$f: \underset{\substack{\uparrow \\ A,\,A'}}{V} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ B,\,B'}}{W} \quad \longleftrightarrow \quad [f]_A^B \; ? \; [f]_{A'}^{B'}$

↳ Transformationssatz

$[id_V]_{A'}^{A} = \left([id_V]_A^{A'}\right)^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "{[f]_A^B}"] \arrow[ddd, leftrightarrow, "{[id_V]_A^{A'}}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[ddd, "{[id_W]_B^{B'}}"] \\
& V \arrow[ul, "\kappa_A"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_V"] & W \arrow[ur, "\kappa_B"] \arrow[d, "id_W"] & \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\kappa_{A'}"] & W \arrow[dr, "\kappa_{B'}"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "{[f]_{A'}^{B'}}"'] & & & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Erwarte

$[f]_{A'}^{B'} = [id_V]_B^{B'} \cdot [f]_A^B \cdot [id_V]_{A'}^{A}$

Transformationsformel

$id_V : V \longrightarrow V, \quad id_V(\vec{x}) = \vec{x}$ linear

$[id_V]_A^{A'}$

Transformationsmatrix

5.5 Basistransformation:

Vorgelegt: $\mathbb{K}$-VR V mit zwei Basen A_{alt} und A_{neu}.

$$\boxed{\underline{[id_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}}} \cdot \underline{[\vec{v}]}_{A_{alt}} = \underline{[id_V(\vec{v})]_{A_{neu}} = [\vec{v}]_{A_{neu}}}}$$

Also: $A_{alt} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, $A_{neu} = (\vec{a}_1{}', \ldots, \vec{a}_n{}')$

$$\vec{v} = r_1 \vec{a}_1 + \ldots + r_n \vec{a}_n$$

$$\vec{v} = s_1 \vec{a}_1{}' + \ldots + s_n \vec{a}_n{}'$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}}_{[\vec{v}]_{A_{neu}}} = [id_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}}_{[\vec{v}]_{A_{alt}}}$$

$[id_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}}$ heißt **Transformationsmatrix** von A_{alt} in A_{neu}.

k-te Spalte von $[id_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}}$: $\begin{pmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{pmatrix} = [id_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}} \cdot \underline{e}_k$

$$= [id_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}} \cdot [\vec{a}_k]_{A_{alt}} = [\vec{a}_k]_{A_{neu}},$$

d.h. $\boxed{\vec{a}_k = t_{1k} \cdot \vec{a}_1{}' + \ldots + t_{nk} \cdot \vec{a}_n{}'}$

Beispiel 1 $\quad V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$

$$A_{alt} = (1, x, x^2), \quad A_{neu} = (1-x,\ 1+x,\ 1-x^2)$$

Gesucht: $T = [id_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$1 = t_{11}\cdot(1-x) + t_{21}(1+x) + t_{31}\cdot(1-x^2) = t_{11}+t_{21}+t_{31} + (t_{21}-t_{11})x - t_{31}x^2$$
$$x = t_{12}\cdot(1-x) + t_{22}\cdot(1+x) + t_{32}\cdot(1-x^2) = t_{12}+t_{22}+t_{32} + (t_{22}-t_{12})x - t_{32}x^2$$
$$x^2 = t_{13}\cdot(1-x) + t_{23}\cdot(1+x) + t_{33}\cdot(1-x^2) = t_{13}+t_{23}+t_{33} + (t_{23}-t_{13})x - t_{33}x^2$$

$$\left.\begin{array}{lll} 1 = t_{11}+t_{21}+\cancel{t_{31}}, & 0 = t_{21}-t_{11}, & 0 = -t_{31} \\ 0 = t_{12}+t_{22}+\cancel{t_{32}}, & 1 = t_{22}-t_{12}, & 0 = -t_{32} \\ 0 = t_{13}+t_{23}+t_{33}, & 0 = t_{23}-t_{13}, & 1 = -t_{33} \end{array}\right\}$$

LGS: 9 Gl, 9 Var.

$t_{31} = 0$

$t_{32} = 0$

$$\begin{aligned} t_{11} + t_{21} &= 1 \\ -t_{11} + t_{21} &= 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad t_{11} = t_{21} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} t_{12} + t_{22} &= 0 \\ -t_{12} + t_{22} &= 1 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad t_{22} = \frac{1}{2}, \quad t_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$t_{13} = t_{23} \quad \rightsquigarrow \quad 0 = 2\cdot t_{13} + t_{33} = 2t_{13} - 1$$

$$\rightsquigarrow \quad t_{13} = t_{23} = \frac{1}{2}, \quad t_{33} = -1$$

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad [x^2+x+1]_{A_{neu}} = T\cdot[x^2+x+1]_{A_{alt}} = T\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\3/2\\1\end{pmatrix}$$

d.h. $x^2+x+1 = \frac{1}{2}\cdot(1-x) + \frac{3}{2}\cdot(1+x) - (1-x^2)$

Beispiel 2: $V = \mathbb{R}^3$, $A_{alt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_{neu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Gesucht: $T = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{A_{neu}}_{A_{alt}}$

1te Spalte von T: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_{31} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix}$$

etc.

$\rightsquigarrow \quad A_{alt} = A_{neu} \cdot T$, Schema: $A_{neu} \mid A_{alt}$

Ziel: Gauß $\rightsquigarrow E \mid T$

Kochrezept (für $V = \mathbb{K}^n$!)

Zum Ausrechnen von $T = [\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}]^{A_{neu}}_{A_{alt}}$:

$A_{neu} \mid A_{alt} \xrightarrow{\text{Gauß}} E \mid T$

(überprüft auch, ob A_{neu} Basis)

Hier:
$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \\ -2\cdot\mathrm{II} \,\|\, :3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} -3\cdot\mathrm{III} \\ +2\cdot\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow E \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ -2/3 & 4/3 & 1 \\ -1/3 & -1 & 0 \end{array}\right.$$

d.h. $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2/3 & 4/3 & 1 \\ -1/3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel 3 : $V = \mathbb{R}^3$, $A_{alt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{neu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$T = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{A_{neu}}_{A_{alt}}$ (Schema : $A_{neu} \mid A_{alt} = E$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ -2\,\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow E \mid T = \begin{pmatrix} 5/2 & -2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{A_{neu}} = T \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{A_{alt}} = \begin{pmatrix} 5/2 & -2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 25/2 & -4 + 3/2 \\ -5/2 & +2 - 3/2 \\ -5 & +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d.h. $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

<u>Beispiel 4</u>: $A_{alt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $V = \operatorname{span} A_{alt} \subseteq \mathbb{R}^3$

$A_{neu} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$: Ist A_{neu} eine Basis von V?

Falls ja: Bestimme $T = [id_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}}$

$A_{neu} = A_{alt} \cdot X$

Offenbar: A_{alt} ist eine Basis von V.

Zeige: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \in V$, d.h. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$ hat

eine Lösung $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, und X ist invertierbar.

$$A_{alt} = A_{neu} \cdot \underbrace{X^{-1}}_{\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t_{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_{12} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = t_{21} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_{22} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Löse $A_{alt} = A_{neu} \cdot T$ ~~und zeige, dass~~ T ~~invertierbar ist~~.

$T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. T nicht invertierbar $\Rightarrow$ $\underline{u} \mapsto T \cdot \underline{u}$ nicht injektiv

$\Rightarrow$ es gibt $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit $T \cdot \underline{u} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ $A_{alt} \cdot \underline{u} = A_{neu} \cdot T \cdot \underline{u} = A_{neu} \cdot \underline{0} = \underline{0}$

d.h. A_{alt} keine Basis – ist aber eine Basis

<u>Beispiel 4</u>: $A_{alt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $V = \operatorname{span} A_{alt} \subseteq \mathbb{R}^3$

$A_{neu} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$: Ist A_{neu} eine Basis von V?

Falls ja: Bestimme $T = [\mathrm{id}_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}}$

Hierzu reicht: Löse $A_{neu} \cdot T = A_{alt}$

Schema $A_{neu} \mid A_{alt}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot\mathrm{III} \\ -\mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} \cancel{0} & \cancel{7} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ 0 & 7 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & -1 \end{array}\right) :7 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array}\right) +4\cdot\mathrm{II}$$

$$\rightsquigarrow E \mid T = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix} = [\mathrm{id}_V]^{A_{neu}}_{A_{alt}}$$

Gleichzeitig habe gezeigt: A_{neu} ist eine Basis von V.

5.6: Notiz: Vorgelegt: $\mathbb{K}$-VR V, Basen A, A' von V.

Dann gilt $[\mathrm{id}_V]^{A}_{A'} = \left([\mathrm{id}_V]^{A'}_{A}\right)^{-1}$.

Beweis $[\mathrm{id}_V]^{A}_{A'} \cdot [\mathrm{id}_V]^{A'}_{A} = [\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V]^{A}_{A}$

$= [\mathrm{id}_V]^{A}_{A} = E$,

analog: $[\mathrm{id}_V]^{A'}_{A} \cdot [\mathrm{id}_V]^{A}_{A'} = E$.

Damit folgt die Behauptung. $\blacksquare$

5.7 Die Transformationsformel:

Vorgelegt sind zwei $\mathbb{K}$-VR V, W, Basen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ von V, Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von W sowie eine lineare Abbildung $f: V \to W$

Dann gilt:

$$[f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'} = [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \cdot \left([\mathrm{id}_V]^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}\right)^{-1}$$

bzw.: $[f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'} = [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \cdot [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "{[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}}"] & & & \mathbb{K}^m \arrow[ddd, "{[\mathrm{id}_W]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}"] \\
& V \arrow[ul, "\kappa_{\mathcal{A}}"'] \arrow[r, "f"] & W \arrow[ur, "\kappa_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_W"] & \\
& V \arrow[u, "\mathrm{id}_V"] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\kappa_{\mathcal{A}'}"] & W \arrow[dr, "\kappa_{\mathcal{B}'}"] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[uuu, "{[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}}"] \arrow[rrr, "{[f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}}"'] & & & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Beweis:

$[\mathrm{id}_W]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \cdot [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}$

$= [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot [f \circ \mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}'}$

$= [\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}$

$= [f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}$ ∎

Beispiel: $V = W = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$

$$f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = -r_1 + (r_1 - 2r_2)x + 2r_2 x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} A = B = (1, x, x^2) \\ A' = B' = (1, x-1, x^2-1) \end{array}\right\} \text{ Basen von } V$$

"Klar": $[f]_A^A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Berechne $[f]_{A'}^{A'}$ (i) direkt, (ii) mit der Transformationsformel

(i) $f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x^2-1)$

$f(x-1) = -1 + x = 0 \cdot 1 + 1\,(x-1) + 0 \cdot (x^2-1)$

$f(x^2-1) = 2x^2 - 2x = 2 \cdot (x^2-1) - 2 \cdot (x-1) + 0 \cdot 1$

$$[f]_{A'}^{A'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) $[id_V]_A^{A'}$, $\underline{[id_V]_{A'}^A}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ x-1 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ x^2-1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{array}\right\}$$

$$[id_V]_{A'}^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[id_V]_A^{A'} = \left([id_V]_{A'}^A \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: $V = W = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$

$$f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = -r_1 + (r_1 - 2r_2)x + 2r_2 x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} A = B = (1, x, x^2) \\ A' = B' = (1, x-1, x^2-1) \end{array}\right\} \text{Basen von } V$$

$$[f]^A_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad [f]^{A'}_{A'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$[id_V]^A_{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad [id_V]^{A'}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]^{A'}_{A'} = [id_V]^{A'}_{A} [f]^A_A \cdot [id_V]^A_{A'}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Wir betrachten die beiden über die folgenden Gleichungen gegebenen Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U : x - y + z = 0 \quad \text{und} \quad V : x + y + z = 0.$$

Hausaufgabe
IngMa2.11

Weiterhin vereinbaren wir die folgenden Bezeichnungen:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sowie

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Zeige ausschließlich mit Hilfe der Definition: U ist ein Untervektorraum.

b. Weise nach, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von U ist.

c. Bestimme eine Basis des Schnitts $U \cap V$.

d. Bestimme $\ker(M)$ und begründe, dass die Matrix M nicht invertierbar ist.

e. Zeige, dass für $x \in U$ der Vektor $M \cdot x$ in V liegt; wir erhalten daher eine durch $\varphi(x) = M \cdot x$ definierte Abbildung $\varphi : U \to V$. Wieso ist diese Abbildung linear?

f. Bestimme die Darstellungsmatrix der in Teil e. eingeführten Abbildung φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

g. Zeige, dass φ invertierbar ist und bestimme die Darstellungsmatrix von φ^{-1} bezüglich der Basen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$.