Mathematisch Ergänzungen
Woche 08

Algebraische Strukturen

z.B. Körper, Vektorraum

(1.) <u>Ring</u>: Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+$ (Addition), $\cdot$ (Multiplikation)

mit den folgenden Eigenschaften:

- $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a,b,c \in R$
- $a+b = b+a$ für alle $a,b \in R$
- Es gibt ein "neutrales Element" $0 \in R$ mit $a+0 = a$ für alle $a \in R$
- zu jedem a gibt es ein inverses Element $a' \in R$ mit $a+a' = 0$. (schreibe wieder $-a$ für a' und $a-b$ für $a+b'$)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a,b,c \in R$
- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ für <u>alle</u> $a,b,c \in R$
- $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ —— " ——

Beispiele

(1.) Jeder Körper ist ein Ring.

(2.) Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, so ist der Polynomraum

$$\mathbb{K}[x] = \{ \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, \; \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \}$$

mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Polynomen ein Ring.

(3.) $\mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ b \cdot y \end{pmatrix}$ ist Ring.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{beide } \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind "Nullteiler"

(4.) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden einen Ring.

(5.) Vorgelegt: $\mathbb{K}$ Körper

$R = \mathbb{K}^{n \times n}$ Raum der $(n \times n)$ - Matrizen
(gleiches n !)

R wird mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Ring.

Einselement = Einheitsmatrix

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \neq \quad \text{nicht kommutativ!}$$

(6.) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Ein Endomorphismus ist eine lineare Abb. $f: V \to V$.

$$\mathrm{End}(V) = \{ f : V \to V \mid f \text{ linear} \} = gl(V)$$

Endomorphismenring von V

Strukturerhaltende Abbildungen

V $\mathbb{K}$-VR

$f: V \to W$ linear

$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ Morphismus

$f(r \cdot \vec{u}) = r \cdot f(\vec{u})$ Homomorphismus

$f: V \to W$ bijektiv & linear:

Vektorraum-Isomorphismus

$f: V \to V$ linear:

VR-Endomorphismus

Ein bijektiver VR-Endomorphismus heißt VR-Automorphismus

R Ring

$f: R \to S$

Ringhomomorphismus, falls

$f(a +_R b) = f(a) +_S f(b)$

$f(a \cdot_R b) = f(a) \cdot_S f(b)$

Ein bijektiver Ringhom. heißt Ring-Isomorphismus

$f: R \to R$ Ringhom. heißt Ring-Endomorphismus

Ein bijektiver Ring-Endm. heißt Ring-Automorphismus

Exkurs: Positive natürliche Zahlen

$$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

"Nachfolger-Abbildung" σ

σ : sigma
μ : mu

$$\mathbb{M}_+ = \{ \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \ldots \}$$ oder $\{ -, =, \equiv, \ldots \}$

μ

$$\varphi : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{M}_+ , \quad \varphi(1) = \mathrm{I}, \ \varphi(2) = \mathrm{II}, \ldots$$

φ "Morphismus"

$$\varphi(\sigma(r)) = \mu(\varphi(r))$$

z.B.

$$\varphi(\sigma(3)) = \varphi(4) = \mathrm{IV}$$
$$\mu(\varphi(3)) = \mu(\mathrm{III}) = \mathrm{IV}$$

φ Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{M}_+ \text{ bijektiv}; \quad \varphi^{-1}(\mathrm{I}) = 1, \ \varphi^{-1}(\mathrm{II}) = 2$$

$$\varphi^{-1}(\mu(R)) = \sigma(\varphi^{-1}(R))$$

$\longrightarrow$ zwischen $\mathbb{N}_+$ und $\mathbb{M}_+$ gibt es keinen Unterschied

---

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Vorgelegt: $\mathbb{K}$ - Vektorraum V

Für $f, g \in \mathrm{End}(V)$ (d.h. $f, g: V \to V$ linear)

definiere die Abbildung $f+g: V \to V$ durch

$$(f+g)(\vec{v}) \overset{\text{Def}}{=} f(\vec{v}) +_V g(\vec{v})$$

Beh.: $f+g$ ist linear

Bew.: • $(f+g)(\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{v}+\vec{w}) + g(\vec{v}+\vec{w}) \overset{f,g \text{ linear}}{=}$

$(f(\vec{v})+f(\vec{w}))+(g(\vec{v})+g(\vec{w})) \underset{\uparrow \text{Rechnen}}{=} (f(\vec{v})+g(\vec{v}))+(f(\vec{w})+g(\vec{w}))$

$= (f+g)(\vec{v}) + (f+g)(\vec{w})$

• $(f+g)(r\cdot\vec{v}) = r\cdot(f+g)(\vec{v})$: genauso langweilig. $\boxtimes$

Also: $f+g \in \mathrm{End}(V)$, d.h. "+" ist eine Verknüpfung auf $\mathrm{End}(V)$

Satz End(V) wird mit der oben eingeführten Addition und mit "$\circ$" (Komposition von Abb.) als Multiplikation ein Ring.

Notiz: id_V ist "1-Element" $id_V \circ f = f = f \circ id_V$

Beweis (Nachrechnen der Ringeigenschaften)

- Zeige: $f, g \in End(V) \Rightarrow f+g = g+f$,
  denn $(f+g)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + g(\vec{v}) = g(\vec{v}) + f(\vec{v}) = (g+f)(\vec{v})$
- $n : V \to V$, $n(\vec{v}) = \vec{0}_V$ ist das neutrale Element.
  $(f+n)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + n(\vec{v}) = f(\vec{v})$ für alle $\vec{v}$ und f

- Zeige: $f, g, h \in End(V) \Rightarrow f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$,
  denn: $(f \circ (g+h))(\vec{v}) = f((g+h)(\vec{v}))$
  $= f(g(\vec{v}) + h(\vec{v})) \underset{f \text{ linear}}{=} f(g(\vec{v})) + f(h(\vec{v}))$
  $= (f \circ g)(\vec{v}) + (f \circ h)(\vec{v}) = (f \circ g + f \circ h)(\vec{v})$ ✓

HA ME08a:

Rechne die restlichen Ringeigenschaften nach, d.h. beweise den Satz vollständig.

Gelernt: $\boxed{End(V) \text{ mit } +, \circ \text{ ist ein Ring}}$

Notiz: Sind R und S Ringe, und ist $\varphi: R \to S$ ein Ring-Isomorphismus, so ist auch φ^{-1} ein Ring-Isomorphismus.

Dazu: $\varphi: R \to S$ Ring-Isomorphismus

Bedeutet: φ ist bijektiv (dann φ^{-1} auch)

und $\varphi(r +_R s) = \varphi(r) +_S \varphi(s)$

$\varphi(r \cdot_R s) = \varphi(r) \cdot_S \varphi(s)$

Bleibt zu zeigen: $\varphi^{-1}(u +_S v) = \varphi^{-1}(u) +_R \varphi^{-1}(v)$

$\varphi^{-1}(u \cdot_S v) = \varphi^{-1}(u) \cdot_R \varphi^{-1}(v)$.

gleichwertig zu $u \cdot_S v = \varphi(\varphi^{-1}(u \cdot_S v)) = \varphi(\varphi^{-1}(u) \cdot_R \varphi^{-1}(v))$

$\underset{\varphi \text{ Ring-Hom.}}{=} \varphi(\varphi^{-1}(u)) \cdot_S \varphi(\varphi^{-1}(v)) = u \cdot_S v$

formal: Es gilt $\varphi(\varphi^{-1}(u) \cdot_R \varphi^{-1}(v)) = u \cdot_S v$

Anwenden von φ^{-1}: $\varphi^{-1}(u) \cdot_R \varphi^{-1}(v) = \varphi^{-1}(u \cdot_S v)$

End($\mathbb{K}^n$) und $\mathbb{K}^{n\times n}$

Bijektion $\varphi : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \text{End}(\mathbb{K}^n)$

definiert durch $(\varphi(\underset{\substack{\uparrow \\ n\times n\text{-Matrix}}}{M}))(\underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{K}^n}}{\underline{v}}) = M \cdot \underline{v}$

$\varphi(M) \in \text{End}(\mathbb{K}^n)$, denn $\underline{v} \longmapsto M\cdot\underline{v}$ ist linear

$f \in \text{End}(\mathbb{K}^n) \Longrightarrow \varphi^{-1}(f) = (f(\underline{e}_1) \; \dots \; f(\underline{e}_n)) \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Übertrage Ringstruktur von End($\mathbb{K}^n$) auf $\mathbb{K}^{n\times n}$:

$A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $A+B \overset{\text{Def}}{=} \varphi^{-1}(\varphi(A)+\varphi(B))$

$A\cdot B \overset{\text{Def}}{=} \varphi^{-1}(\varphi(A)\circ\varphi(B))$

Automatisch: $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist ein Ring, φ ein Ring-Iso.

$A = (\underline{a}_1 \; \dots \; \underline{a}_n)$, $B = (\underline{b}_1 \; \dots \; \underline{b}_n)$

$A + B = \varphi^{-1}(\varphi(A)+\varphi(B))$

$(\varphi(A)+\varphi(B))(\underline{v}) = \varphi(A)(\underline{v}) + \varphi(B)(\underline{v}) = A\cdot\underline{v} + B\cdot\underline{v}$

$(\varphi(A)+\varphi(B))(\underline{e}_j) = A\cdot\underline{e}_j + B\cdot\underline{e}_j = \underline{a}_j + \underline{b}_j$

$A+B = \varphi^{-1}(\varphi(A)+\varphi(B)) = ((\varphi(A)+\varphi(B))(\underline{e}_1), \dots, (\varphi(A)+\varphi(B))(\underline{e}_n))$

$= (\underline{a}_1 + \underline{b}_1 \; \dots \; \underline{a}_n + \underline{b}_n)$

$\mathbb{K}$-Algebren

$\mathbb{K}$: Körper , $\mathbb{A}$ Menge mit :

$\mathbb{A}$ mit $+, *$ ist ein Ring

$a * b$ für $a, b \in \mathbb{A}$

$\mathbb{A}$ mit $+, \cdot$ ist ein $\mathbb{K}$-VR

$r \cdot a$ für $r \in \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{A}$

gleiches "+"

Dann heißt $\mathbb{A}$ mit $+, *, \cdot$ eine $\mathbb{K}$-Algebra,

falls : $r \cdot (a * b) = (r \cdot a) * b = a * (r \cdot b)$

gilt für alle $r \in \mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{A}$.

Sind $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ zwei $\mathbb{K}$-Algebren, so heißt ein Ringhom. $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, der gleichzeitig $\mathbb{K}$-linear ist, ein Algebrenhomomorphismus.

Algebren-Isom., -Endom., -Autom wie gewohnt.

$\mathrm{End}(V)$ ist mit $(r \cdot f)(\vec{v}) \overset{\text{Def.}}{=} r \cdot f(\vec{v})$ $\quad (r \in \mathbb{K}, f \in \mathrm{End}(V))$

eine $\mathbb{K}$-Algebra.

Ergebnisse

(1.) Sind V und W isomorphe $\mathbb{K}$-VR
(d.h. es gibt einen VR-Iso. $\varphi: V \to W$),
so sind $\mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{End}(W)$ isomorphe Algebren.

Also: Es gibt einen Algebren-Isom. $\Phi: \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(W)$,
der irgendetwas mit φ zu tun hat.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ W \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\varphi^{-1}"] & W \end{tikzcd}$$

$f \in \mathrm{End}(V) \rightsquigarrow \Phi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$

(2.) Ist V ein zu $\mathbb{K}^n$ isomorphe $\mathbb{K}$-VR,
so sind die $\mathbb{K}$-Algebren $\mathrm{End}(V)$ und $\mathbb{K}^{n\times n}$
ebenfalls isomorph.

Hier: $\mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ sind isomorph
$\mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ und $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind isomorph

Zeige: $\mathrm{End}(V)$ und $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind isomorph

Dazu: Φ, Ψ sind $\mathbb{K}$-Algebra-Hom. $\Rightarrow$ $\Phi \circ \Psi$ ist $\mathbb{K}$-Algebren-Hom.

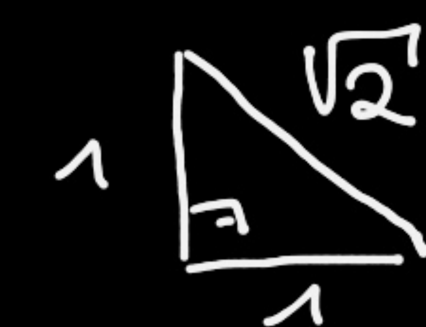
HaME08b: Führe dies genauer aus.

Exkurs: Körpererweiterungen

$\mathbb{Q}$ = Körper der rationalen Zahlen

$x^2 - 2 = 0$ (Suche nach Nullstellen des Polynoms $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$)

hat in $\mathbb{Q}$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$



Denn: Angenommen, $x = \frac{m}{n}$ vollst. gekürzter Bruch

Dann $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, also $m^2 = 2n^2$, d.h. $m = 2 \cdot m'$ gerade,

folglich $2m'^2 = n^2$, also n ebenfalls gerade ↯

"Körpererweiterung": $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \overset{\text{Df.}}{=} \{ r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q} \}$

Ring mit gewöhnlicher Addition und Mult,

denn $(r + s\sqrt{2}) \cdot (u + v \cdot \sqrt{2}) = (r \cdot u + 2sv) + (rv + su) \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

sogar Körper, $r - s\sqrt{2} \neq 0$ wg. $\sqrt{2} \neq r/s \in \mathbb{Q}$

$$\frac{1}{r + s\sqrt{2}} = \frac{r - s\sqrt{2}}{(r + s\sqrt{2})(r - s\sqrt{2})} = \frac{r - s\sqrt{2}}{r^2 - 2s^2}$$

$$= \frac{r}{r^2 - 2s^2} + \frac{-s}{r^2 - 2s^2} \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ r + s\sqrt{2} \mid r,s \in \mathbb{Q} \}$ ist ein $\mathbb{Q}$ - Vektorraum mit skalarer Mult:

$$\underbrace{t}_{\in \mathbb{Q}} \cdot (\underbrace{r + s\sqrt{2}}_{\in \mathbb{Q}(\sqrt{2})}) = (tr) + (ts)\sqrt{2}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist als Vektorraum zu $\mathbb{Q}^2$ isomorph:

$$\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^2 ; \quad \varphi(r + s\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

ist eine bijektive lineare Abb., also ein VR - Isom.:

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = r + s\sqrt{2} \qquad \left(\text{dann } \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\mathbb{Q}^2}, \; \varphi^{-1} \circ \varphi = id_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} \right)$$

$$\varphi\left((r + s\sqrt{2}) + (u + v\sqrt{2}) \right) = \varphi\left((r+u) + (s+v)\sqrt{2} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} r + u \\ s + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varphi(r + s\sqrt{2}) + \varphi(u + v\sqrt{2})$$

und $\varphi\left(t \cdot (r + s\sqrt{2}) \right) = \varphi(tr + ts\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} tr \\ ts \end{pmatrix}$

$$= t \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = t \cdot \varphi(r + s\sqrt{2})$$

$u + v\sqrt{2} = \alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Dann: $L_\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$

ist linear: $L_\alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha \cdot (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \cdot \beta_1 + \alpha \beta_2$

$$= L_\alpha(\beta_1) + L_\alpha(\beta_2)$$

$$L_\alpha(t \cdot \beta) = \alpha \cdot (t \cdot \beta) = t \cdot (\alpha \cdot \beta)$$

$$= t \cdot L_\alpha(\beta)$$

Also: $L_\alpha \in \operatorname{End}_{VR}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \cong \mathbb{Q}^{2\times 2}$ (als $\mathbb{Q}$-Algebren)

"ist isomorph zu"

$$L_\alpha(r + s\sqrt{2}) = (u + v\sqrt{2}) \cdot (r + s\sqrt{2})$$

$$= (ur + 2vs) + (us + vr)\sqrt{2}$$

$\Updownarrow$ auf $\mathbb{Q}^2$

$$L'_\alpha \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ur + 2vs \\ us + vr \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} u & 2v \\ v & u \end{pmatrix}}} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

$$\alpha \Longleftrightarrow L_\alpha \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u & 2v \\ v & u \end{pmatrix}$$

$\Phi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^{2\times 2}$
$\Phi(u + v\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} u & 2v \\ v & u \end{pmatrix}$ ist injektiver Algebren hom.

$$\begin{tikzcd} u+v\sqrt{2} \arrow[r, mapsto] \arrow[rrr, bend left, mapsto, "\text{Algebren hom.}"] & L_{u+v\sqrt{2}} \arrow[r, mapsto] & L'_{u+v\sqrt{2}} \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} u & 2v \\ v & u \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

auch Algebra hom. — Algebra hom — Algebra hom

$L_{\alpha+\beta} = L_\alpha + L_\beta$ $\quad (\; (\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma \;)$

$L_{\alpha\cdot\beta} = L_\alpha \circ L_\beta$ $\quad (\; (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \;)$

$L_{t\cdot\alpha} = t\cdot L_\alpha$ $\quad (\; (t\alpha)\cdot\gamma = t\cdot(\alpha\cdot\gamma) \;)$

Brauche: Hintereinanderschaltung von Algebren hom. ist wieder ein Algebren hom. ($\longrightarrow$ selbst rechnen)

Hieraus folgt (nach einigem Nachdenken):

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\left\{ \begin{pmatrix} u & 2v \\ v & u \end{pmatrix} \,\middle|\, u,v \in \mathbb{Q} \right\} = Q$

sind isomorphe Algebren, speziell: Q ein Körper

Zerlege $\begin{pmatrix} u & 2v \\ v & u \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$

$u + v\sqrt{2} \qquad (L_1)\ 1 \qquad (L_{\sqrt{2}})\ \sqrt{2}$

$L_1 = id_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt $L_{\sqrt{2}} : \begin{array}{l} 1 \longmapsto \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \longmapsto 2 \end{array}$

$L'_{\sqrt{2}} : \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$

$\mathbb{C}$ ist isom. zu $\left\{ \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \middle| r,s \in \mathbb{R} \right\}$

$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{ r + s\sqrt[3]{2} + t\sqrt[3]{2}^2 \mid r,s,t \in \mathbb{Q} \}$

$1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \quad \sqrt[3]{2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = D_1$

$\sqrt[3]{2}^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_2$

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist isomorph zu $\{ rE + s D_1 + t \cdot D_2 \mid r,s,t \in \mathbb{Q} \}$
$\subseteq \mathbb{Q}^{3\times 3}$