Kapitel 2: Lineare Abbildungen

5. Darstellungsmatrizen

Stets: $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f: V \to W$ linear

$\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ geordnete Basis von V

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ geordnete Basis von W

Geordnete Basis?

X, Y Mengen: $\quad X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$

"geordnetes Paar"

$(x, y) = (x', y')$ gdw. $x = x'$ und $y = y'$

$X^n = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ Kopien}}$ = Menge der geordneten n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1, \dots, x_n \in X$

$\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m) \in V^m$ geordnete Basis, falls

[$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ paarw. verschieden und] $\{ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \}$ Basis.

Vorüberlegung:

Jedes $\vec{v} \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als
$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} r_k \cdot \vec{a}_k \quad \text{mit } r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{K}.$$
$f(\vec{v}) \in W$ lässt sich eindeutig schreiben als
$$f(\vec{v}) = \sum_{l=1}^{n} s_l \cdot \vec{b}_l \quad \text{mit } s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{K}.$$

Gesucht: Zusammenhang zwischen den $r_1, \ldots, r_m$ und $s_1, \ldots, s_n$ ...

bzw. zwischen $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

Die Gleichung $\vec{w} = f(\vec{v})$

übersetzt sich in
$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

wenn es so eine Matrix gibt,

dann beschreibt diese f "bzgl." der Basen A und B.

5.1 Koordinatenvektoren

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \vec{a}_k = LK_A \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

das war die Def der Abb. LK_A

A ist eine Basis,

also ist $LK_A : \mathbb{K}^n \to V$ linear und bijektiv,

also gibt es $LK_A^{-1} : V \to \mathbb{K}^n$, linear und bijektiv

$LK_A^{-1}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ bedeutet $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \vec{a}_k$

Schreibe $[\vec{v}]_A \overset{\text{Def}}{=} LK_A^{-1}(\vec{v})$

$[\vec{v}]_A$ heißt Koordinatenvektor von $\vec{v}$ bzgl. der Basis A.

Die lineare Abbildung

$\kappa_A = LK_A^{-1} : V \to \mathbb{K}^n$, $\kappa_A(\vec{v}) = [\vec{v}]_A$

heißt Koordinatenabbildung (zur Basis A)

Beispiele

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\in V} \Bigg]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

falls $r_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + r_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösen: $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$ ist der Koordinatenvektor des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$

$B_1 = (1, x, x^2)$ $\qquad\qquad$ $B_2 = (x^2, x, 1)$

$$[r_0 + r_1 x + r_2 x^2]_{B_1} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \underset{\text{i.a}}{\neq} [r_0 + r_1 x + r_2 x^2]_{B_2} = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

$B_3 = (1 - x, 1 + x, 1 - x^2)$

$$[r_0 + r_1 x + r_2 x^2]_{B_3} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2 \\ \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2 \\ - r_2 \end{pmatrix}$$

bedeutet $r_0 + r_1 x + r_2 x^2 = s_1 \cdot (1 - x) + s_2 (1 + x) + s_3 \cdot (1 - x^2)$

$$= s_1 + s_2 + s_3 + (-s_1 + s_2) \cdot x - s_3 \cdot x^2$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= r_0 \\ -s_1 + s_2 \phantom{{}+s_3} &= r_1 \\ -s_3 &= r_2 \end{aligned}$$

Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & r_0 \\ -1 & 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & -1 & r_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \mathrm{III} \\ + \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & r_0 + r_2 \\ 0 & 2 & 0 & r_0 + r_1 + r_2 \\ 0 & 0 & 1 & - r_2 \end{array}\right) \begin{array}{l} - \mathrm{I} \\ :2 \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2 \\ 0 & 0 & 1 & - r_2 \end{array}\right)$$

5.2 Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

V ein $\mathbb{K}$-VR mit Basis $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m)$

W ein $\mathbb{K}$-VR mit Basis $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$

$f : V \to W$ linear

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^m \arrow[r, "\kappa_B \circ f \circ LK_A"] \arrow[d, bend right, "LK_A = \kappa_A^{-1}"'] & \mathbb{K}^n \\
V \arrow[u, "\kappa_A"'] \arrow[r, "f"'] & W \arrow[u, "\kappa_B"']
\end{tikzcd}$$

Die Abb. κ_B, LK_A, f sind linear,

also ist $\kappa_B \circ f \circ LK_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ ebenfalls linear,

es gibt folglich eine Matrix $[f]_A^B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ mit

$$(\kappa_B \circ f \circ LK_A)(\underline{u}) = [f]_A^B \cdot \underline{u} \quad \text{für alle } \underline{u} \in \mathbb{K}^m$$

$[f]_A^B$ heißt **Darstellungsmatrix** von f bezgl. der Basen A und B.

5.2

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^m \arrow[r, "\kappa_B\circ f\circ LK_A"] \arrow[d, bend right, "LK_A"'] & \mathbb{K}^n \\
V \arrow[u, "\kappa_A"'] \arrow[r, "f"'] & W \arrow[u, "\kappa_B"']
\end{tikzcd}$$

Koordinatenvektor

$$\circledast \quad (\kappa_B\circ f\circ LK_A)(\underline{u}) = \overbrace{[f]^B_A\cdot\underline{u}} \quad \text{für alle } \underline{u}\in\mathbb{K}^m$$

$$\underline{u} = [\vec{v}]_A \qquad (\text{nämlich } \vec{v} = LK_A(\underline{u}))$$

$$\begin{aligned}(\kappa_B\circ f\circ LK_A)(\underline{u}) &= \kappa_B(f(LK_A(\underline{u})))\\ &= \kappa_B(f(\vec{v})) = [f(\vec{v})]_B\end{aligned}$$

$$\circledast \quad \boxed{[f(\vec{v})]_B = [f]^B_A\cdot[\vec{v}]_A}$$

Diese Gleichung beschreibt den Sinn der *Matrix* $[f]^B_A$:

$$\vec{w} = f(\vec{v}) \quad \longleftrightarrow \quad [\vec{w}]_B = [f]^B_A\,[\vec{v}]_A$$

Beispiel $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$

$W = \{ s_0 + s_1 x \mid s_0, s_1 \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{A} = (\underline{1 + x}, \; 1 - x, \; 1 - x^2)$

$\mathcal{B} = (1 + 2x, \; x - 3)$

$f: V \to W; \quad f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = r_1 + 2 r_2 x$

$$[f]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot [v(x)]_{\mathcal{A}} = [f(v(x))]_{\mathcal{B}}$$

$v(x) \in V$

1. Spalte v. $[f]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [f]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot [\underline{1 + x}]_{\mathcal{A}} = [f(1+x)]_{\mathcal{B}}$

$= [1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, bedeutet $\underline{1} = s_1 (1 + 2x) + \underbrace{s_2}_{-2 \cdot s_1} \cdot (x - 3)$

$= \frac{1}{7} \cdot (1 + 2x) - \frac{2}{7} \cdot (x - 3)$

Also: $[f]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/7 & ? & ? \\ -2/7 & ? & ? \end{pmatrix}$

2. Spalte: $[f(1 - x)]_{\mathcal{B}} = [-1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$

3. Spalte: $[f(1 - x^2)]_{\mathcal{B}} = [-2x]_{\mathcal{B}} = [1 - (1 + 2x)]_{\mathcal{B}}$

$= [1]_{\mathcal{B}} - [1 + 2x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ -2/7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$

Folgt $[f]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 & -6/7 \\ -2/7 & 2/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

Beispiel $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$

$W = \{ s_0 + s_1 x \mid s_0, s_1 \in \mathbb{R} \}$

$A = (1+x,\ 1-x,\ 1-x^2)$

$B = (1+2x,\ x-3)$

$f: V \to W; \quad f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = r_1 + 2 r_2 x$

Ausgerechnet: $[f]^B_A = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 & -6/7 \\ -2/7 & 2/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

Probe $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = [f]^B_A \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_2 \end{pmatrix}$ bedeutet:

$$s_1 \cdot (1+2x) + s_2 \cdot (x-3) = f\left(r_1 \cdot (1+x) + r_2 \cdot (1-x) + r_3 \cdot (1-x^2) \right)$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 & -6/7 \\ -2/7 & 2/7 & -2/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} r_1 - r_2 - 6 r_3 \\ -2r_1 + 2r_2 - 2r_3 \end{pmatrix}$$

Beh.: $\frac{1}{7}(r_1 - r_2 - 6r_3) \cdot (1+2x) + \frac{1}{7}(-2r_1 + 2r_2 - 2r_3) \cdot (x-3)$

$\overset{?}{=} r_1 \cdot f(1+x) + r_2 \cdot f(1-x) + r_3 f(1-x^2)$

$= r_1 - r_2 - 6x$

nachrechnen ....

<u>Beispiel</u>: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$, $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 \right\}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Teil 1</u>: Zeige: Ist $\underline{x} \in V$, so ist $M \cdot \underline{x} \in W$

$\underline{x} \in V \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ für passende r, s

$\Rightarrow M \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

Beachte: $\underline{y} \in W$ gilt g.d.w. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{1\times 3}} \cdot \underline{y} = 0$

Also: $M \cdot \underline{x} \in W$ gilt g.d.w.

$0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M \cdot x \overset{\text{s.o.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 0$ ✓

Folgt: $f: V \longrightarrow W$, $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$

Beispiel: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$, $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 \right\}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f : V \longrightarrow W, \quad f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$ mit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Teil 2: Bestimme $[f]^B_A$

1. Spalte: $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = [f]^B_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [f]^B_A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_A$

$$= \left[f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B = \left[M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

falls $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = r_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

2. Spalte $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$: $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

Erhalte: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}}_{[f]^B_A} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \leftarrow$

$$B \cdot [f]^B_A = M \cdot A$$

Schema: $\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ - \mathrm{I} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \curvearrowright \mathrm{III} \\ \curvearrowright \text{streich} \\ \curvearrowright \mathrm{I} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cc|} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = [f]^B_A$

KOCHREZEPT

$V \subseteq \mathbb{K}^m$ mit Basis A, $W \subseteq \mathbb{K}^n$ mit Basis B

$M \in \mathbb{K}^{n \times m}$ Matrix mit $M \cdot \underline{x} \in W$ für alle $\underline{x} \in V$

Bestimme die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung

$f : V \to W$, $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$

hier fassen wir A und B als Matrizen auf ....
(Missbrauch der Notation)

Ansatz: Lösen von $B \mid M \cdot A$ per Gauß

führt auf $\begin{array}{c|c} E & [f]_A^B \\ \hline 0 & 0 \end{array}$

$$\boxed{B \cdot [f]_A^B = M \cdot A}$$

Wenn das klappt, so erhalte noch folgende Information

$M \cdot \underline{x} \in W$ gilt tatsächlich für alle $\underline{x} \in V$.

Denn: $\underline{x} \in V \implies \underline{x} = A \cdot \underline{r}$ für passenden Vektor $\underline{r} \in \mathbb{K}^{\dim V}$

$$\implies M \cdot \underline{x} = M \cdot A \cdot \underline{r} = B \cdot \underbrace{[f]_A^B \cdot \underline{r}}_{\underline{s}} = B \cdot \underline{s} \in W$$

Beispiel $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$

$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$f(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underline{x} \quad \text{für } \underline{x} \in \mathbb{R}^2$$

Bestimme $[f]^B_A$?

$$M \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II} \mid :2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -5/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ +\mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc} & -1/2 & -1/2 \\ E & 5/2 & -3/2 \\ & -1/2 & -5/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow [f]^B_A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 5/2 & -3/2 \\ -1/2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Notiz: $B \; \hat{=} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} E \implies$ B ist tatsächlich eine Basis.

Hausaufgabe IngMa 10 A

Vorgelegt sind die folgenden Daten: $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir betrachten die lineare Abb. $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $F(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$ sowie den Untervektorraum $U = \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ von $\mathbb{R}^4$.

(a) Berechne eine Basis von $\ker(F)$ und zeige, dass $C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\text{im}(F)$ ist.

Damit gilt $\text{im}(F) = \text{span}(C) =: V$ und damit gilt $M \cdot \underline{x} \in V$ für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$, speziell für alle $\underline{x} \in U$. Somit erhalten wir eine lineare Abb. $f: U \to V$, $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$.

(b) Berechne die Darstellungsmatrix $[f]_B^C$.

(c) Bestimme – wenn möglich – Basen G und H von U und V, so dass $[f]_G^H = E$ die Einheitsmatrix ist.

5.3: <u>Satz</u> Vorgelegt sind endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-VR U, V, W mit Basen $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell)$, $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$, $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ sowie lineare Abbildungen $f: U \to V$ und $g: V \to W$.

$g \circ f : U \to W$, $(g \circ f)(\vec{u}) = g(f(\vec{u}))$ ist linear

Dann gilt $\quad [g \circ f]^C_A = [g]^C_B \cdot [f]^B_A$

Begründung:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^\ell \arrow[rrrr, bend left, "{[g \circ f]^C_A}"] \arrow[dddrr, "{[f]^B_A}"'] & & & & \mathbb{K}^n \\
& U \arrow[ul, "\kappa_A"'] \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & W \arrow[ur, "\kappa_C"'] & \\
& & V \arrow[ur, "g"'] \arrow[dd, "\kappa_B"] & & \\
& & & & \\
& & \mathbb{K}^m \arrow[uuurr, "{[g]^C_B}"'] & &
\end{tikzcd}$$

gemeint:

$f_*(\underline{u}) = [f]^B_A \cdot \underline{u}$

$$\begin{aligned}
&\underline{[g \circ f]^C_A \cdot [\vec{u}]_A} \\
&= [(g \circ f)(\vec{u})]_C \\
&= [g(f(\vec{u}))]_C \\
&= [g]^C_B \cdot [f(\vec{u})]_B \\
&= [g]^C_B \cdot \left([f]^B_A \cdot [\vec{u}]_A\right) \\
&\overset{(3.5)}{=} \underline{\left([g]^C_B \cdot [f]^B_A\right) \cdot [\vec{u}]_A}
\end{aligned}$$

für alle $\vec{u} \in U$

Speziell $\vec{u} = \vec{a}_1$, d.h. $[\vec{u}]_A = \underline{e}_1 \implies$ 1. Spalten von $[g \circ f]^C_A$ und von $[g]^C_B \cdot [f]^B_A$ sind gleich.

Erhalte: $[g \circ f]^C_A = [g]^C_B \cdot [f]^B_A \quad \blacksquare$

5.4 Notizen

(a) $id_V : V \to V$, $id_V(\vec{v}) = \vec{v}$

Dann gilt: $[\, id_V\,]_A^A = E$, $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$

Denn: k-te Spalte $= [\, id_V\,]_A^A \cdot e_k$

$= [\, id_V\,]_A^A \cdot [\vec{a}_k]_A = [\, id_V(\vec{a}_k)\,]_A$

$= [\vec{a}_k]_A = \underline{e_k}$

(b) Ist $f : V \to W$ linear und bijektiv,

so ist $[f]_A^B$ invertierbar und es gilt

$$\left([f]_A^B\right)^{-1} = [f^{-1}]_B^A$$

Denn: $f^{-1} \circ f = id_V$ und $f \circ f^{-1} = id_W$

$[f^{-1}]_B^A \cdot [f]_A^B \overset{(5.3)}{=} [f^{-1} \circ f]_A^A = [\, id_V\,]_A^A = E$

Analog: $[f]_A^B \cdot [f^{-1}]_B^A = E$

Jetzt folgt die Beh. ∎

(c) Ist $[f]_A^B$ eine invertierbare Matrix, so ist die lineare Abbildung $f: V \to W$ bijektiv.

$[f]_A^B$ invertierbar bedeutet: $f_*: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f_*(\underline{x}) = [f]_A^B \cdot \underline{x}$ ist invertierbar.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa_A"'] & W \arrow[d, "\kappa_B"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "f_*"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

: $f = \kappa_B^{-1} \circ f_* \circ \kappa_A \rightsquigarrow f$ ist bijektiv.

bijektive Abb.

$\blacksquare$

Beispiel

$$U = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$$
$$V = \{ s_0 + s_1 x \mid s_0, s_1 \in \mathbb{R} \}$$
$$W = \mathbb{R}^2$$

$$f: U \to V; \quad f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = r_1 + 2 r_2 x$$
$$g: V \to W; \quad g(s_0 + s_1 x) = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_0 + s_1 \end{pmatrix}$$

$$A = (x-1,\ x+1,\ x^2-1), \quad B = (x-2,\ x+2), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = g\big(f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2)\big)$$
$$= g(r_1 + 2 r_2 x) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1 + 2 r_2 \end{pmatrix}$$

- $$\left.\begin{aligned} f(x-1) &= 1 = -\tfrac{1}{4}(x-2) + \tfrac{1}{4}(x+2) \\ f(x+1) &= 1 = -\tfrac{1}{4}(x-2) + \tfrac{1}{4}(x+2) \\ f(x^2-1) &= 2x = 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (x+2) \end{aligned}\right\} \quad [f]^B_A = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1 \\ +1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$g(x-2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g(x+2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad -\mathrm{I} \ \| :2$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad +\mathrm{II}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Beispiel

$$f: U \to V; \quad f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = r_1 + 2 r_2 x$$

$$g: V \to W; \quad g(s_0 + s_1 x) = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_0 + s_1 \end{pmatrix}$$

$$A = (x-1,\ x+1,\ x^2-1), \quad B = (x-2,\ x+2),$$

$$(g \circ f)(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1 + 2 r_2 \end{pmatrix}$$

$$[f]_A^B = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1 \\ +1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}; \quad [g]_B^C = \begin{pmatrix} -3/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & -1/4 & -1/4 & 1 \\ & & 1/4 & 1/4 & 1 \\ \hline -3/2 & 5/2 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$[g \circ f]_A^C = [g]_B^C \cdot [f]_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gleich

$$(g \circ f)(x-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)(x+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{—— '' ——}$$

$$(g \circ f)(x^2-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\to [g \circ f]_A^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$