Ergänzungen LA 05

§2 : Vektorräume : Erinnerung an die Rechenregeln :

(1.) $\vec a + (\vec b + \vec c) = (\vec a + \vec b) + \vec c$

~~(2.)~~ $\cancel{\vec a + \vec b = \vec b + \vec a}$

(3.) $\vec 0_V + \vec a = \vec a$

(4.) $\vec a\,' + \vec a = \vec 0_V$

(5.) $r \cdot (\vec a + \vec b) = r \cdot \vec a + r \cdot \vec b$

(6.) $(r + s) \cdot \vec a = r \cdot \vec a + s \cdot \vec a$

(7.) $(r \cdot s) \cdot \vec a = r \cdot (s \cdot \vec a)$

(8.) $1 \cdot \vec a = \vec a$

<u>Übung</u>: Die 2. Rechenregel folgt aus den anderen.

D.h. : Setze (1.), (3.) – (8.) voraus. Dann kann man (2.) zeigen.

Also : Nehme $\vec a, \vec b \in V$ und zeige $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$.

$$(\vec b + \vec a)' + (\vec a + \vec b) \overset{?}{=} \vec 0_V$$

Beh. (α) : $\vec v\,' = (-1) \cdot \vec v$

Dann $(\vec b + \vec a)' + (\vec a + \vec b) \overset{(\alpha)}{=} (-1) \cdot (\vec b + \vec a) + (\vec a + \vec b) \overset{(5.)}{=} ((-1) \cdot \vec b + (-1) \cdot \vec a) + (\vec a + \vec b)$

$\overset{(\alpha)}{=} (\vec b\,' + \vec a\,') + (\vec a + \vec b) \overset{(1.)}{=} \vec b\,' + (\vec a\,' + (\vec a + \vec b)) \overset{(1.)}{=} \vec b\,' + ((\vec a\,' + \vec a) + \vec b)$

$\overset{(4.)}{=} \vec b\,' + (\vec 0_V + \vec b) \overset{(3.)}{=} \vec b\,' + \vec b \overset{(4.)}{=} \vec 0_V$

Tatsächlich $(\vec b + \vec a)' + (\vec a + \vec b) = \vec 0_V$ bzw. (α) : $(-1) \cdot (\vec b + \vec a) + (\vec a + \vec b) = \vec 0_V$

Daher $\underbrace{1 \cdot (\vec b + \vec a)}_{\overset{(8)}{=} \vec b + \vec a} + (-1) \cdot (\vec b + \vec a) + (\vec a + \vec b) = \vec b + \vec a$

Wg. (6.) gilt $\underbrace{(-1 + 1)}_{= 0} \cdot (\vec b + \vec a) + (\vec a + \vec b) = \vec b + \vec a$

Ergänzungen LA 05

§2 : Vektorräume : Erinnerung an die Rechenregeln :

(1.) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

~~(2.)~~ $\cancel{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$

(3.) $\vec{0}_V + \vec{a} = \vec{a}$

(4.) $\vec{a}\,' + \vec{a} = \vec{0}_V$

(5.) $r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

(6.) $(r+s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$

(7.) $(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$

(8.) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Übung : Die 2. Rechenregel folgt aus den anderen.

D.h. : Setze (1.), (3.) – (8.) voraus. Dann kann man (2.) zeigen.

Also : Nehme $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und zeige $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Beh. (α) : $\vec{v}\,' = (-1) \cdot \vec{v}$

Bisher : $\vec{b} + \vec{a} = (-1+1) \cdot (\vec{b} + \vec{a}) + (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \cdot (\vec{b} + \vec{a}) + (\vec{a} + \vec{b})$ ✓

$\overset{(\beta)}{=} \vec{0}_V + (\vec{a} + \vec{b}) \overset{(3.)}{=} \vec{a} + \vec{b}$

Beh. (β) : $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}_V$

zur Beh. (α) $\quad (-1) \cdot \vec{v} + \vec{v} \overset{?}{=} \vec{0}_V$

$(-1) \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{v} \overset{(6.)}{=} (-1+1) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} \overset{(\beta)}{=} \vec{0}_V$

Dann : $(-1) \cdot \vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$, also $(-1) \cdot \vec{v} + \underbrace{\vec{v} + \vec{v}\,'}_{\overset{(\gamma)}{=} \vec{0}_V} = \vec{v}\,'$

$(-1) \cdot \vec{v} \overset{!}{=}$

Beh. (γ) $\quad \vec{v} + \vec{v}\,' = \vec{0}_V$ und $\vec{v} + \vec{0}_V = \vec{v}$

Beh. (β) : $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}_V$ ✓

Beh. (γ) : $\vec{v} + \vec{0}_V = \vec{v}$ ✓ und $\vec{v} + \vec{v}\,' = \vec{0}_V$ ✓

- $\vec{v}\,' = \vec{0}_V + \vec{v}\,' = (\vec{v}\,' + \vec{v}) + \vec{v}\,'$, also

  $\vec{0}_V = (\vec{v}\,')' + \vec{v}\,' = (\vec{v}\,')' + \vec{v}\,' + \vec{v} + \vec{v}\,' = \vec{0}_V + \vec{v} + \vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{v}\,'$

- $\vec{v} = \vec{0}_V + \vec{v} \overset{\text{s.o.}}{=} (\vec{v} + \vec{v}\,') + \vec{v} = \vec{v} + (\vec{v}\,' + \vec{v}) = \vec{v} + \vec{0}_V$

- $\vec{v} = (1 + 0) \cdot \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}$, also

  $\vec{0}_V = \vec{v}\,' + \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}_V + 0 \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v}$ $\square$

Hausaufgabe LA05A:

(1.) Zeige $(\vec{v}\,')' = \vec{v}$

(2.) Erfüllt $\vec{n} \in V$ die Gleichung $\vec{n} + \vec{v} = \vec{v}$ für alle $\vec{v}$ erfüllt,
so gilt $\vec{n} = \vec{0}_V$.

"ein $\vec{v}$" reicht aus.

Ein seltsamer Körper:

$\mathbb{Q}$ = Körper der rationalen Zahlen (Brüche)

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d.h. es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. (s. gleich)

Setze $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ r + s \cdot \sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q} \}$ $(\subseteq \mathbb{R})$

lies: "$\mathbb{Q}$ adjungiert $\sqrt{2}$" $\rightsquigarrow$ Algebra im 3. Semester

Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$:

$$(r_1 + s_1 \cdot \sqrt{2}) + (r_2 + s_2 \cdot \sqrt{2}) = (r_1 + r_2) + (s_1 + s_2) \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$(r_1 + s_1 \sqrt{2}) \cdot (r_2 + s_2 \sqrt{2}) = r_1 r_2 + 2 s_1 s_2 + (r_1 s_2 + r_2 s_1) \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Zum Nachweis, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Körper ist, brauche noch neutrale Elemente: $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Existenz von inversen Elementen: $-(r + s\sqrt{2}) = (-r) + (-s)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$r + s\sqrt{2} \neq 0: \quad \frac{1}{r + s\sqrt{2}} \underset{\uparrow}{=} \frac{r - s\sqrt{2}}{(r + s\sqrt{2})(r - s\sqrt{2})} = \frac{r - s\sqrt{2}}{r^2 - 2s^2} = \frac{r}{r^2 - 2s^2} + \frac{-s}{r^2 - 2s^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$r - s\sqrt{2} \neq 0$,

denn $r - s\sqrt{2} = 0$ liefert $s = 0 = r$

oder $s \neq 0$ und $\sqrt{2} = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ $\leftarrow$ das geht nicht!

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q} \}$ ist ein "Unterkörper" von $\mathbb{R}$, der seinerseits $\mathbb{Q}$ als Unterkörper enthält.

__Def.:__ Ist $\mathbb{L}$ ein Körper und $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Teilmenge, so heißt $\mathbb{K}$ Unterkörper von $\mathbb{L}$, falls gilt:

- $0, 1 \in \mathbb{K}$
- $x - y \in \mathbb{K}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$
- $x \cdot y^{-1} \in \mathbb{K}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$, $y \neq 0$.

__Notiz:__ Jeder Unterkörper ist ein Körper.

__Satz__ Sei $\mathbb{K}$ ein Unterkörper des Körpers $\mathbb{L}$ (Verkn. $+, \cdot$). Dann ist $\mathbb{L}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$x \oplus y = x + y \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{L}$$
$$r \odot y = r \cdot y \qquad \text{für } r \in \mathbb{K},\ y \in \mathbb{L}$$

Nachweis: selber sehen ....

Beh.: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: (durch Widerspruch)

Angenommen, die Behauptung ist falsch. ⟸ einzig mögliche Fehlerquelle !

Dann lässt sich $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n natürliche Zahlen, als vollständig gekürzter Bruch schreiben.

Quadrieren zeigt $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$ bzw. $m^2 = 2n^2$.

Also ist m grade, d.h. $m = 2 \cdot k$ mit einer natürlichen Zahl k. Einsetzen zeigt

$$4k^2 = (2k)^2 = 2n^2 \quad \text{bzw.} \quad n^2 = 2k^2,$$

d.h. n ist grade. Also haben m und n den gemeinsamen Teiler 2 – im Widerspruch zur Voraussetzung "$\frac{m}{n}$ ist vollständig gekürzt."

↯ Widerspruch

Die Annahme muss daher falsch sein.

Die Behauptung muss folglich wahr sein.

Ein weiteres Beweisverfahren:

Beweis durch Kontraposition

Eine Aussage ist ein sprachliches Konstrukt, das entweder wahr oder falsch ist.

A	$\neg A$
W	F
F	W

z.B. A: $3 = 2$ ist falsch

$\neg(3 = 2)$ ist wahr

"$\neg$" : logisches "nicht".

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	F

"$\wedge$" : logisches "und"

"$\vee$" : logisches "oder"

$2 = 3 \wedge 3 = 3$ ist falsch

$2 = 3 \vee 3 = 3$ ist wahr

"Implikation" $\Rightarrow$

$A \Rightarrow B$: lies "wenn A, dann B"

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

z.B.: $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$

$x = 2$: $2 > 0 \Rightarrow 2^2 = 4 > 0$ wahr

$x = 0$: $0 > 0 \Rightarrow 0^2 = 0 > 0$ wahr

$x = -3$: $-3 > 0 \Rightarrow (-3)^2 = 9 > 0$ wahr

Sind A und $A \Rightarrow B$ wahr, so ist auch B wahr.

Kleine Beispiele:

- $x = y \Rightarrow x+1 = y+1$ ist sicher eine zulässige Folgerung.

z.B. $1 = 2 \Rightarrow 2 = 3$ "$F \Rightarrow F$"

$3 = 3 \Rightarrow 4 = 4$ "$W \Rightarrow W$"

- $x = y \Rightarrow y = x$ (1.)

$(x = y \wedge u = v) \Rightarrow x+u = y+v$ (2)

$1 = 2 \Rightarrow 2 = 1$ "$F \Rightarrow F$"

$(1 = 2 \wedge 2 = 1) \Rightarrow 3 = 3$ "$F \Rightarrow W$"

Äquivalenz. $A \Leftrightarrow B$

"genau dann, wenn"

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Beh.: $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind logisch gleichwertig

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A$	$\neg B$
W	W	W	W	F	F
W	F	F	F	F	W
F	W	W	W	W	F
F	F	W	W	W	W

✓

Beispiel: Wir möchten für jede natürliche Zahl a zeigen:

Ist a^2 ungerade, so ist auch a ungerade.

Übersetzung mit logischen Symbolen: a^2 ungerade $\Rightarrow$ a ungerade (*)

Kontraposition: $\neg$(a ungerade) $\Rightarrow$ $\neg$(a^2 ungerade)

Interpretation: a gerade $\Rightarrow$ a^2 gerade (**)

(*) und (**) sind äquivalente Aussagen.

Zeige a gerade $\Rightarrow$ a^2 gerade (und damit die Beh.)

a gerade $\Rightarrow$ $a = 2m$ für ein passendes m

$\Rightarrow$ $a^2 = 4m^2 = 2\cdot(2m^2)$ ist gerade $\blacksquare$

Quantoren: $E(x)$ Aussage, die von x abhängt.

$\forall x: E(x)$ für jedes x ist $E(x)$ wahr

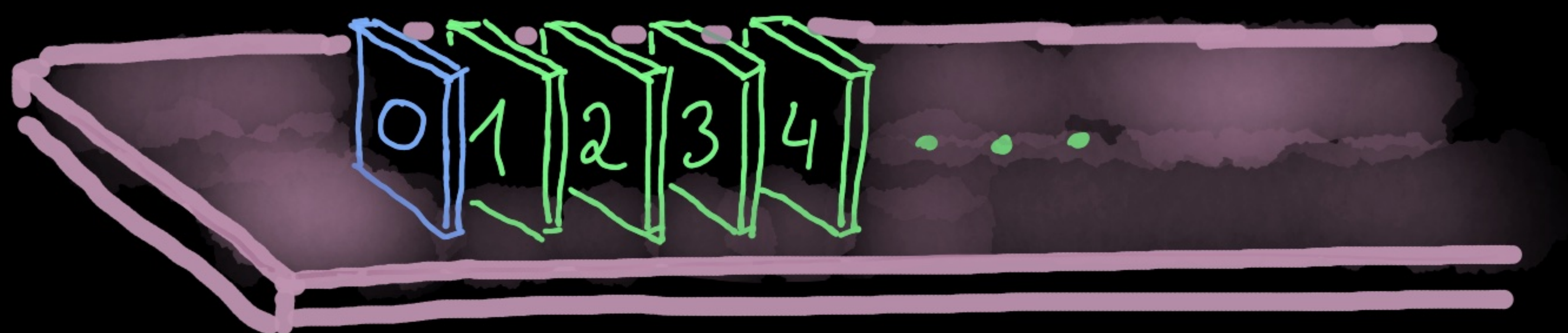
$\exists x: E(x)$ es gibt ein x, für das $E(x)$ wahr ist.

Bsp: $\forall x: (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$ oder $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$

$\exists x: (x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 2)$ oder $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 2$

Das Prinzip der vollständigen Induktion

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen.



(1.) Stein 0 fällt.

(2.) Wenn Stein n fällt, dann Stein $n+1$ fallen.

Sei $X \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften

(1.) $0 \in X$

(2.) $\forall n \in \mathbb{N} : (\ n \in X \Rightarrow n+1 \in X)$

Dann gilt bereits $X = \mathbb{N}$.

Beweisprinzip: $E(n)$ sei eine von n abhänge Aussage.

Ziel: Nachweis von $\forall n \in \mathbb{N} : E(n)$

Setze $X = \{ n \in \mathbb{N} \mid E(n) \text{ wahr} \}$

Zeige
- $0 \in X$
- $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$

Dann: $X = \mathbb{N}$

Induktions Anfang.

$E(0)$ ist wahr

$E(n)$ wahr $\Rightarrow E(n+1)$ wahr

Induktions Schritt

$E(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr

<u>Beispiel</u> Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad \leftarrow E(n)$$

Notiz: $1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ Gaußsche Summenformel

Beweis durch vollständige Induktion

IA $(n=1)$ $\quad 1^3 = 1^2$ stimmt $\quad$ E(1) ist wahr

IS $(n \to n+1)$ $\quad$ Induktions Voraussetzung

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2 \text{ für ein bestimmtes } n$$

zu zeigen $\quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (1+2+\dots+n+(n+1))^2$

Dazu: $\bullet$

$$\underline{1^3+2^3+\dots+n^3} + (n+1)^3 \overset{IV}{=} (1+2+\dots+n)^2 + (n+1)^3$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \left(\frac{1}{2} n (n+1)\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{1}{4} n^2 + n + 1\right) \cdot \underline{(n+1)^2}$$

$\bullet$

$$(1+2+\dots+n+(n+1))^2 \overset{\text{Gauß}}{=} \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \underline{(n+1)^2} (n+2)^2 \quad \checkmark$$

Zeige: diese beiden Terme sind gleich

$E(n) \Rightarrow E(n+1)$ fertig.

$$\frac{1}{4} n^2 + n + 1 = \frac{1}{4}(n+2)^2$$

$$= \frac{1}{4}(n^2 + 4n + 4) \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 100^3 = (1 + \dots + 100)^2$$

$$= 5050^2 = 25\,000\,000 + 500\,000 + 2500$$

$$= 25.502.500.$$

Hausaufgabe LA 05B

(a) Zeige, dass $7^{(2n)} - 2^n$ sich für jedes $n \geq 1$ ohne Rest durch 47 teilen lässt.
(Vollständige Induktion)

(b) Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt
(Beweis durch Widerspruch)

Hinweis: • Google

• $p_1, \ldots, p_n \rightsquigarrow p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$