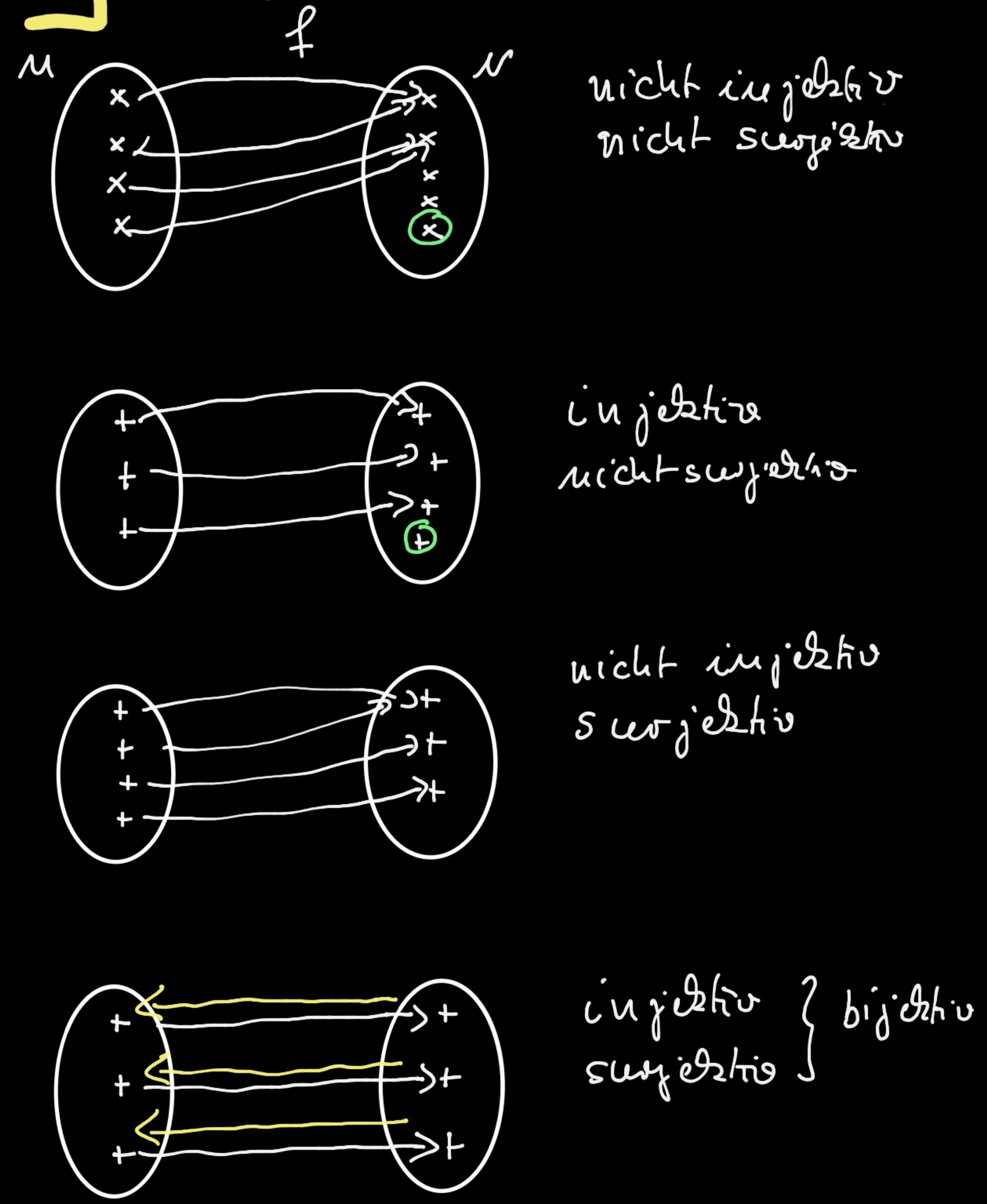
Bijektive Abbildungen

$f: M \to N$ Abbildung

f injektiv, falls für $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.
Bzw. aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$

f surjektiv, falls es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$

f bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv



Die durch $\mathrm{id}_M(x) = x$ definierte Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ heißt die Identität (der Menge M).

3.6 Satz Vorgelegt ist eine Abbildung $f: M \to N$. Dann ist f genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g: N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gibt.

In diesem Fall nennt man g die Umkehrabbildung von f oder die zu f inverse Abbildung und schreibt $g = f^{-1}$

$g \circ f = \mathrm{id}_M$ bedeutet: $(g \circ f)(x) = \mathrm{id}_M(x)$ (für alle x)

$$g(f(x)) = x \qquad (\text{vgl. } (\sqrt{x})^2 = x)$$

$f \circ g = \mathrm{id}_N$ bedeutet $f(g(y)) = y$ (für alle $y \in N$)

Merke: $$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$$

Beispiel:

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
ist nicht injektiv ($f(3) = 9 = f(-3)$), nicht surjektiv ($-2 \neq x^2$)

(b) $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
ist injektiv ($y = f(x) = x^2,\ x \geq 0 \rightsquigarrow x = \sqrt{y}$), nicht surjektiv.

(c) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$
ist nicht injektiv, surjektiv ($0 \leq y = f(\sqrt{y})$)

(d) $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$
ist bijektiv mit Umkehrabb. $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Ist $f: M \to N$ eine Abb. und $U \subseteq M$,
so schreibe $f|_U : U \to N$, $f|_U(x) = f(x)$ für $\underline{\underline{x \in U}}$
"Einschränkung von f auf U".

Beweis von 3.6:

- Gibt es $g: N \to M$ mit $g(f(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$, so ist f bijektiv; also surjektiv & injektiv.

  surjektiv: Ist $y \in N$, so setze $x = g(y)$.
  Dann gilt: $f(x) = f(g(y)) \underset{\text{Vor.}}{=} y$.

  injektiv: Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so gilt
  $x_1 \underset{\text{Vor.}}{=} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \underset{\text{Vor.}}{=} x_2$

- Ist f bijektiv, so definiere $g: N \to M$ per $g(y) = x$ mit dem eind. best. $x \in M$ mit $f(x) = y$
  Dann $f(g(y)) = y$ und $g(f(x)) = x$ ∎

Bem.: (1.) $f: M \to N$ bijektiv. Dann: $f^{-1}: N \to M$ bijektiv und $(f^{-1})^{-1} = f$ (denn $f \circ f^{-1} = id_N$, $f^{-1} \circ f = id_M$)

(2.) f^{-1} ist durch f eindeutig bestimmt ✓

3.7 Satz Vorgelegt sind $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W und eine lineare Abbildung $f: V \to W$. Dann gilt:

(a) f ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{im}(f) = f(V) = W$ gilt.

(b) f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{\vec{0}_V\}$ gilt.

(c) Ist f bijektiv, so ist $f^{-1}: W \to V$ linear.

Beweis: (a) $\operatorname{im}(f) = \{ f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$ ✓

(b) $\ker f = \{ \vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W \}$ $\quad (= \{\vec{0}\})$

f injektiv: Dann $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ und mehr $\vec{x} \in V$ mit $f(\vec{x}) = \vec{0}_W$ kann es nicht geben: $\ker f = \{\vec{0}_V\}$

$\ker f = \{\vec{0}_V\}$: $\quad \underline{f(\vec{u}) = f(\vec{v})} \rightsquigarrow \vec{0}_W = f(\vec{u}) - f(\vec{v}) \overset{f \text{ linear}}{=} f(\vec{u} - \vec{v})$

Also: $\vec{u} - \vec{v} \in \ker(f) = \{\vec{0}_V\}$, d.h. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}_V$,

also: $\underline{\vec{u} = \vec{v}}$ $\rightsquigarrow$ f ist injektiv.

(c) $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$: $\quad f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) = f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, liefert

$f^{-1}(f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)) = f^{-1}(f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Mit $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$ und $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$ erhalte $\quad f^{-1}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = f^{-1}(\vec{w}_1) + f^{-1}(\vec{w}_2)$

$\vec{v}_1 = f^{-1}(\vec{w}_1) \quad \vec{v}_2 = f^{-1}(\vec{w}_2)$

$f^{-1}(r \cdot \vec{w}) = r \cdot f^{-1}(\vec{w})$: ähnlich ... ∎

$M \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\quad f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

$$A = (\underline{a}_1 \; \dots \; \underline{a}_n)$$

- Wann ist f surjektiv?

$\mathbb{K}^m = f(\mathbb{K}^n) = \{ A \cdot \underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{K}^n \}$, d.h.

zu $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$ gibt es ein $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$,

d.h. das LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ besitzt für <u>jede</u> rechte Seite eine Lösung $\underline{x}$.

<u>Bsp</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & b_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - b_1 \end{array}\right)$$

nur lösbar für $b_1 = b_2$, also $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist nicht surjektiv.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ -1 & 1 & 2 & b_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathrm{I} \;\; :2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} b_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} b_2 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ist surjektiv

$M \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\quad f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\quad f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

$$A = (\underline{a}_1 \; \dots \; \underline{a}_n)$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}^{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$; Lsg per Gauß :

ist surjektiv

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ -1 & 1 & 2 & b_2 \end{array}\right) \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} b_2 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2 \\ \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \end{array}\right)$$ und $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Ökonomischer:
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Leftarrow (*)$$

$f(\underline{x}) = b_1 \cdot \underline{e}_1 + b_2 \, \underline{e}_2$. Ist $f(\underline{u}_1) = \underline{e}_1$ und $f(\underline{u}_2) = \underline{e}_2$,
so gilt $f(b_1 \cdot \underline{u}_1 + b_2 \cdot \underline{u}_2) = b_1 \cdot f(\underline{u}_1) + b_2 \cdot f(\underline{u}_2) = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \cdot \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
d.h. $(*)$ reicht, um nachzuweisen, dass $f(\underline{x}) = \underline{b}$ f. alle $\underline{b}$ lösbar.

Lösen von $$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | \\ | & | \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

übersetzt in lineare Abb : $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$

Kochrezept zur Überprüfung der Surjektivität einer durch eine Matrix gegebenen Abb. $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

Löse die Matrixgleichung $A \cdot X = E$

mit $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times m}$ Einheitsmatrix

und $X \in \mathbb{K}^{n \times m}$ gesuchte Matrix

(dazu löse per Gauß; Schema $A \mid E \rightsquigarrow$)

Dann gilt für jedes $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$: $A \cdot (X \cdot \underline{b}) = E \cdot \underline{b} = \underline{b}$

d.h. $\underline{x} = X \cdot \underline{b}$ ist Lösung von $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -\mathrm{I}-\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot I \\ -I-II \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

(a) $A \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ hat Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{b} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

z.B. $A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

(d) $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ ist surjektiv.

Fazit: Für $A = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(1.) Die lineare Abb. $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(\underline{x}) = A \cdot x$ ist surjektiv

(2.) Das LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ hat für jedes $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$ eine Lösung $\underline{x}$.

(3.) Die Matrixgleichung $A \cdot X = E$ besitzt eine Lösung $X \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

(4.) Die Spalten von A bilden ein Erzeugenden-system von $\mathbb{K}^m$: $\mathbb{K}^m = \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$.

zu (4.) Das bedeutet ja genau, dass $A \cdot \underline{x} = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}$ für jedes $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$ lösbar ist.

$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Gleichwertig: (1.) f ist injektiv

(2.) $\ker f = \{ \underline{0} \}$

(3.) $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ hat nur die Lösung $\underline{x} = 0$.

<u>Bsp</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(\underline{x}) = A \cdot x$ <u>nicht</u> injektiv

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \checkmark$$

z. B. $A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\neq \underline{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aussage: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $n \gneq m \rightsquigarrow f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ nicht injektiv

$A|0 \rightsquigarrow$ Stufenform

<u>Bsp</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: $A|0 \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ nur für $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ ist injektiv.

Spoiler: $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ kann höchstens für $n = m$ bijektiv sein – für $n \neq m$ nicht!

Vorgelegt $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ bijektiv (mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, also Zeilenzahl = Spaltenzahl, A quadratische Matrix)

Dann $f^{-1}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist linear, es gibt $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $f^{-1}(\underline{y}) = B \cdot \underline{y}$

Dann: $A \cdot B = E$ und $B \cdot A = E$

$\left(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} = \underline{x} = f^{-1}(f(\underline{x})) = \underline{\underline{B\,A}} \cdot \underline{x} \text{ für alle } \underline{x} \right)$

Umgekehrt: Ist $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $A \cdot B = E$, $B \cdot A = E$, dann ist f bijektiv mit $f^{-1}(\underline{y}) = B \cdot \underline{y}$

Spoiler: Reicht für $(n \times n)$-Matrix A aus: Es gibt $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $A \cdot B = E$, dann $B \cdot A = E$ automatisch. (Name: $B = \underline{\underline{A^{-1}}}$) inverse Matrix

zum Berechnen Gauß $A \mid E \rightsquigarrow E \mid B = A^{-1}$

Notiz: $U, V \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $U \cdot \underline{x} = V \cdot \underline{x}$ für alle $\underline{x}$

k-te Spalten $U \cdot \underline{e_k} = V \cdot \underline{e_k}$ stimmen überein; also $U = V$.

Zusammenfassung: $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (gleiches n!)

gegeben durch Matrix A, also $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$.

Zur Überprüfung der Bijektivität von f setze an:

$$A \mid E \underset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} E \mid B$$

Klappt? $\longrightarrow$ Nein: f ist nicht bijektiv

$\hookrightarrow$ Ja: f ist bijektiv

und $f^{-1}(\underline{y}) = B \cdot \underline{y}$

Schreibe dann $A^{-1} = B$ die zu A inverse Matrix.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ bijektiv?

A quadratisch ✓

Ansatz $A \mid E$

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ -3 \cdot \mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} +\mathrm{II} \\ :(-2) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}$$

f ist bijektiv

$$f^{-1}(\underline{x}) = A^{-1} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$$

Hausaufgabe

(a) Überprüfe für die folgenden linearen Abbildungen $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$, ob f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Bestimme ggf. A^{-1} (bzw. f^{-1}).

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

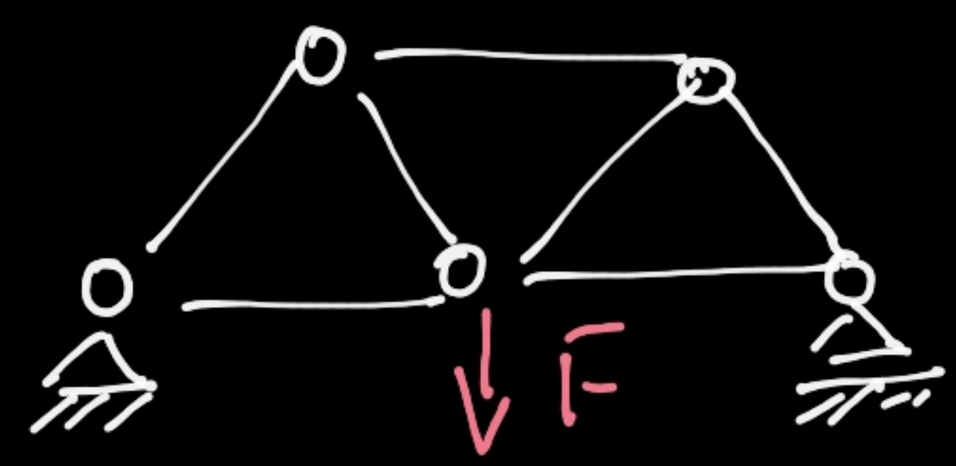
(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

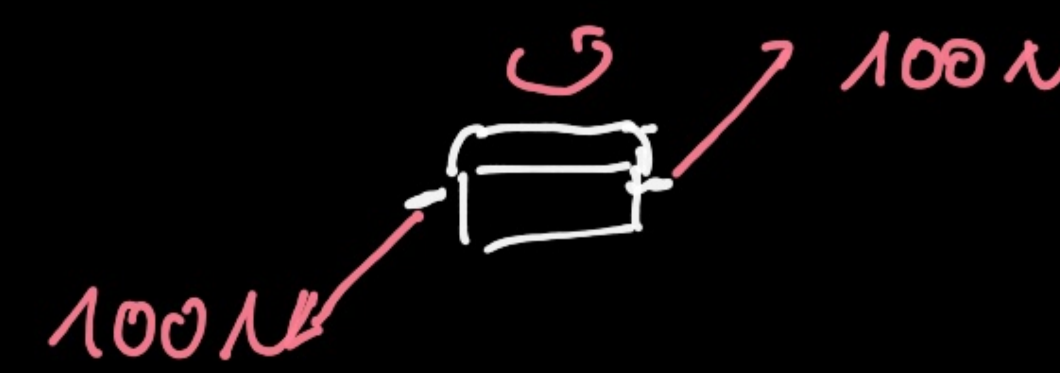
(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Zeige: Gibt es zu $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ mit $B \cdot A = E_n$, so ist die durch $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ definierte Abbildung injektiv. Ist B durch $B \cdot A = E$ dann eindeutig bestimmt?

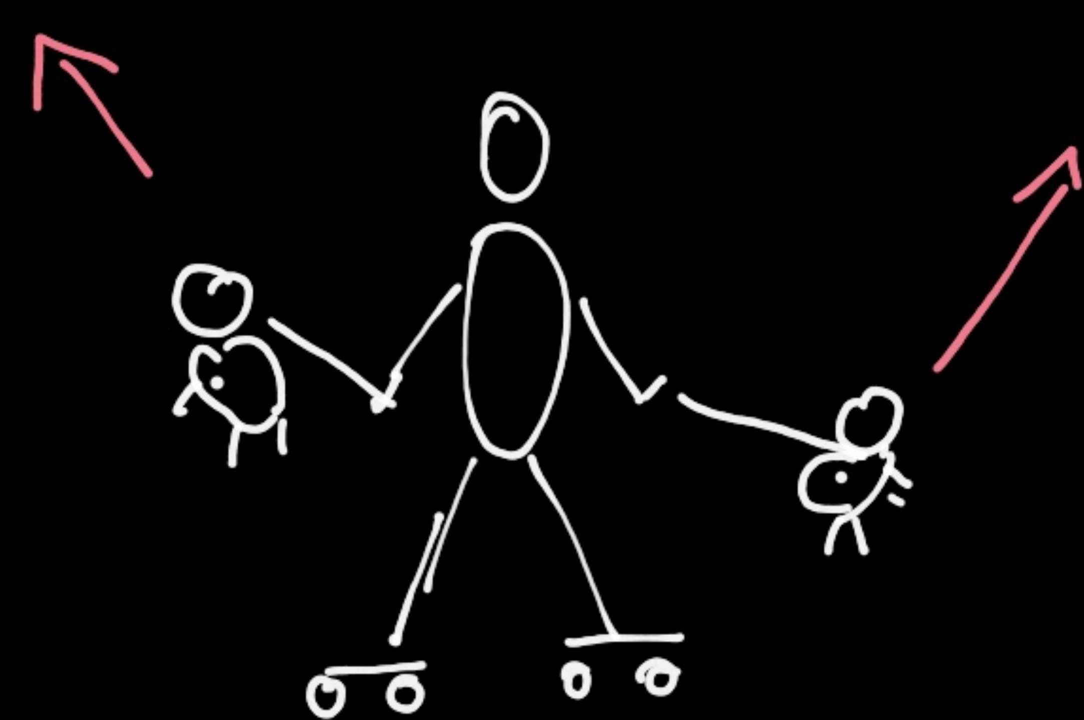
Übung: Statik

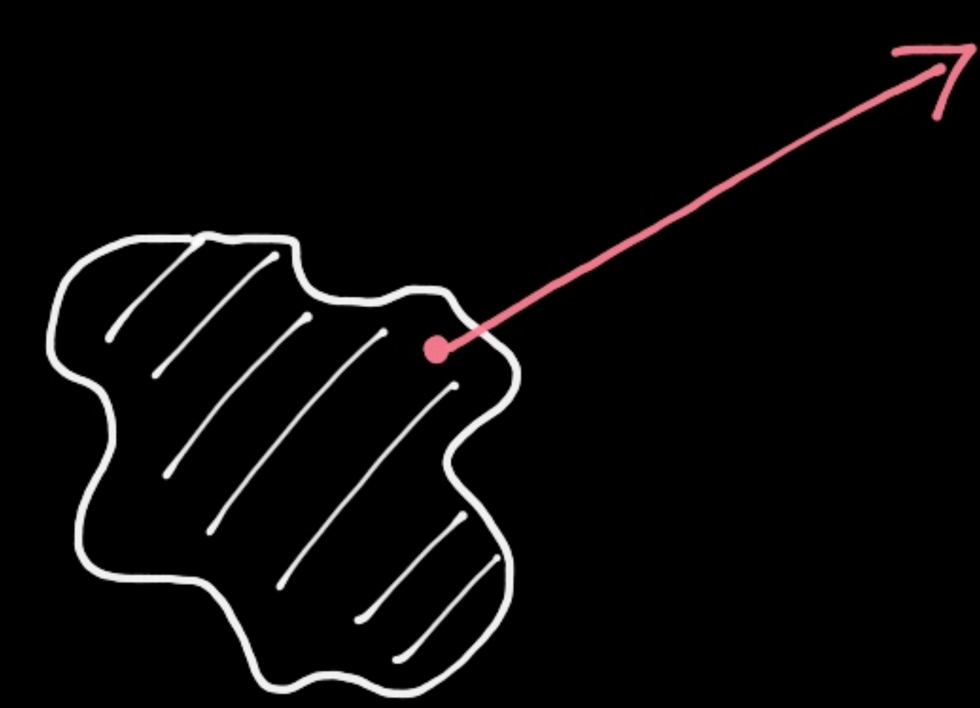
Brücke (Fachwerk)





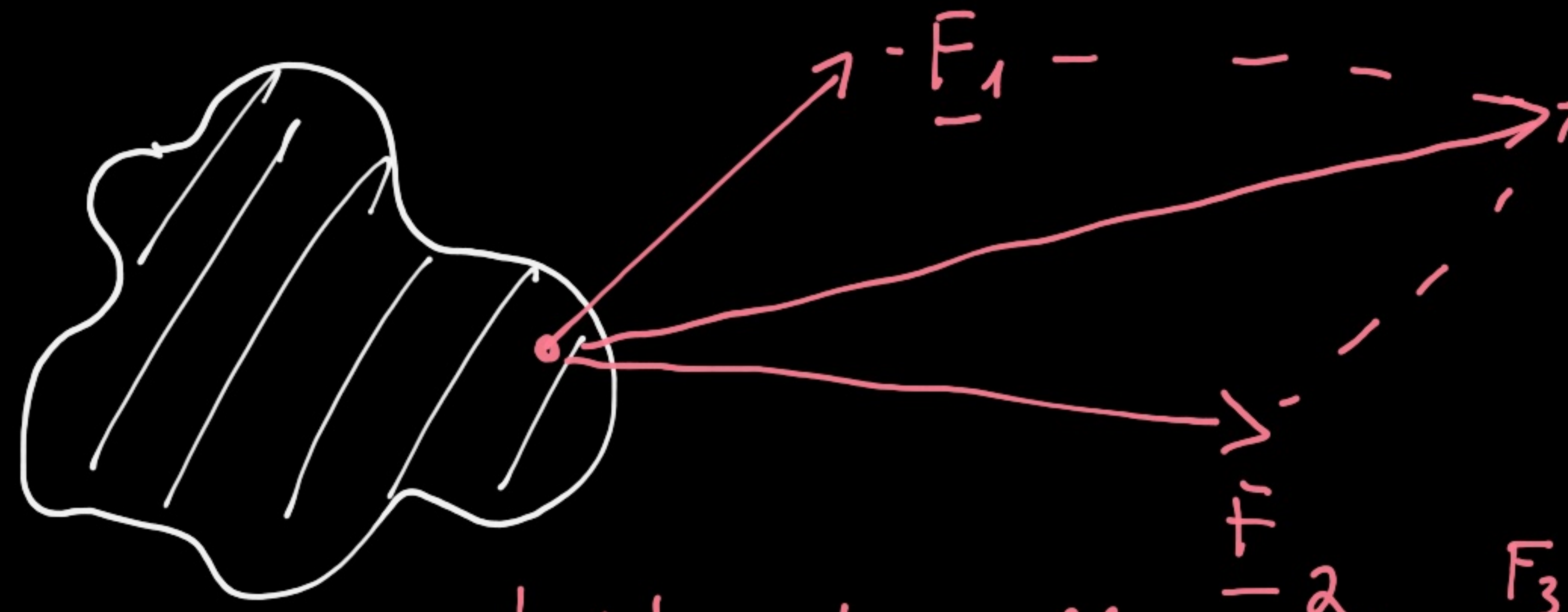
<u>Kräfte</u>





Kraft:
Richtung
und Betrag
↑
in Newton

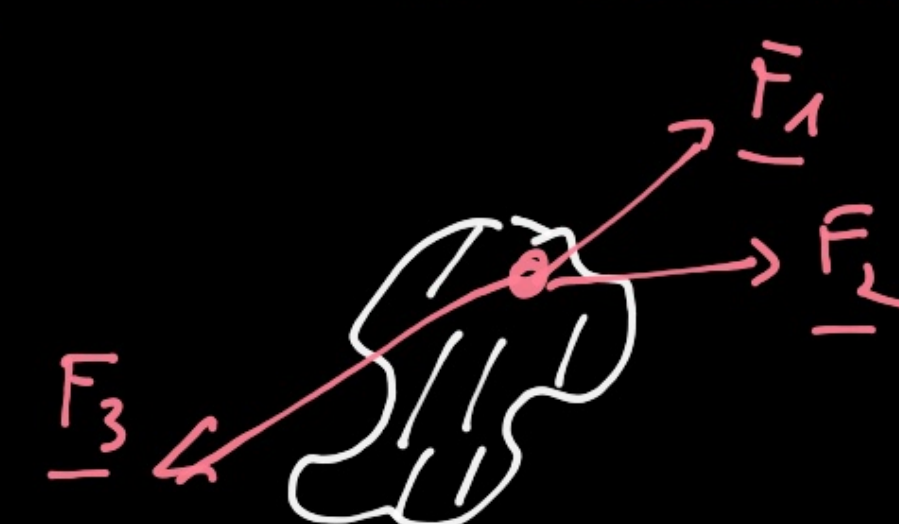
"starrer Körper"



$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$

"resultierende Kraft"

gleicher Angriffspunkt

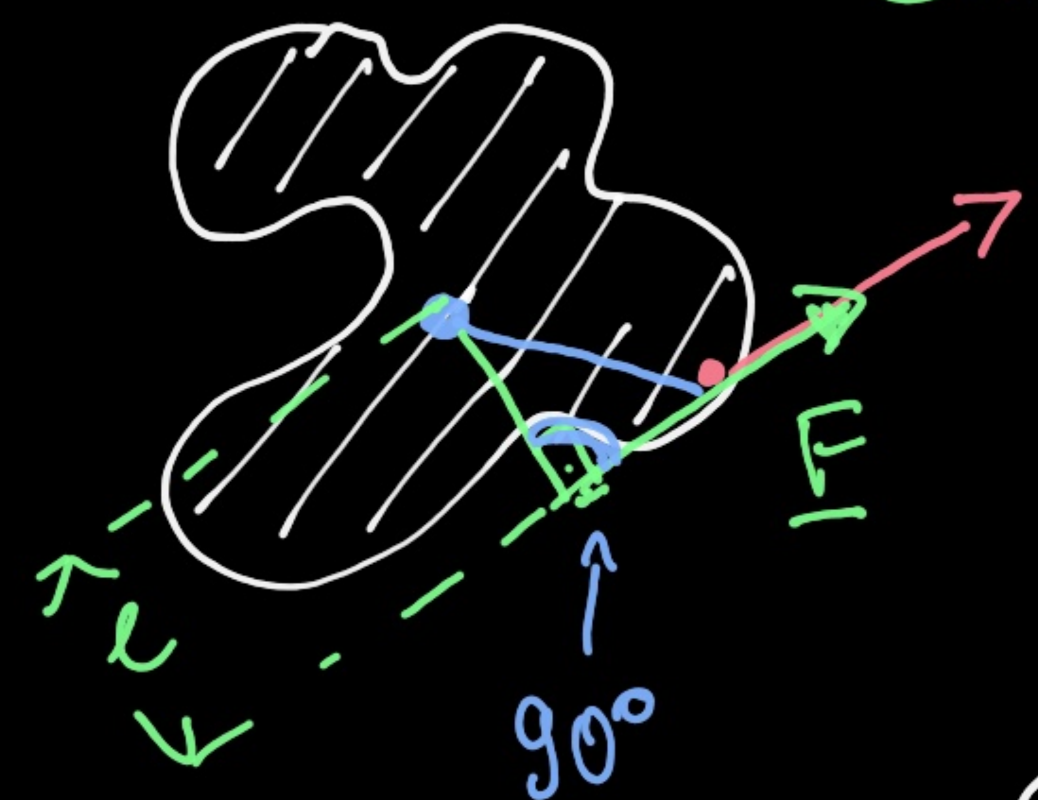


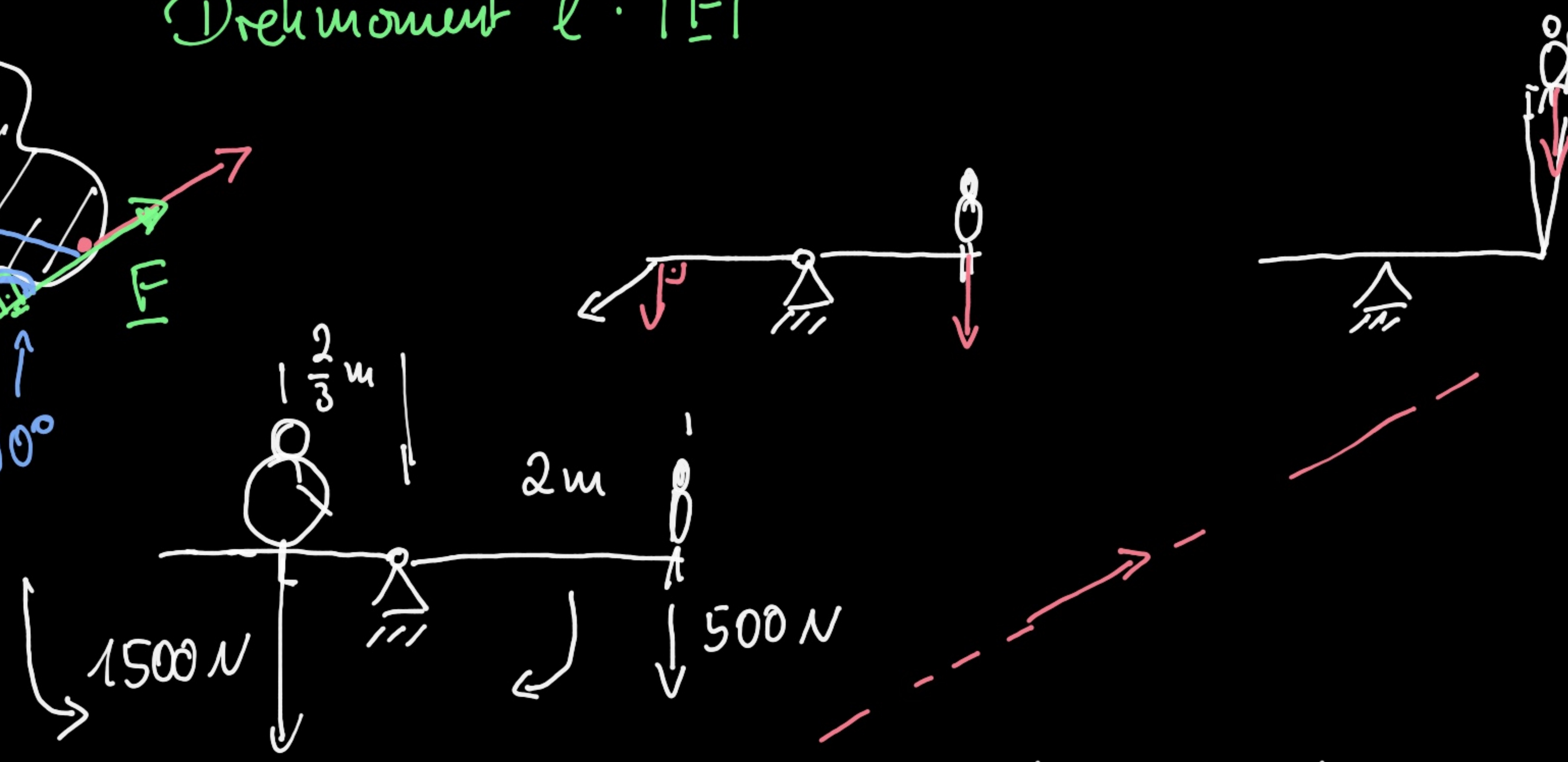
$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \underline{0}$

"Kräftegleichgewicht"

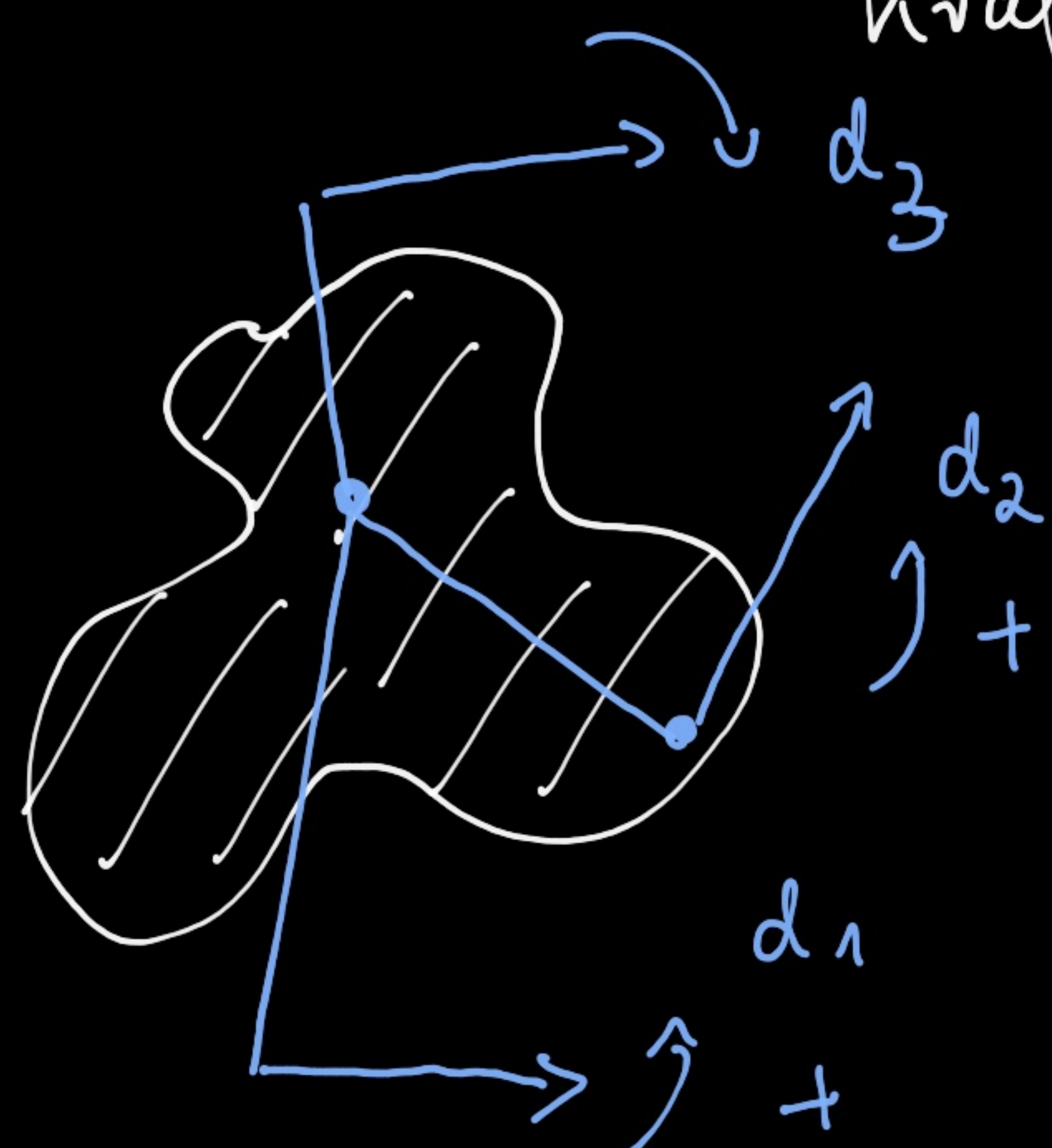
Das Drehmoment

Drehmoment $l \cdot |F|$



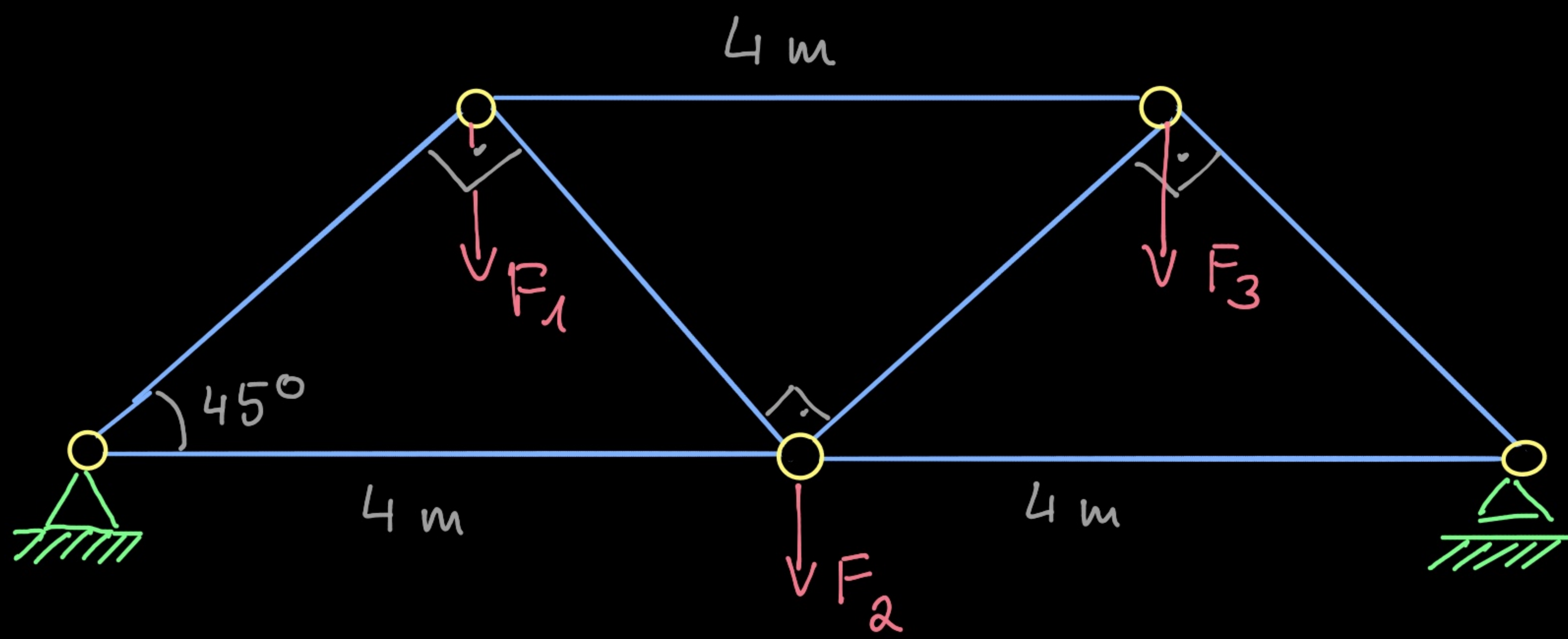


Kraft × Kraftarm = Last × Lastarm



$$d_3 \stackrel{?}{=} d_1 + d_2$$

FACH-WERK



"Stab" : gewichtslos

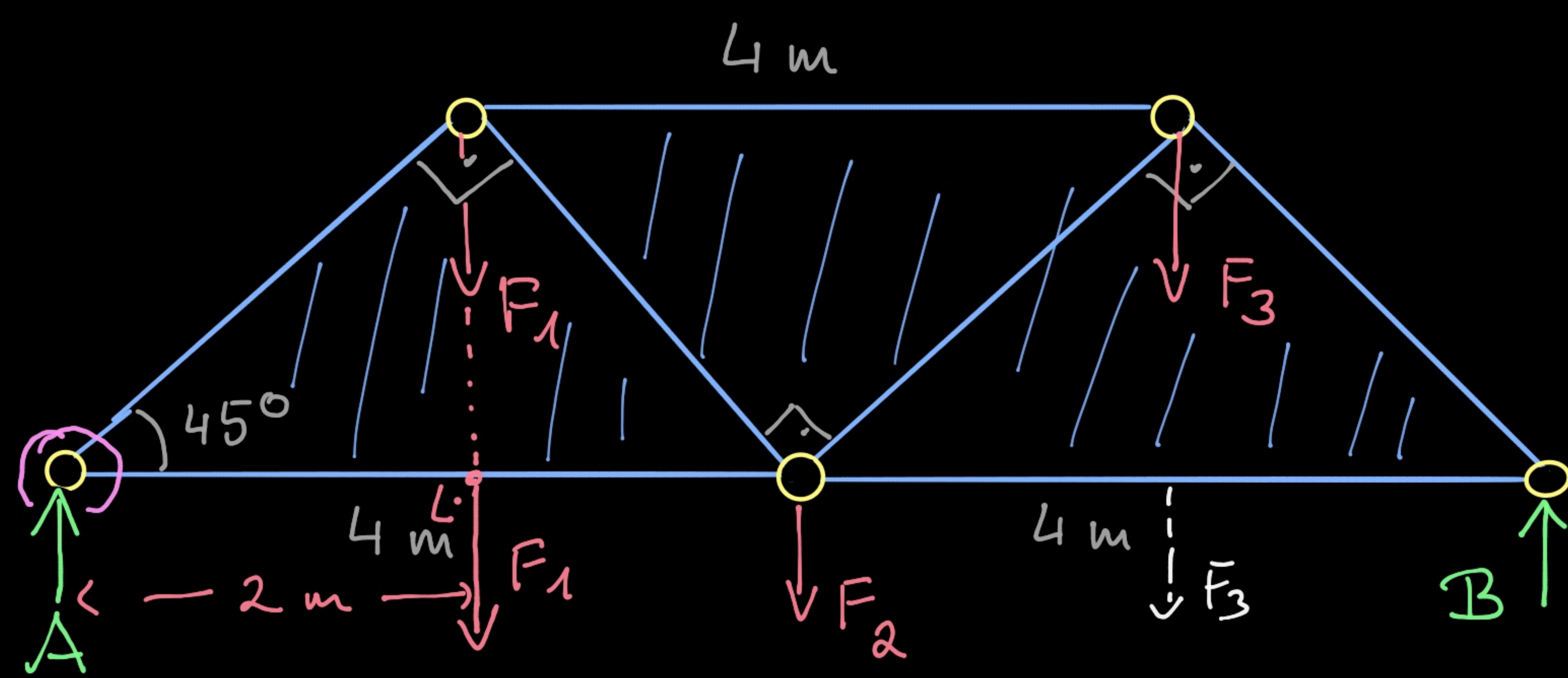
o "Knoten" : reibungsfreies Drehgelenk

Festlager

Loslager

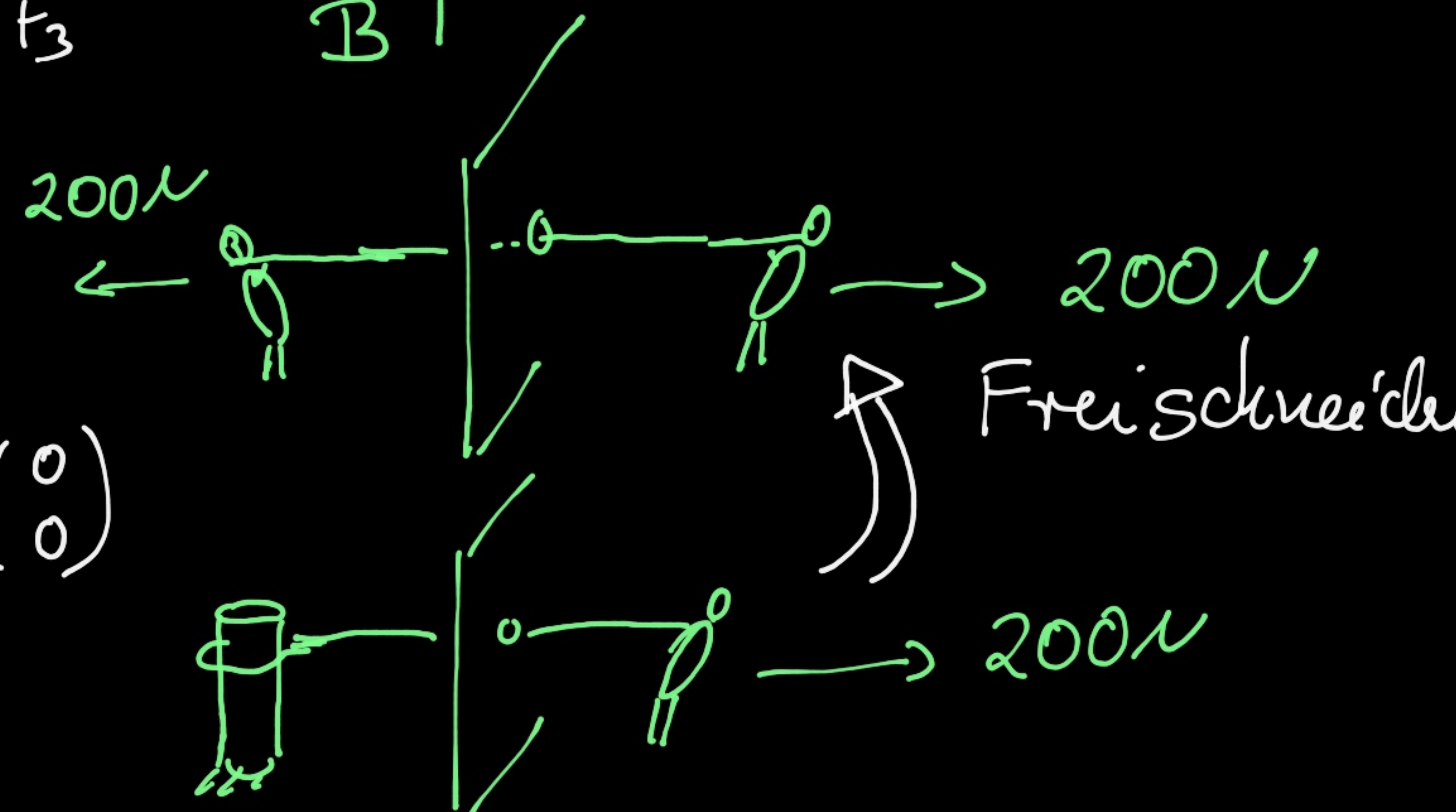
Kräfte greifen nur an den Knoten an (Vereinbarung)

FREI-SCHNEIDEN



$$A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+B\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$+F_1\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+F_2\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+F_3\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$A+B=F_1+F_2+F_3 \quad (*)$$



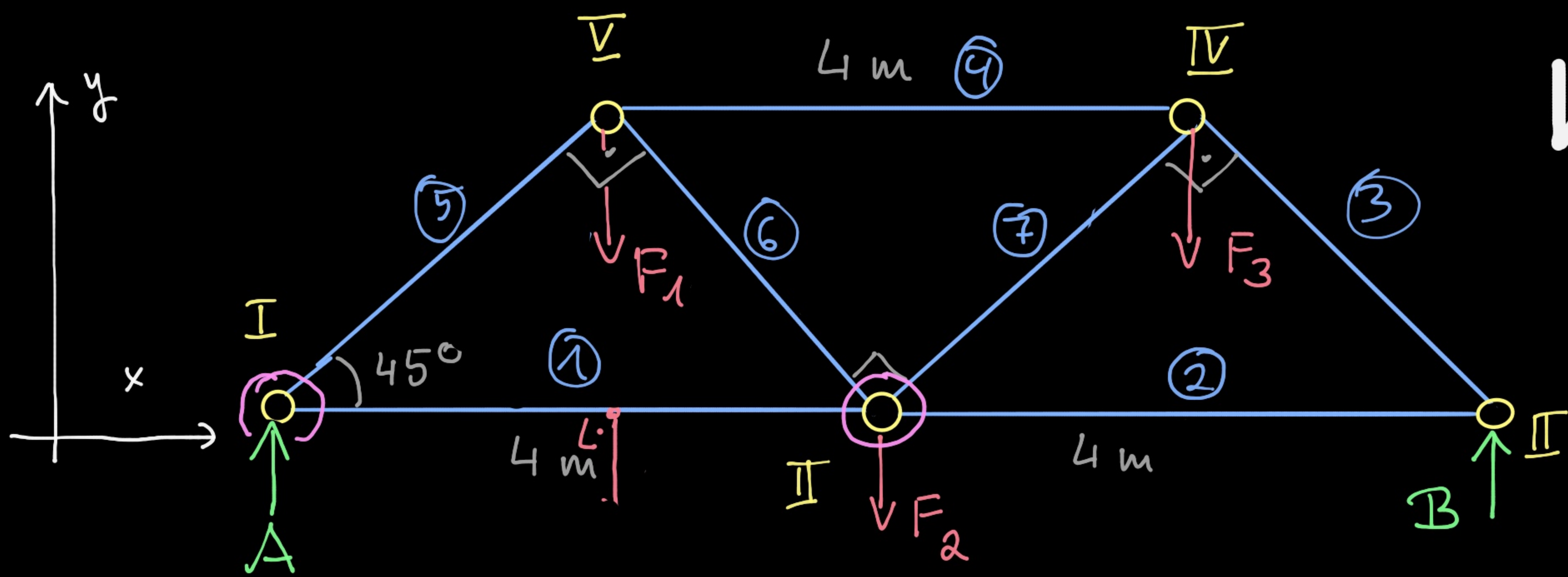
Drehmomentengleichgewicht bei ○

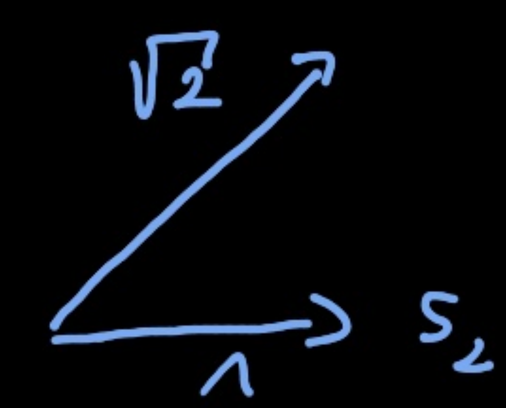
A, B Lagerreaktionskräfte

$$8\cdot B = 4\cdot F_2 + 2\cdot F_1 + 6\cdot F_3$$

$$B = \frac{1}{2}F_2 + \frac{1}{4}\cdot F_1 + \frac{3}{4}\cdot F_3 \xrightarrow{(*)} A = \frac{1}{2}F_2 + \frac{3}{4}F_1 + \frac{1}{4}F_3$$

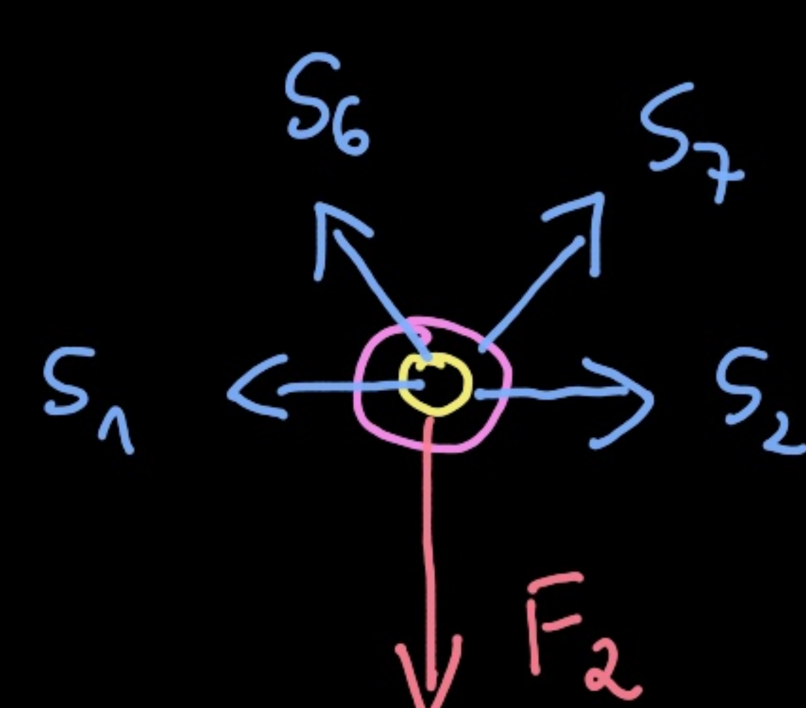
Knoten

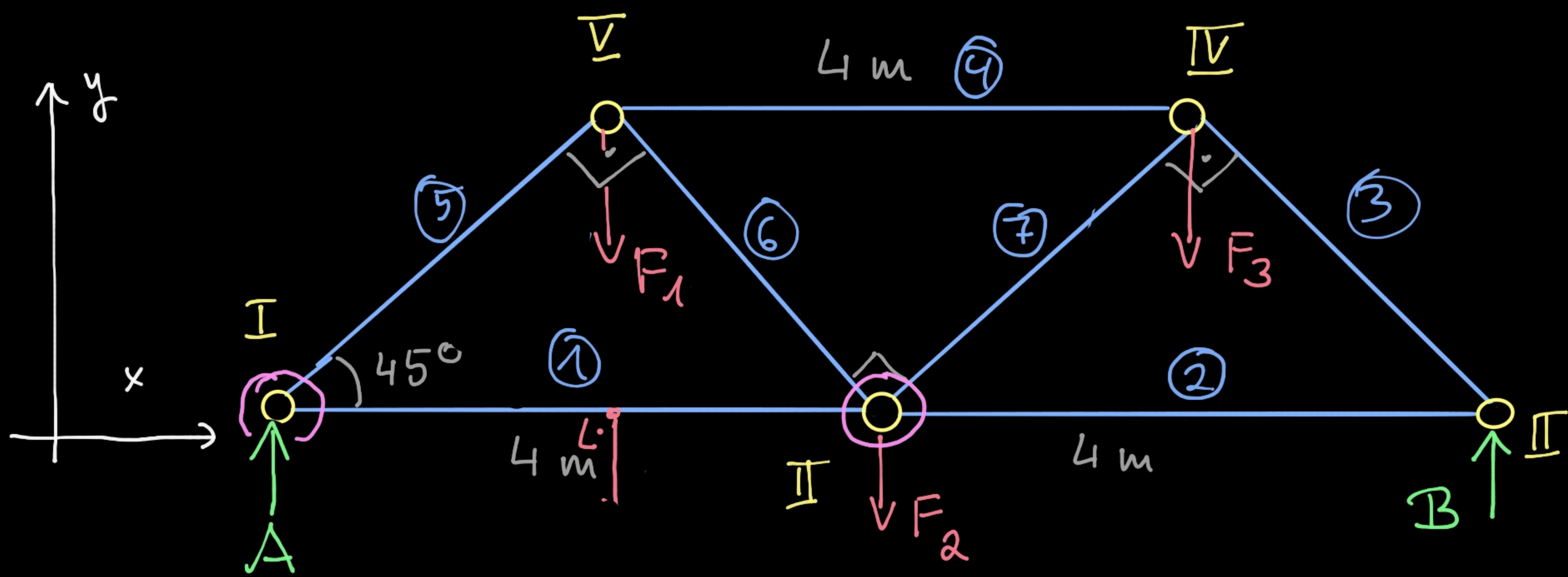




$$S_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$+ S_7 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + S_6 \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$





LGS

$$\mathrm{I}: \quad S_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_5 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = -A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II}: \quad S_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_6 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + S_7 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = F_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{III}: \quad S_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_3 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = -B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{IV}: \quad S_3 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + S_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_7 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = F_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{V}: \quad S_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_5 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + S_6 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = F_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark\ \mathrm{I}: \quad \cancel{s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \cancel{s_5 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} = -A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\checkmark\ \mathrm{II}: \quad \cancel{s_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \cancel{s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \cancel{s_6 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} + \cancel{s_7 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} = F_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\checkmark\ \mathrm{III}: \quad \cancel{s_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \cancel{s_3 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} = -B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\checkmark\ \mathrm{IV}: \quad \cancel{s_3 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} + \cancel{s_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \cancel{s_7 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} = F_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

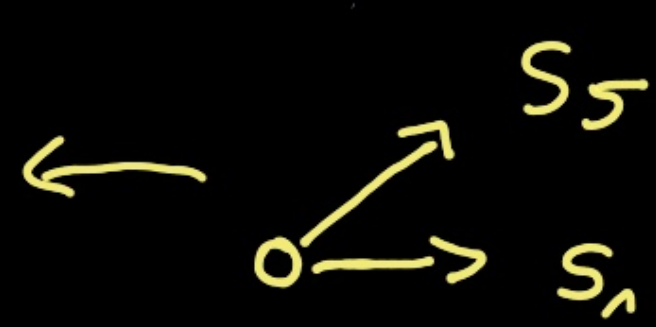
$$\checkmark\ \mathrm{V}: \quad \cancel{s_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \cancel{s_5 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} + \cancel{s_6 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}} = F_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$A = \frac{3}{4} F_1 + \frac{1}{2} F_2 + \frac{1}{4} F_3 \qquad B = \frac{1}{4} F_1 + \frac{1}{2} F_2 + \frac{3}{4} F_3$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \\ \mathrm{II} \\ \\ \mathrm{III} \\ \\ \mathrm{IV} \\ \\ \mathrm{V} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \end{array}
\end{array}
\cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
-3/4 & -1/2 & -1/4 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
-1/4 & -1/2 & -3/4 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
-3/4 & -1/2 & -1/4 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
-1/4 & -1/2 & -3/4 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}
+ \mathrm{II}
$$

$$S_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 = 0 \quad \longleftarrow$$



horizontale Komp.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_7 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
-3/4 & -1/2 & -1/4 \\
-1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & -\sqrt{2}/8 & 0 & \sqrt{2}/8 & -\sqrt{2}/8 & \sqrt{2}/8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\
0 & -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0
\end{pmatrix} \cdot \underline{S} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \cdot \underline{F}
$$

hier nicht verderben

$\cdot\, (-8/\sqrt{2})$

streichen

hier Gauß

Gauß-Algorithmus & Streichen von Nullzeilen führt auf

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0
\end{array}\right) \cdot \underline{S} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 0 &
\end{pmatrix} \cdot \underline{F}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\
 & & & & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
 & & & & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0
\end{array}\right) \cdot \underline{S} = \left(\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 0 &
\end{array}\right) \cdot \underline{F}
$$

Aufteilen in:

$$
\begin{pmatrix}
-\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\
0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad \leftarrow
$$

und

$$
\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
-\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\
-\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\
-1 & 1 & -1 \\
-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} \quad \leftarrow
$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{T} \cdot \begin{pmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad \Bigg\| \quad \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & +\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ +1 & -1 & +1 \\ +\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix}$$

Berechne T^{-1}, dann $\begin{pmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_4 \end{pmatrix} = A\, T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$

T^{-1}: $\quad T \mid E \rightsquigarrow E \mid T^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\sqrt{2}) \\ \cdot\sqrt{2} \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :\sqrt{2} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ -\mathrm{II} \;\|\; :(-2) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2}/4 & +\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \end{pmatrix} = T^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{T} \cdot \begin{pmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad \Bigg\| \quad \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & +\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ +1 & -1 & +1 \\ +\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix}$$

Berechne T^{-1}, dann $\begin{pmatrix} S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_4 \end{pmatrix} = A\, T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \end{pmatrix} \quad ;$$

$A\,T^{-1}$ per Falkschema

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} = 1$$

$$\begin{array}{cc} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1/4 \\ -\frac{1}{2} & +1/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & T^{-1} \\ \hline A & AT^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
 & & & & -3\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\
 & & & & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 \\
 & & & & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\
\hline
\rightarrow & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\
\sqrt{2}/2\,\cdot & -1 & 1 & -1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \\
 & 1 & -1 & 1 & -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 & -3\sqrt{2}/4 \\
\sqrt{2}/2\,\cdot & 1 & -1 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2
\end{array}$$

AT^{-1}

Lösung

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ -1/2 & -1 & -1/2 \\ -3\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}}_{\geq 0}$$

$S_1, S_2 > 0$

$S_3, S_4, S_5 < 0$

Zugstab

DRUCKSTÄBE