist $f(U) = \{ f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U \}$ ein UVR von V.

Bem: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Betrachte die lineare Abb. $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

$f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$.

(a) Dann ist $\ker(f) = \{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} = \underline{0} \}$ der Lösungsraum des homogenen Gleichungssytems $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$.

(b) Ist $A = (\underline{a}_1, -, \underline{a}_n)$ ($\underline{a}_1, -, \underline{a}_n$ Spalten von A), so gilt: $\operatorname{im}(f) = \operatorname{span}\{ \underline{a}_1, -, \underline{a}_n \}$, denn:

Erinnerung: $\underline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-te Stelle

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \underline{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(\underline{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \underline{a}_j$$

$$f(\underline{e}_j) = A \cdot \underline{e}_j = \sum_{k=1}^{n} (\underbrace{k\text{-te Eintrag von } \underline{e}_j}_{\substack{=0 \text{ für } k \neq j \\ =1 \text{ für } k = j}}) \cdot \underline{a}_k = \underline{a}_j$$

Jedes $f(\underline{x})$ ist eine Linear-kombination der $\underline{a}_j$, also $\operatorname{im}(f) = \operatorname{span}\{ \underline{a}_1, -, \underline{a}_n \}$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3; \quad f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

- $\ker(f)$ ist der Lösungsraum von $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$

Schema: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ -2\cdot\mathrm{II} \end{array}$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad : \quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 3x_3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$

allg. Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker(f) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\operatorname{im}(f) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Bem: V ein VR mit UVR U; $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in V$.

Dann gilt $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \subseteq U$

genau dann, wenn $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in U$.

- $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in U \leadsto \sum_{j=1}^{k} r_j \underline{v}_j \in U$

  ↳ "typisches" Element von $\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ ✓

- Umgekehrt: $\underline{v}_j \in \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \overset{\text{Vor.}}{\subseteq} U$

Anwendung: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}}_{= 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Komposition von Abbildungen

__Definition__ Seien A, B, C Mengen sowie $f: A \to B$ und $g: B \to C$ Abbildungen.

Die Komposition oder Hintereinanderschaltung von f und g ist die Abbildung

$$h: A \to C, \quad h(a) = g(f(a))$$

Schreibe $h = g \circ f$.

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

__Bsp__ : $A = B = C = \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = x^2$$

$$\left.\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 \\ (f \circ g)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2) \end{aligned}\right\} \neq$$

$$(f \circ g)\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}\pi}\right) = \sin\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}\pi}^{\,2}\right) = \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$ ist nie negativ

$$f \circ g = g \circ f$$

Bem.: Nicht für alle f, g gibt es $g \circ f$,

z.B. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \cdot x$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$

$\cancel{g(f(x)) = g(2x)}$ klappt nicht; g braucht 2 Argumente, f liefert nur eins.

Falls $f: A \to B$, $g: C \to D$, so kann $g \circ f$ nur existieren, wenn $B \subseteq C$

(Dann: $f(a) \in B \subseteq C$, also gibt es $g(f(a))$)

3.4 Satz: Sind $f: U \to V$ und $g: V \to W$ lineare Abb., so ist auch $g \circ f: U \to W$ linear.

Beweis: (1.) $(g \circ f)(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = (g \circ f)(\vec{u}_1) + (g \circ f)(\vec{u}_2)$

(2.) $(g \circ f)(r \cdot \vec{u}) = r \cdot (g \circ f)(\vec{u})$

zu (1.):

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) &= g(f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)) && \text{(Def. von "}\circ\text{")} \\
&= g(f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2)) && (f \text{ linear}) \\
&= g(f(\vec{u}_1)) + g(f(\vec{u}_2)) && (g \text{ linear}) \\
&= (g \circ f)(\vec{u}_1) + (g \circ f)(\vec{u}_2) && \text{(Def. von "}\circ\text{")}
\end{aligned}$$

zu (2.):

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(r \cdot \vec{u}) &= g(f(r \cdot \vec{u})) = g(r \cdot f(\vec{u})) \\
&= r \cdot g(f(\vec{u})) = r \cdot (g \circ f)(\vec{u})
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Zwischenüberlegung:

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{k \times m}$

$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

$g: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$, $g(\underline{y}) = B \cdot \underline{y}$

Also: $g \circ f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$, $(g \circ f)(\underline{x}) = B \cdot f(\underline{x}) = B \cdot (A \cdot \underline{x})$

ist linear, d.h. es gibt eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{k \times n}$

mit $g \circ f(\underline{x}) = C \cdot \underline{x}$ für alle $\underline{x}$

Spaltenweise ansehen: $C = (\underline{c}_1 \cdots \underline{c}_n)$

$A = (\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n)$

Wir wissen:

- $C \cdot \underline{x} = (g \circ f)(\underline{x}) = B \cdot (A \cdot \underline{x})$
- $\underline{c}_j = C \cdot \underline{e}_j$, $\underline{a}_j = A \cdot \underline{e}_j$

Also: $\underline{c}_j = C \cdot \underline{e}_j = B \cdot (A \cdot \underline{e}_j) = B \cdot \underline{a}_j$

Definiere: $C = B \cdot A = B \cdot (\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n)$

$= (B \cdot \underline{a}_1 \;\; B \cdot \underline{a}_2 \; \cdots \; B \cdot \underline{a}_n)$

Matrizenprodukt

Definition: Das Produkt zweier Matrizen $B \in \mathbb{K}^{k \times m}$ und $A = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die $(k \times n)$ - Matrix

$$B \cdot A = (B \cdot \underline{a}_1 \quad B \cdot \underline{a}_2 \quad \dots \quad B \cdot \underline{a}_n)$$

Beispiel:

$$\underset{2 \times 3}{\underset{\uparrow}{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{3 \times 2}{\underset{\uparrow}{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2 \times 2 - \text{Matrix}) \qquad \circledast$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Y \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \circledast$$

i.a. $X \cdot Y \neq Y \cdot X$

3.5 Satz: Vorgelegt: $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{k\times m}$

Setze $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(\underline{x}) = A\cdot\underline{x}$

und $g : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$, $g(\underline{x}) = B\cdot\underline{x}$

Dann gilt für die Komposition $g\circ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$(g\circ f)(\underline{x}) = (B\cdot A)\cdot\underline{x} \quad \text{für alle } \underline{x}\in\mathbb{K}^n$$

Notiz: Speziell gilt $\boxed{(B\cdot A)\cdot\underline{x} = B\cdot(A\cdot\underline{x})}$

$$(g\circ f)(\underline{x}) = g(f(\underline{x}))$$

3.6 Satz $A \in \mathbb{K}^{k\times l}$, $B\in\mathbb{K}^{l\times m}$, $C\in\mathbb{K}^{m\times n}$

[Man kann nur $(u\times v)$- und $(v\times w)$-Matrizen multiplizieren ☝]

Dann gilt $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

Beweis: Mögl. 1: $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ $\rightsquigarrow$ Übungsaufg.

Mögl. 2: $C = (\underline{c}_1 \ \dots \ \underline{c}_n)$

$$(A\cdot B)\cdot(\underline{c}_1\dots\underline{c}_n) = ((A\cdot B)\cdot\underline{c}_1 \ \dots \ (AB)\cdot\underline{c}_n)$$

$$= (A\cdot(B\cdot\underline{c}_1) \ \dots \ A(B\,\underline{c}_n)) = A\cdot(B\underline{c}_1 \dots B\underline{c}_n) = A\cdot(B\cdot(\underline{c}_1 \dots \underline{c}_n))$$

∎

Die Hausaufgabe

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

Das FALK-Schema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $A \cdot B$

FALK-Schema
$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & A \cdot B \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cccc} \multicolumn{2}{c|}{\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & A\cdot B \end{array}} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & \boxed{-1} & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 5 & 2 \end{array}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

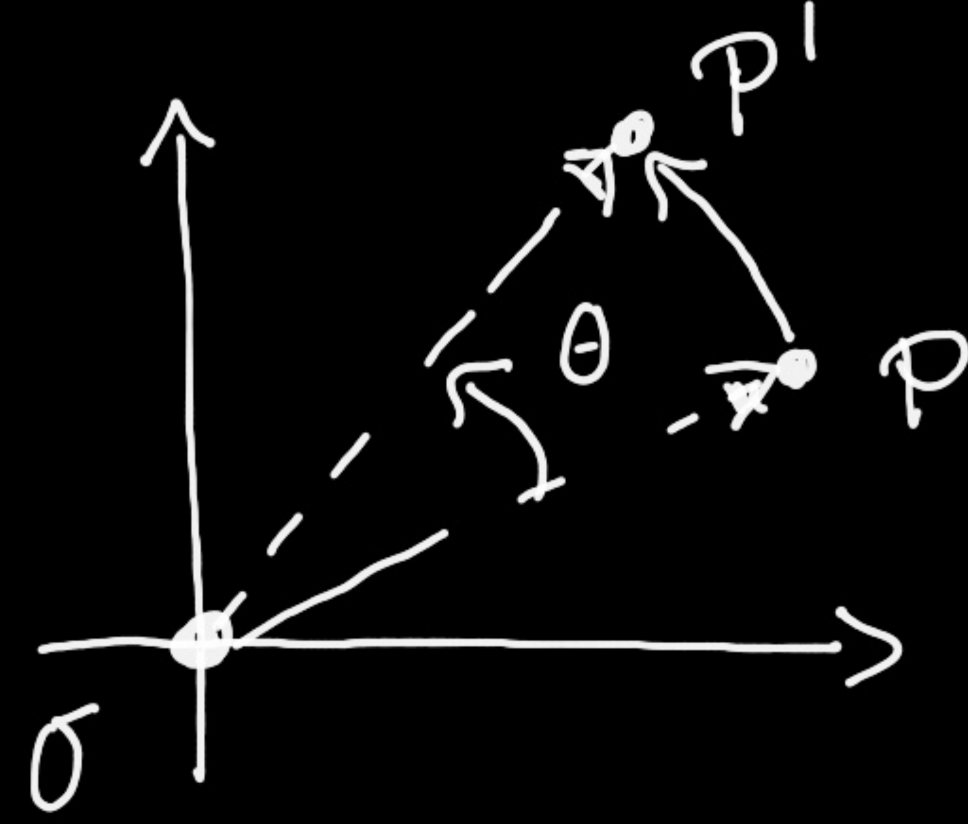
$$1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -1$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ * \end{pmatrix}$$

Drehungen in der Ebene

Drehungen um den Ursprung von $\mathcal{W}$ mit Winkel θ:

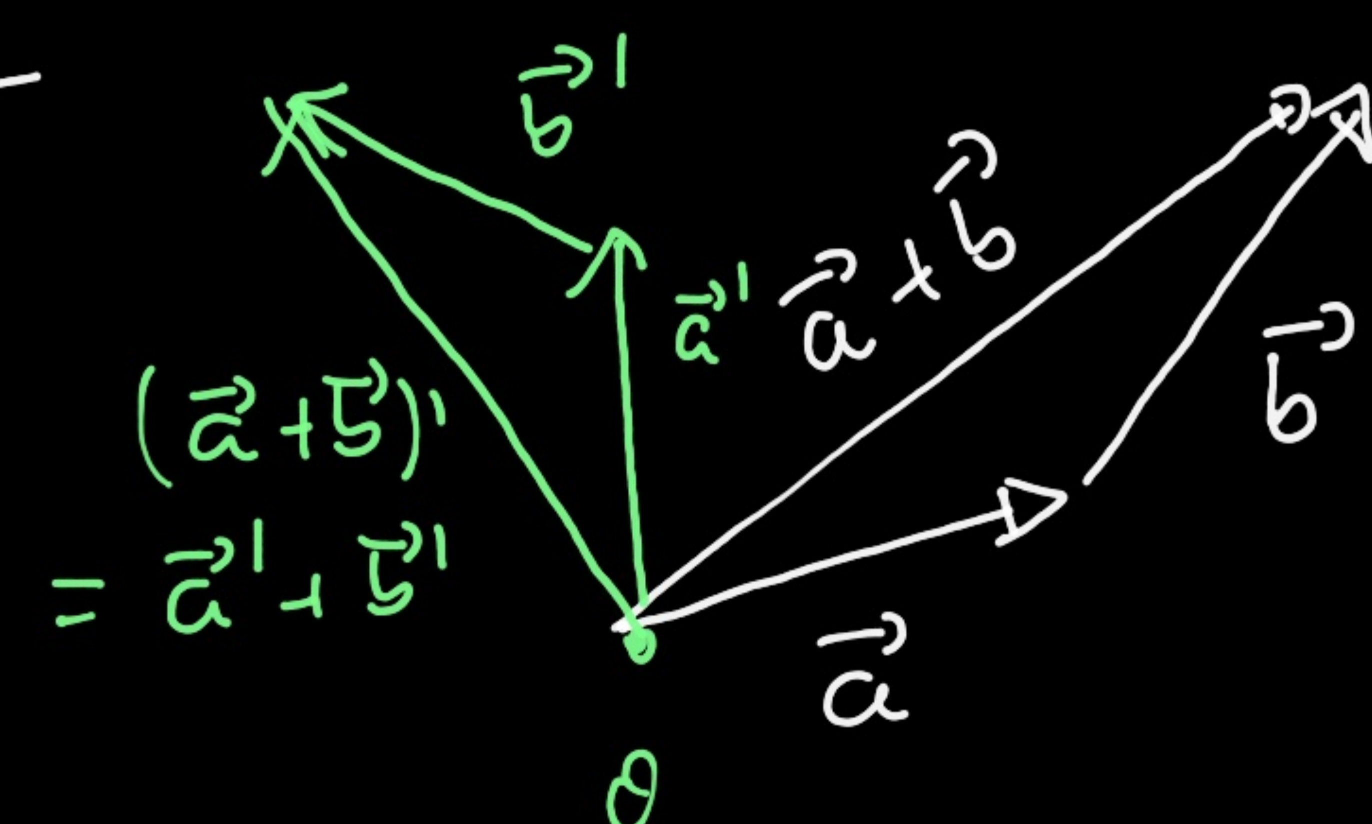


$$g\left(\left[\overrightarrow{OP}\right]_{\mathcal{W}}\right) = \left[\overrightarrow{OP'}\right]_{\mathcal{W}}$$

beschreibt eine Abbildung

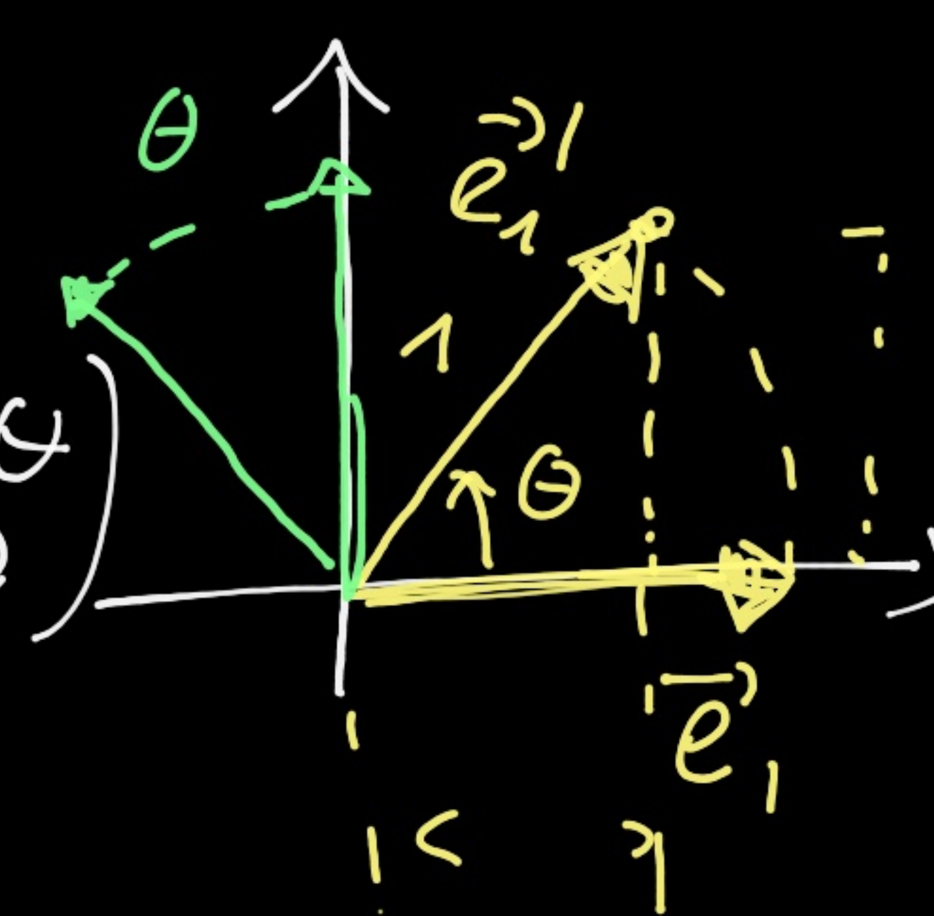
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

<u>Beh.:</u> g ist linear



etc.

g lässt sich durch eine Matrix R beschreiben.

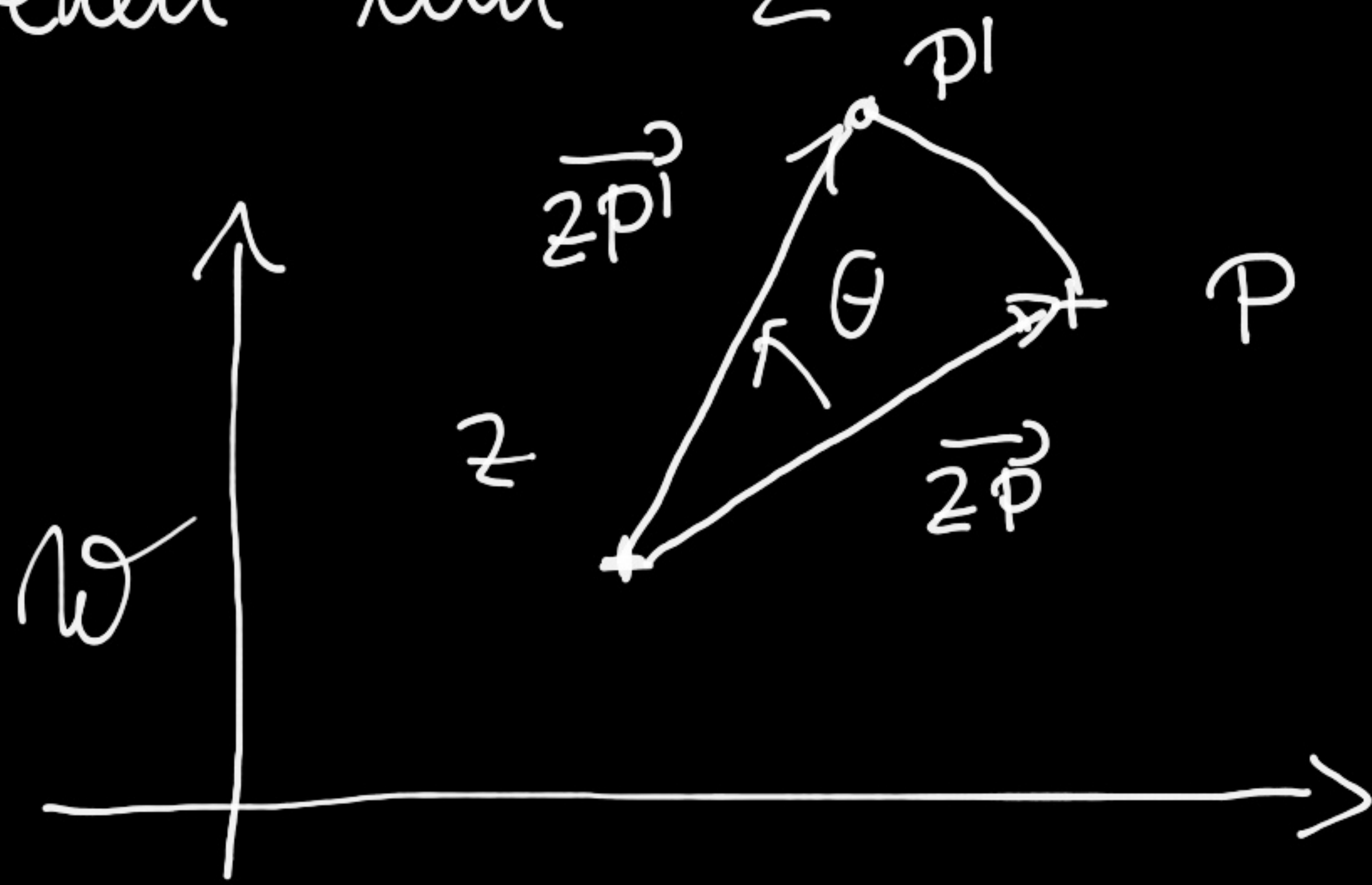


$$R = \begin{pmatrix} \underline{r}_1 & \underline{r}_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{r}_1 = R \cdot \underline{e}_1 = g(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Also: $$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Drehen um Z mit Koordinaten $\binom{u}{v}$



$$[\overrightarrow{ZP'}]_w = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot [\overrightarrow{ZP}]_w$$

$$[\overrightarrow{ZP'}]_w = [P']_w - [Z]_w$$

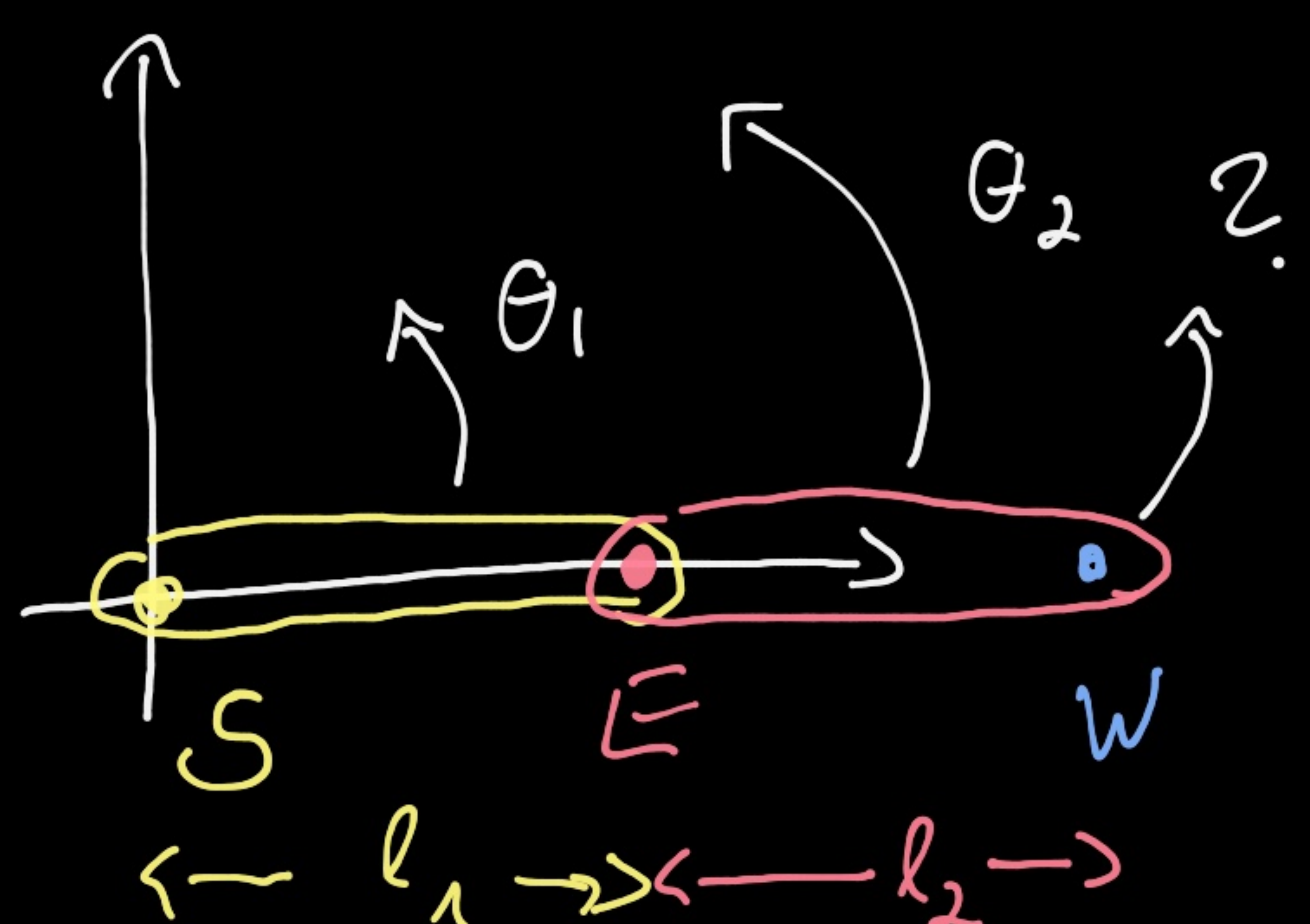
$$[\overrightarrow{ZP}]_w = [P]_w - [Z]_w$$

Drehung gibt Abb. der Koordinatenvektoren von Punkten:

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g([P]_w) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \left([P]_w - [Z]_w\right) + [Z]_w$$

Anwendung:



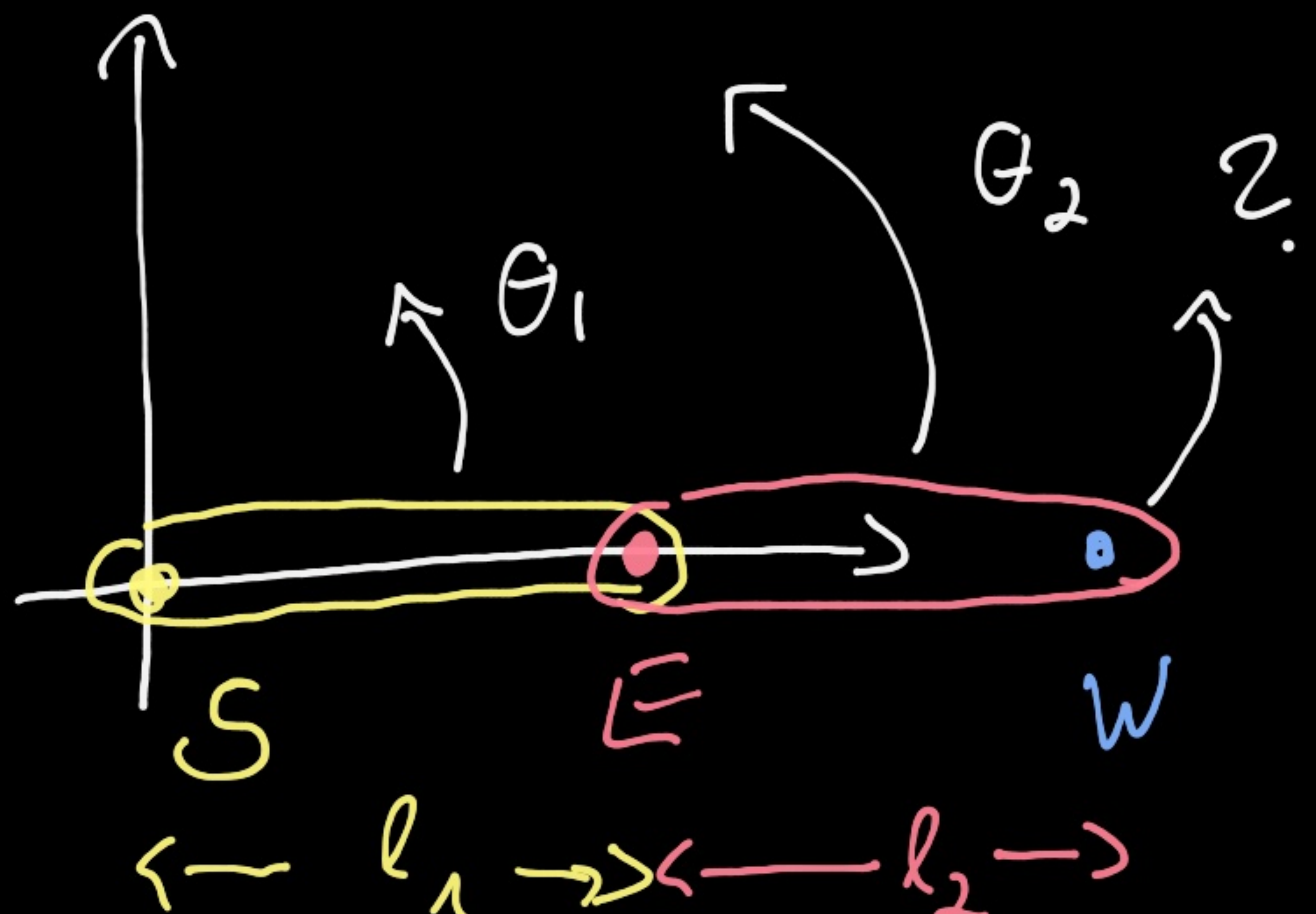
Auswirkung von θ_2 auf W in Koord.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \ell_1+\ell_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ell_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} \ell_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[= \begin{pmatrix} \ell_1 + \ell_2\cos\theta_2 \\ \ell_2\sin\theta_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$[E]_w = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [W]_w = \begin{pmatrix} \ell_1+\ell_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Auswirkung von θ_2 auf W in Koord.

$$\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}l_1+l_2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}l_1\\0\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}l_1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}l_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}l_1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[=\begin{pmatrix}l_1+l_2\cos\theta_2\\ l_2\sin\theta_2\end{pmatrix}\right]$$

$$[E]_w=\begin{pmatrix}l_1\\0\end{pmatrix},\quad [W]_w=\begin{pmatrix}l_1+l_2\\0\end{pmatrix}$$

Auswirkung von θ_1 auf das Resultat

$$\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}l_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}l_1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left(\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}}_{\text{Drehg um }\theta_1}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}}_{\text{Drehg um }\theta_2}\right)\cdot\begin{pmatrix}l_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \vdots\\ \sin\theta_1 & \vdots\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}l_1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}l_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}l_1\cos\theta_1\\ l_1\sin\theta_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}l_1\cos\theta_1+l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ l_1\sin\theta_1+l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}$$

neue Position von W

Frohe Weihnachten
und einen guten Start
in das neue Jahr!

Das nächste Video gibt es am 6.1.2021...