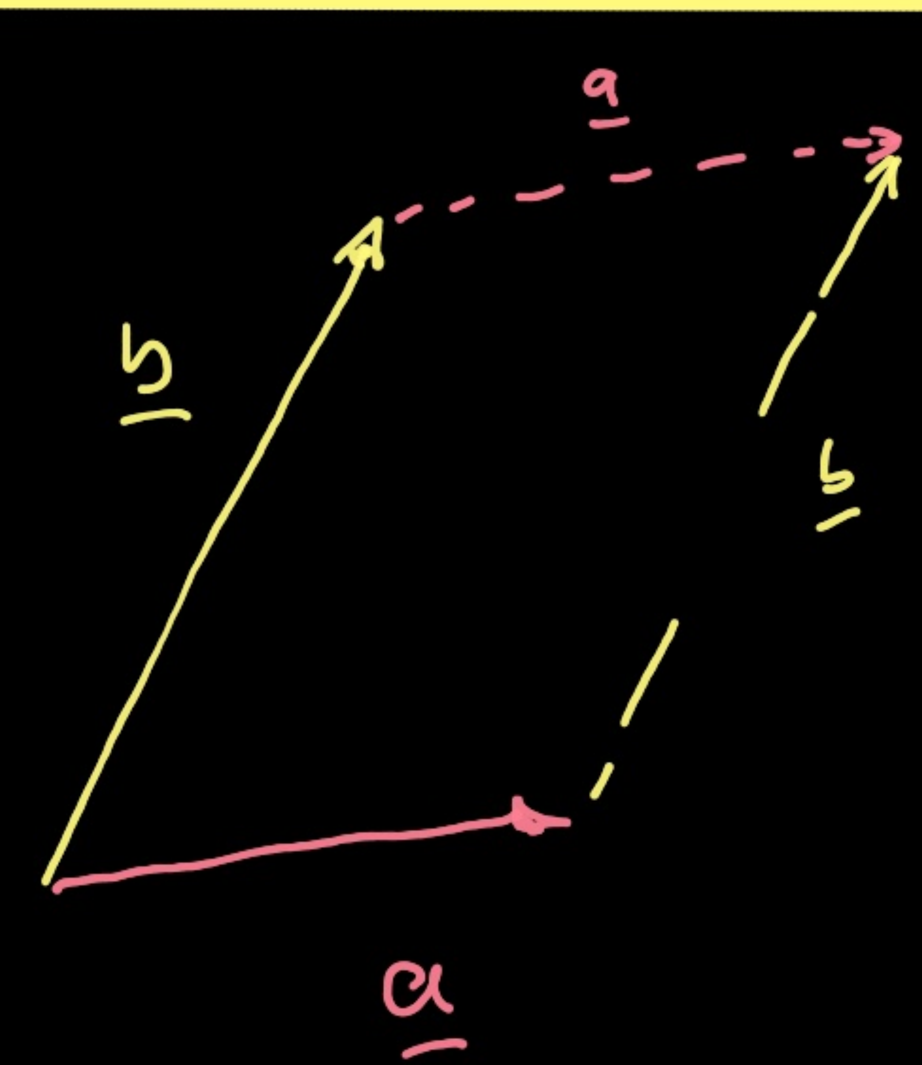
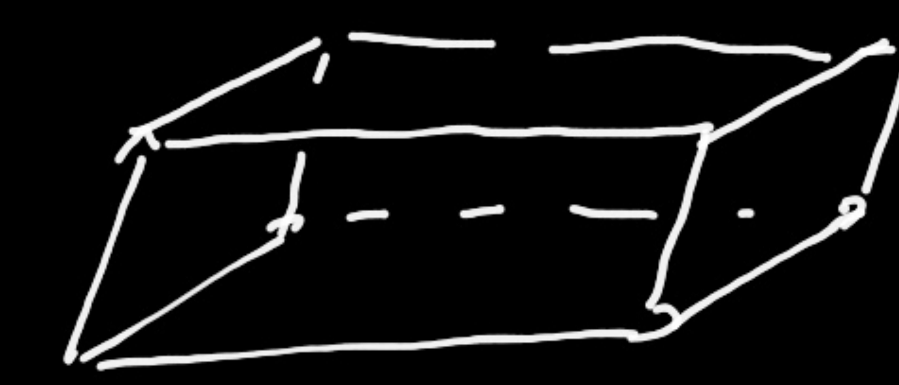
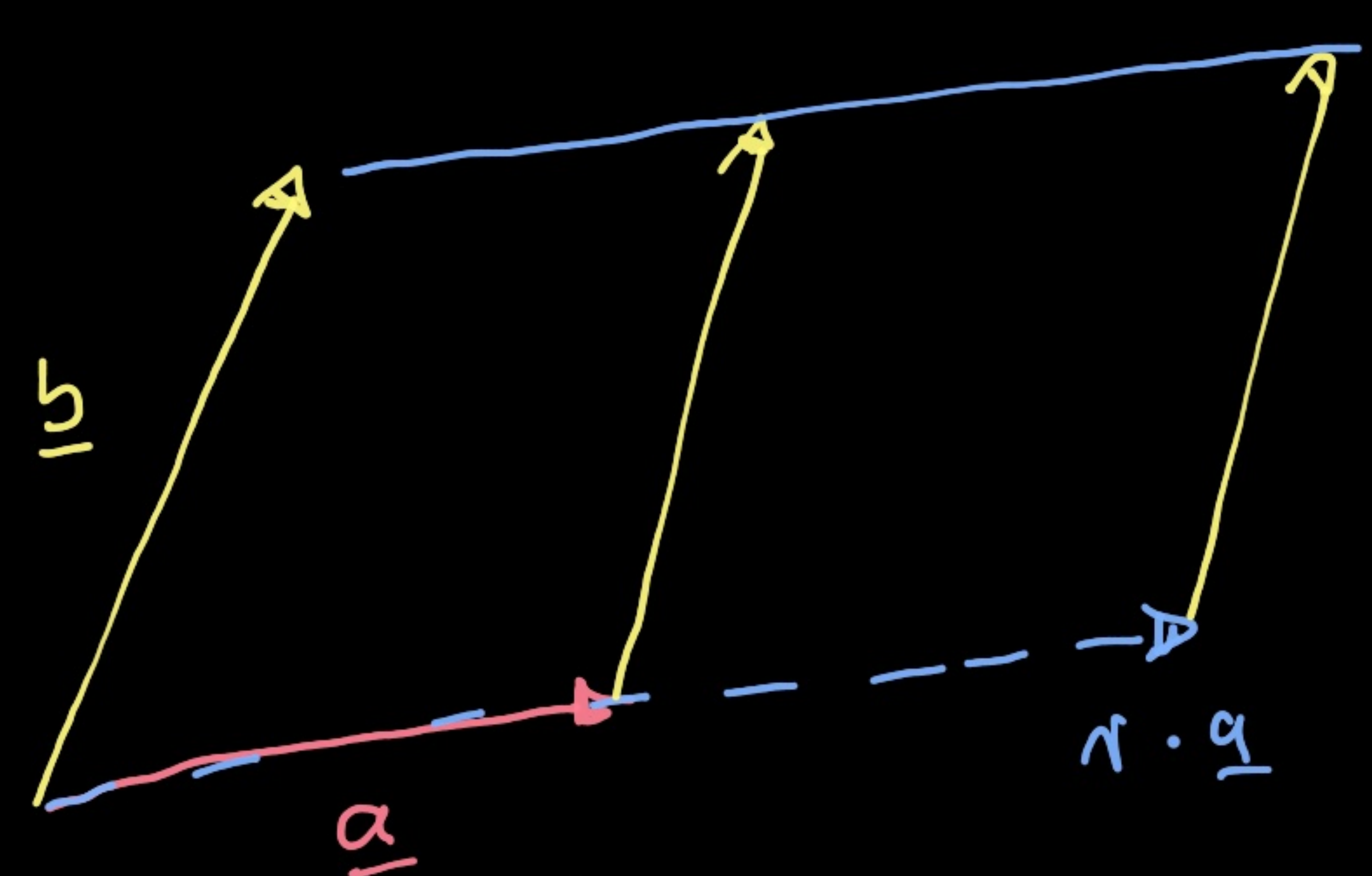
6. Die Determinante



$\mathrm{Vol}(\underline{a}, \underline{b})$
$=$ Flächeninhalt des von $\underline{a}, \underline{b}$ aufgespannten Parallelogramm



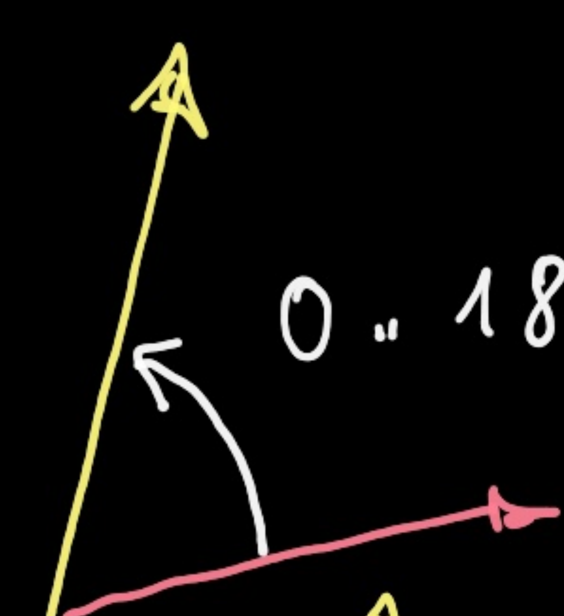
"Spat"



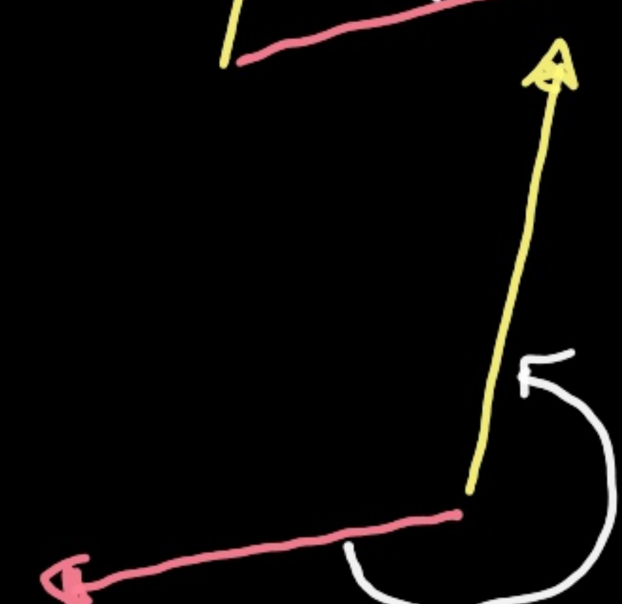
$$\mathrm{Vol}(r\underline{a}, \underline{b}) = |r| \cdot \mathrm{Vol}(\underline{a}, \underline{b})$$

$\det(\underline{a}, \underline{b}) =$ "Volumen mit Vorzeichen"

$$\mathrm{Vol}(\underline{a}, \underline{b}) = |\det(\underline{a}, \underline{b})|$$



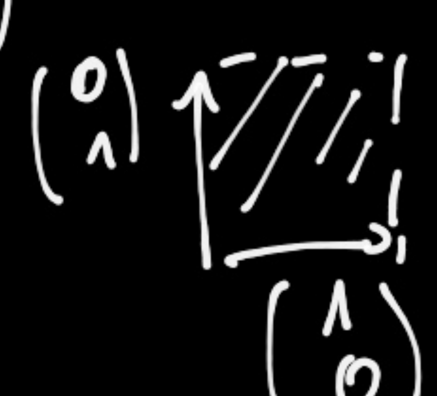
$0 .. 180° \leadsto \det \geq 0$
"Rechtssystem"



$180° .. 360° \leadsto \det \leq 0$
"Linkssystem"

$$\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{b} \\ \swarrow & \swarrow \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

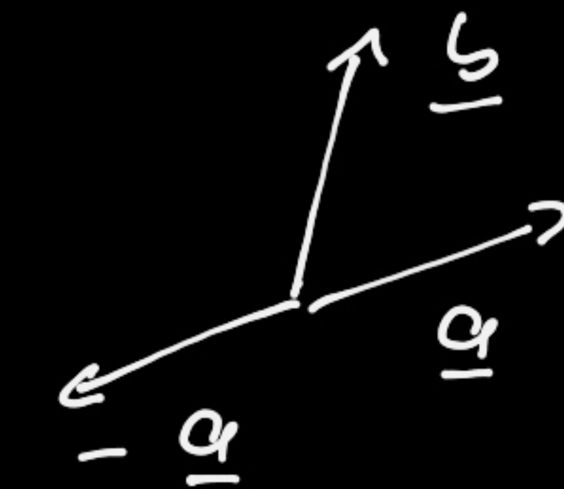


Eigenschaften der Determinante:

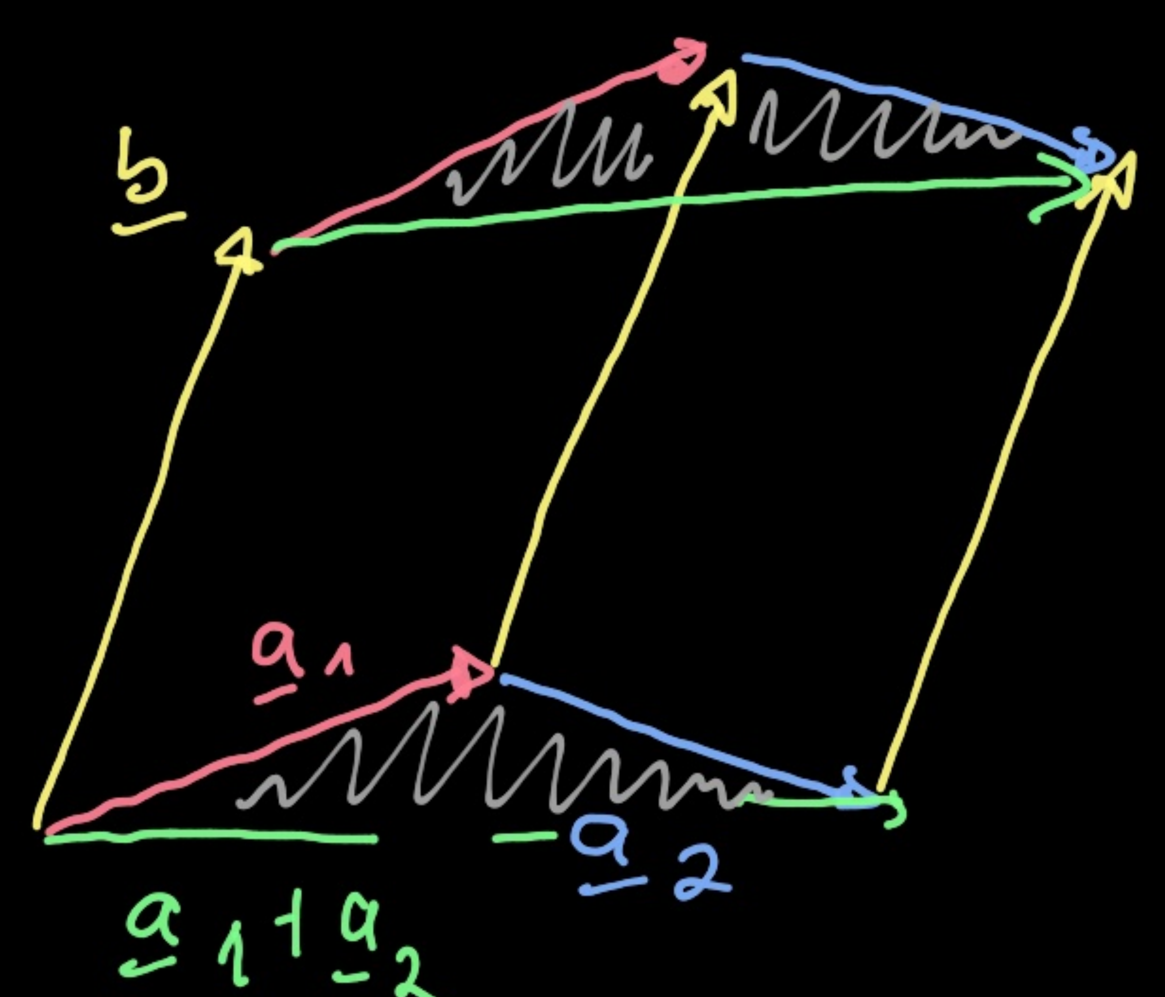
- $\det(r \cdot \underline{a}, \underline{b}) = r \cdot \det(\underline{a}, \underline{b})$

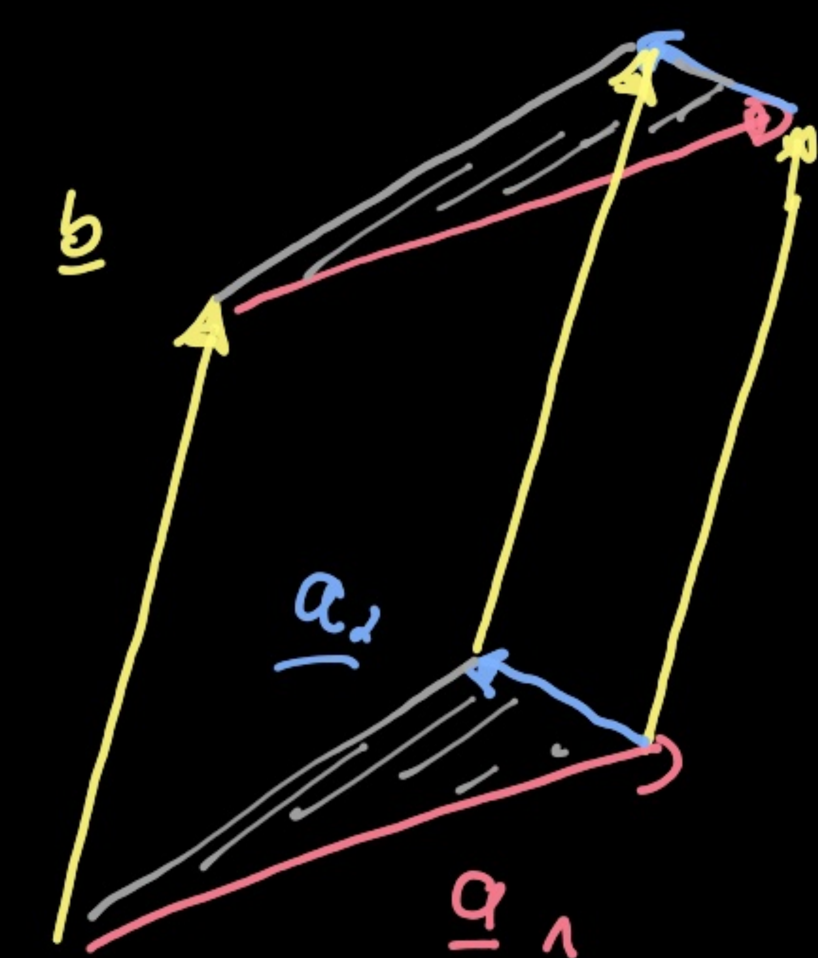
  Speziell: $\det(\underline{0}, \underline{b}) = \det(0 \cdot \underline{0}, \underline{b}) = 0 \cdot \det(\underline{0}, \underline{b}) = 0$

  $\det(-\underline{a}, \underline{b}) = -\det(\underline{a}, \underline{b})$



- $\det(\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{b}) = \det(\underline{a}_1, \underline{b}) + \det(\underline{a}_2, \underline{b})$

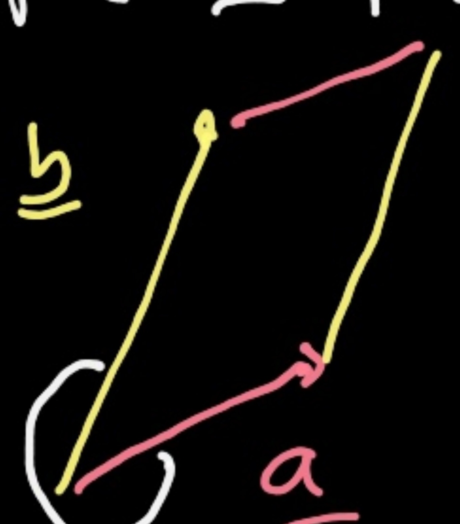




$\mathrm{Vol}(\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{b})$

$= \mathrm{Vol}(\underline{a}_1, \underline{b}) - \mathrm{Vol}(\underline{a}_2, \underline{b})$

- $\det(\underline{b}, \underline{a}) = -\det(\underline{a}, \underline{b})$

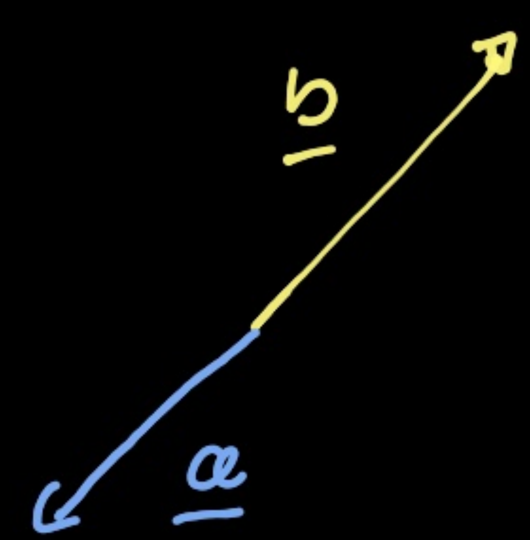


Notiz: $0 = \det(\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{b})$

$= \det(\underline{a}, \underline{a} + \underline{b}) = \det(\underline{b}, \underline{a} + \underline{b})$

$= \cancel{\det(\underline{a}, \underline{a})} + \det(\underline{a}, \underline{b}) + \det(\underline{b}, \underline{a}) + \cancel{\det(\underline{b}, \underline{b})}$

- $\det(\underline{a}, \underline{b}) = 0$, falls $\underline{a}, \underline{b}$ linear abhängig



$$\boxed{\begin{array}{l} \det(\underbrace{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n}_{\text{fasse dies als Matrix auf}}), \quad \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \in \mathbb{K}^n \\ \rightsquigarrow \det : \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K} \end{array}}$$

Vorgelegt: $\mathbb{K}$ Körper

Gesucht ist eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1.) $\det E_n = 1$

(2.) $\det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = 0$, falls $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear abhängig

(3.) $\det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i + \underline{b}, \underline{a}_{i+1}, \ldots, \underline{a}_n)$

$$= \det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \ldots, \underline{a}_n)$$
$$+ \det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{i-1}, \underline{b}, \underline{a}_{i+1}, \ldots, \underline{a}_n)$$

und $\det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{i-1}, r \cdot \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \ldots, \underline{a}_n)$

$$= r \cdot \det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \ldots, \underline{a}_n)$$

Identifiziere $\mathbb{K}^{n\times n} \longleftrightarrow \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n\text{-mal}}$

$$(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n) \longleftrightarrow (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Strukturelle Einordnung

Eigenschaft (3.) Für jede Wahl von $\underline{a}_1, -, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_{i+1}, -, \underline{a}_n)$ ist

$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$; $\det_i(\underline{a}_1, -, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_{i+1}, -, \underline{a}_n)(\underline{x}) = \det(\underline{a}_1, -, \underline{a}_{i-1}, \underline{x}, \underline{a}_{i+1}, -, \underline{a}_n)$

linear, d.h. det ist linear in der i-ten Spalte.

Das gilt für jedes i, d.h. det ist multilinear.

Eigenschaft (2.) det ist eine alternierende multilineare Abbildung.

6.1 Satz: Es gibt genau eine alternierende multilineare Abbildung

$$\det : \mathbb{K}^{n\times n} = \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit } \det E_n = 1.$$

(Beweis → Ergänzungsteil)

Diese Abb. heißt Determinante.

Beispiel 1:

$$\det\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} - 3\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}}_{0\quad(2.)}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}1&0\\2&-2\end{pmatrix} \qquad (3.)$$

$$= \det\begin{pmatrix}1&0\\2&-2\end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix}0&0\\-2&-2\end{pmatrix}}_{=0\quad(2)} = \det\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix} = \det\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\;\; (-2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \overset{(3.)}{=} (-2)\underbrace{\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{=1\quad(1.)}$$

$$= -2$$

Hierbei erkennen wir:

(1.) $\boxed{\text{Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer } \underline{\text{anderen}} \text{ Spalte ändert die Determinante nicht:}}$

z.B. für die erste Spalte:

$$\det(\underline{a}_1 + r\cdot\underline{a}_i, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) + r\cdot\underbrace{\det(\underline{a}_i, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)}_{=0 \text{ wg. } (2.)}$$

(2.) Multiplikation einer Spalte mit r verändert die Determinante auf das r-fache (det ist multilinear!)

(3.) Vertauschen zweier Spalten verändert das Vorzeichen der Determinante:

z.B. $\det(\underline{a}_2, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) = -\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n)$

Dazu:
$$\underline{0} \overset{(2.)}{=} \det(\underline{a}_1+\underline{a}_2, \underline{a}_1+\underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n)$$
$$\overset{(3.)}{=} \underbrace{\det(\underline{a}_1, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n)}_{=0} + \underline{\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n)}$$
$$+ \underline{\det(\underline{a}_2, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n)} + \underbrace{\det(\underline{a}_2, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n)}_{=0}$$

Beispiel 2

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} = (-3)\cdot(-2)\cdot\det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{lin. abh.}} = 0$$

$$\begin{array}{cc} & \ \ -4\cdot\mathrm{I}\ \ -\mathrm{I} \end{array}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -\mathrm{I} \end{array}$$

$$= -2 \cdot \det \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & -\mathrm{II} \end{array}\end{array} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (-2)\cdot(-2) \cdot \det \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} -\mathrm{III} & -\mathrm{III} & \end{array}\end{array} = 4 \cdot \det E_3 = 4.$$

<u>Notiz</u>: $\boxed{\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc}$

Bew: 1. Fall: $a \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & c \\ b/a & d \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} & -c \cdot \mathrm{I} \end{array}\end{array} = a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & \underbrace{d - \frac{bc}{a}} \end{pmatrix}$$

$$= (ad - bc) \cdot \det \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} -\frac{b}{a} \cdot \mathrm{II} & \end{array}\end{array} = (ad - bc) \cdot \det E_2$$

$$= ad - bc \quad ✓$$

2. Fall. $a = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & d \end{pmatrix} = b \det \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix} = b \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -bc \det E_2$$

$$= 0 \cdot d - b \cdot c \quad ✓$$

<u>Notiz</u>: $\det\begin{pmatrix} r_1 & & * \\ & r_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & r_n \end{pmatrix} = r_1 \cdot \ldots \cdot r_n$

↑ "obere rechte Dreiecksmatrix"

Denn: $\det\begin{pmatrix} r_1 & & * \\ & r_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & r_n \end{pmatrix} = r_1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & r_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & r_n \end{pmatrix}$

$-a_{12}\cdot\mathrm{I} \quad -a_{1n}\cdot\mathrm{I}$

$$= r_1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & r_n \end{pmatrix} = r_1 r_2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & r_3 & & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & r_n \end{pmatrix}$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & r_n \end{pmatrix} = \text{usw.} = r_1 r_2 \cdots r_n \cdot \underbrace{\det E_n}_{=1} \qquad \blacksquare$$

<u>Notiz</u> $\det\begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & r_n \end{pmatrix} = r_1 \cdot \ldots \cdot r_n$

Denn: $= r_n \cdot \det\begin{pmatrix} r_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ * & & r_{n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} = r_n \cdot \det\begin{pmatrix} r_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ * & & r_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{usw.} \qquad \blacksquare$

Beispiel

$$\det \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & -\mathrm{I} & -2\cdot\mathrm{I} \end{array}\end{array} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & \underline{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot \det \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & 3\cdot\mathrm{II} \end{array}\end{array} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot 2 = -4.$$

Notiz $A_1 \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $A_2 \in \mathbb{K}^{m \times m}$

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2$$

Beispiel

$$\det\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \pi & e & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -42 & 10^{10} & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 50 & 36 & 49 & 128 & 3 & 1 \\ \cos 3 & 5 & 7 & -1 & 9 & 2 \end{array}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 49 & 128 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 9 & 2 \end{array}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)\right] \cdot \left[2 \cdot 2 - 3 \cdot 3\right] \cdot \left[3 \cdot 2 - 9 \cdot 1\right]$$

$$= 2 \cdot (-5)(-3) = \underline{\underline{30}}$$

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ setze

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ zu A transponierte Matrix

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6.2 Satz (o. Bew.)

(a) Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $\det(A^T) = \det(A)$

(b) Für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

Interpretation von (b): $B = (\underline{b}_1 \dots \underline{b}_n)$, $\det B =$ Volumen des n-dim. Spats mit Seiten $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$.

$\det(A \cdot B) = \det(A \cdot \underline{b}_1 \dots A \cdot \underline{b}_n) =$ Volumen des n-dim. Spats mit Seiten $A\underline{b}_1, \dots, A\underline{b}_n$

$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$: Die Abbildung $\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}$ verzerrt das Volumen $\det B$ um das $\det A$-fache.

Zu (a):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}^T$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{array}{cc} \underline{-\mathrm{I}} & \underline{-\mathrm{I}} \end{array}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ziehe die ersten Zeile von der zweiten und dritten Zeile ab.

Allgemein

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1^T \\ \vdots \\ \underline{a}_n^T \end{pmatrix} = \det(\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \underline{a}_3 \ \dots \ \underline{a}_n)$$

$$= \det(\underline{a}_1 \ \ \underline{a}_2 + r\cdot\underline{a}_1 \ \ \underline{a}_3 \ \dots \ \underline{a}_n) = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1^T \\ \underline{a}_2^T + r\cdot\underline{a}_1 \\ \underline{a}_3 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

Also: Darf auch elementare Zeilen- statt Spaltenumformungen machen.

Eine längliche Rechnung:

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{A} = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= b_1 \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} + b_2 \det\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} + b_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= -b_1 \det\left(\begin{array}{c|cc} 1 & a_1 & c_1 \\ \hline 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{array}\right) + b_2 \det\left(\begin{array}{c|cc} 1 & a_2 & c_2 \\ \hline 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{array}\right) - b_3 \det\left(\begin{array}{c|cc} 1 & a_3 & c_3 \\ \hline 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \end{array}\right)$$

$$= -b_1 \det\begin{pmatrix} a_2 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + b_2 \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

in A streiche 1. Zeile, 2. Spalte

in A streiche 2. Zeile, 2. Spalte

in A streiche 3. Zeile, 2. Spalte

6.3 Entwicklungssatz von Laplace

Vorgelegt: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $\quad (n \geq 2)$.

A_{ij} bezeichne die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht

Dann gilt

(a) $$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

"Entwickeln nach i-ter Zeile"

(b) $$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

"Entwickeln nach j-ter Spalte"

Vorzeichen erhalte aus "Schbrettmuster"

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & & & & \cdots \end{matrix}$$

Beispiel $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\det \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 3-2i \\ 1 & 1-i & 4i \\ \boxed{-1 \quad 2+i \quad 0} \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach 3. Zeile

Schachbrett
$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1+i & 0 & 3-2i \\ 1 & 1-i & 4i \\ -1 & 2+i & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1+i & 0 & 3-2i \\ 1 & 1-i & 4i \\ -1 & 2+i & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1+i & 0 & 3-2i \\ 1 & 1-i & 4i \\ -1 & 2+i & 0 \end{matrix}$$

$$= +(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3-2i \\ 1-i & 4i \end{pmatrix}$$

$$- (2+i) \det \begin{pmatrix} 1+i & 3-2i \\ 1 & 4i \end{pmatrix}$$

$$+ 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$= +(1-i)(3-2i) - (2+i)\left[(1+i) \cdot 4i - (3-2i)\right]$$

$$= 1 - 5i - (2+i)(-7+6i) = 1 - 5i - (-20+5i)$$

$$= 21 - 10i \quad (\text{hoffentlich} \dots)$$

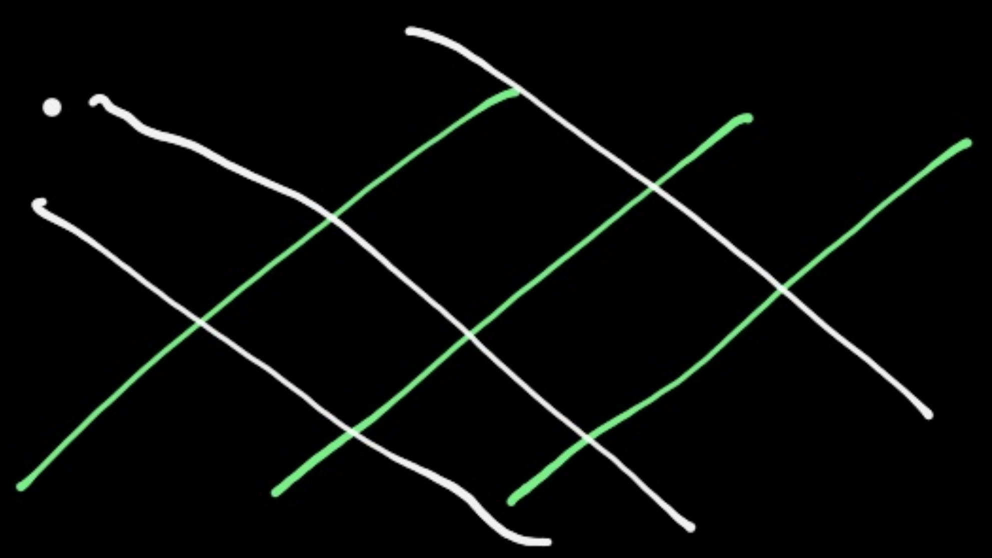
Regel von SARRUS:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \det\begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{a_1 b_2 c_3} - \underline{a_1 b_3 c_2} - \underline{a_2 b_1 c_3} + \underline{a_2 b_3 c_1} + \underline{a_3 b_1 c_2} - \underline{a_3 b_2 c_1}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

$a_3 b_2 c_1 \quad a_1 b_3 c_2 \quad a_2 b_1 c_3 \quad a_1 b_2 c_3 \quad b_1 c_2 a_3 \quad c_1 a_2 b_3$



"Lattenzaun"

$$\det = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3$$
$$- a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Beispiel

$$d = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 6$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ & 3 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -1 & 0 & 6 \end{array}$$

$$d = -1 + 0 + 6 - 3 - 0 + 4 = 6$$

SARRUS **NUR** für (3×3)-Determinanten!

6.3 Satz $A, T \in \mathbb{K}^{n \times n}$; T invertierbar

(a) $$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det T}$$

(b) $$\det(TAT^{-1}) = \det A$$

(c) A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$

Beweis: (a) $1 = \det(E_n) = \det(T \cdot T^{-1}) = \det T \cdot \det(T^{-1})$

$\Rightarrow \det T \neq 0$ und $\det(T^{-1}) = 1/\det T$

(b) $\det(TAT^{-1}) = \det(T) \cdot \det(A) \cdot \underbrace{\det(T^{-1})}_{= 1/\det T} = \det A$

(c) A invertierbar $\Rightarrow \det A \neq 0$: siehe (a)

A nicht invertierbar $\Rightarrow$ Spalten von A sind linear abh.

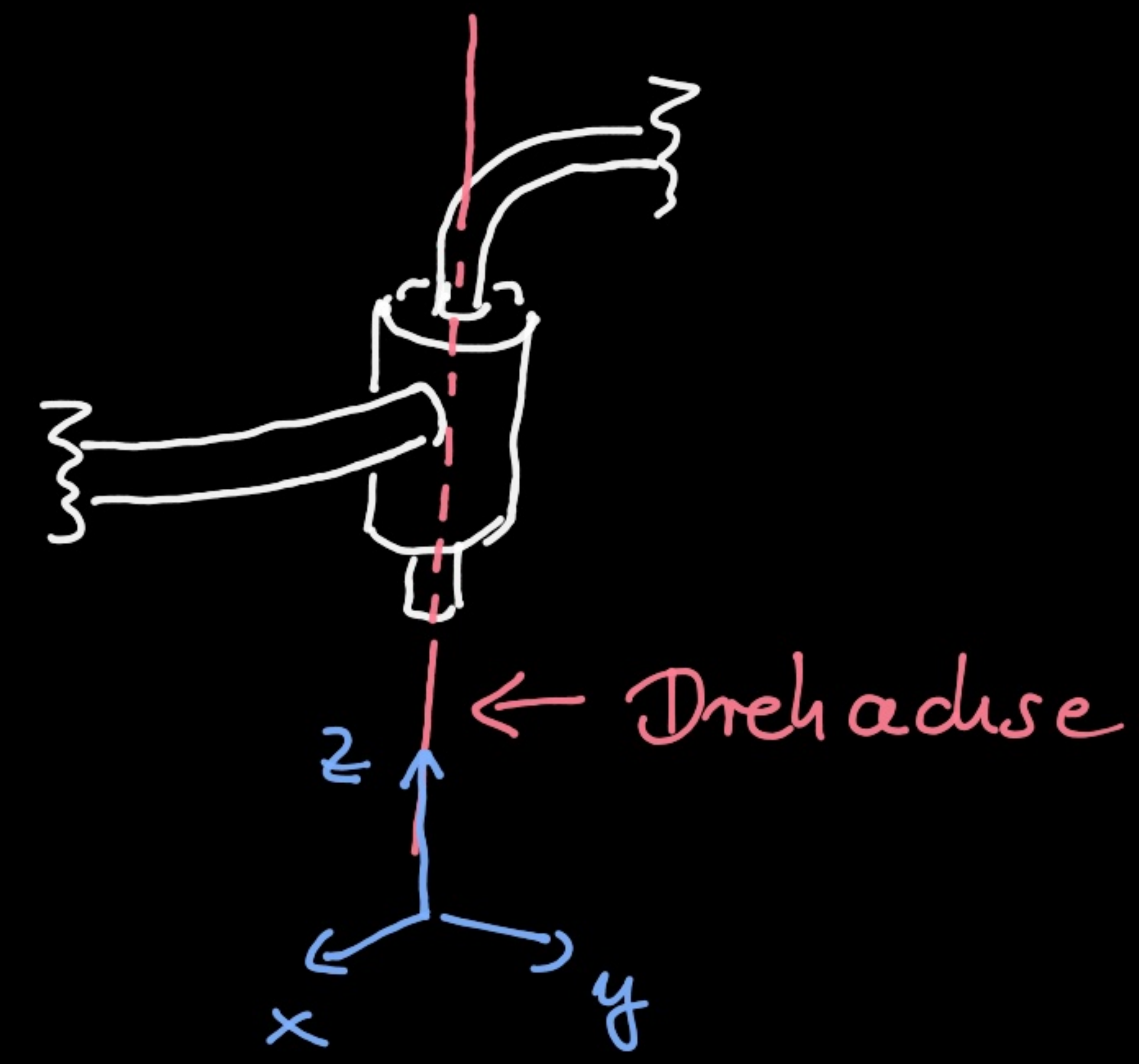
$\Rightarrow \det A = 0$

∎

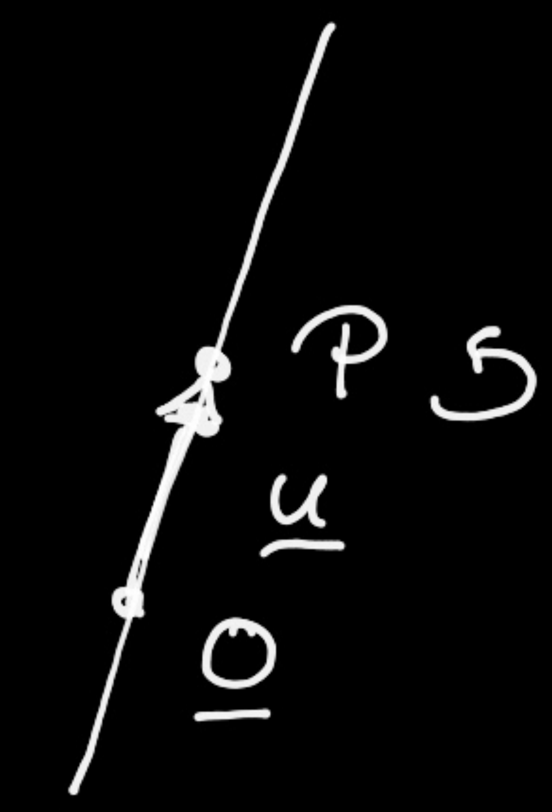
Drehungen im $\mathbb{R}^3$:

$\underline{0}$ bleibt fest

$\rightsquigarrow$ Drehung wird beschrieben durch $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$



Achse (punktweise fest)



Es gibt $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ mit $R \cdot \underline{u} \overset{?}{=} \underline{u}$ $\quad (\underline{u} \neq \underline{0})$

Gibt es $t \in \mathbb{R}$ und $\underline{u} \neq 0$ mit $R \cdot \underline{u} = t \cdot \underline{u}$

Umschreiben:

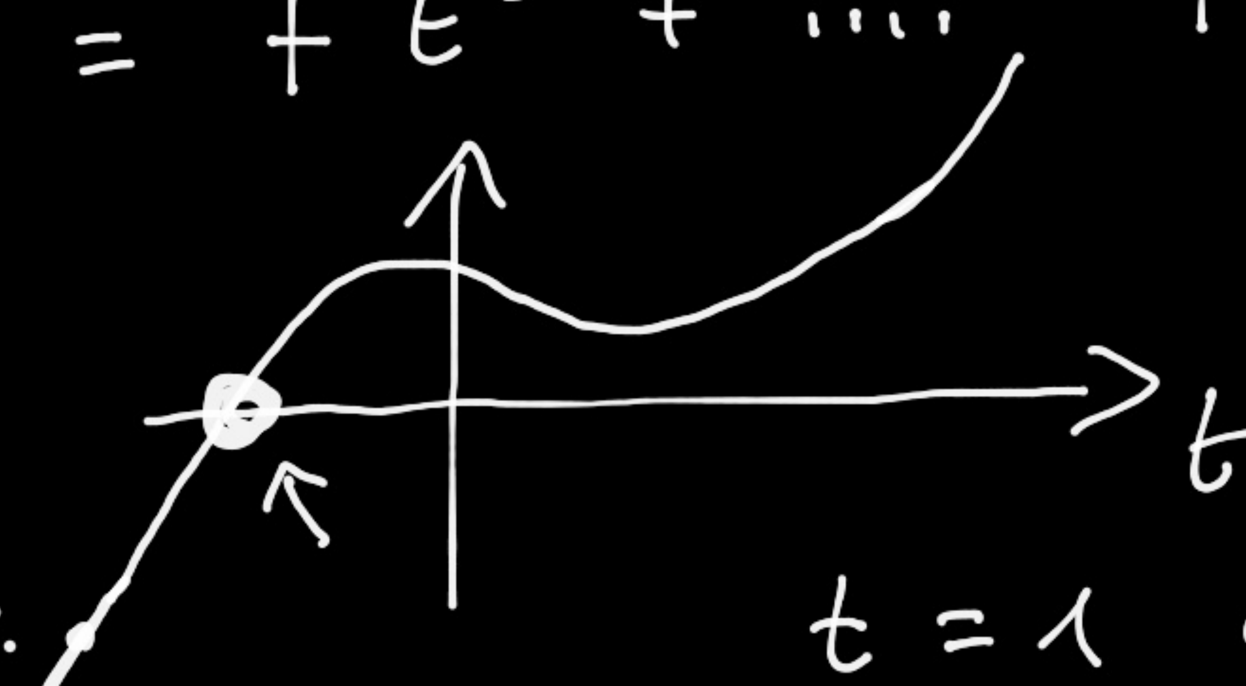
$$\begin{aligned} \underline{0} &= R \cdot \underline{u} - t \cdot \underline{u} \\ &= R \cdot \underline{u} - t \cdot E_3 \cdot \underline{u} \\ &= (R - t \cdot E_3) \cdot \underline{u} \end{aligned}$$

Gilt genau dann, wenn $\underline{u} \in \ker(R - t \cdot E_3) \neq \{\underline{0}\}$.

Äquivalent: $\quad \det(R - t \cdot E_3) = 0$

$$-\det \begin{pmatrix} r_{11} - t & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} - t & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} - t \end{pmatrix} = +t^3 + \dots$$

Polynom vom Grad 3



So ein Polynom aus $\mathbb{R}[x]$ hat eine reelle NSt. t

Drehung erhält Abstände

$\rightsquigarrow t = \pm 1$; mit mehr Arbeit: $t = 1$ auch Nullstelle

$R \cdot (r \cdot \underline{u}) = r \cdot \underline{u} \rightsquigarrow \operatorname{span}\{\underline{u}\} = \underline{\underline{\text{Achse}}}$

Hausaufgabe IngMa 12 A

(a) Berechne $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

(b) Vorgelegt ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

(i) Bestimme $\det(M - t \cdot E_5)$

(ii) Gibt es ein $\underline{u} \neq \underline{0}$ mit $M \cdot \underline{u} = 3 \cdot \underline{u}$? Wenn ja, bestimme alle derartigen $\underline{u}$.

(iii) Gibt es ein $\underline{u} \neq \underline{0}$ mit $M \cdot \underline{u} = 42 \cdot \underline{u}$? Wenn ja, bestimme alle derartigen $\underline{u}$.

(iv) Ist M invertierbar?

6.4 Die Determinante eines Endomorphismus

Vorgelegt ist ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR V sowie ein Endomorphismus $f: V \to V$ (d.i. eine lineare Selbstabbildung von V).

Wähle eine Basis A von V und setze $d = \det [f]_A^A$.

Ist B eine beliebige Basis von V, dann gilt

$$\det [f]_B^B = \det\left(T\, [f]_A^A\, T^{-1} \right) \overset{(6.3)}{=} \det [f]_A^A = d.$$

mit $T = [\mathrm{id}_V]_A^B$

Die Zahl $\det(f) = d = \det [f]_A^A$ heißt Determinante von f.

Bsp: $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$,

$f(r_0 + r_1 x + r_2 x^2) = (r_0 + r_1) + (r_1 - r_2)x + 6 r_2 x^2$

$A = (1, x, x^2)$

$$\det f = \det [f]_A^A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$$

Einschub: Polynome

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ $\quad (n \geq 3, a_n \neq 0)$

Gesucht sind Nullstellen von $p(x)$, d.h. Zahlen x_0 mit $p(x_0) = 0$

Suche speziell rationale Nullstellen $x_0 = \frac{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{Z}$ (vollst. gekürzt)

Ansatz: $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \underbrace{(b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) \cdot (vx - u)}$

$= b_{n-1} v x^n + \dots + (-b_0 u)$

Erhalte $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$

Außerdem: $a_n = b_{n-1} v$, $a_0 = -b_0 \cdot u$

Folgt: Wenn $x_0 = \frac{u}{v}$ eine NSt. von $p(x)$ ist,

dann ist v ein Teiler von a_n

und u ein Teiler von a_0

Bsp $p(x) = \underline{\underline{6}} x^3 - 2x^2 + 5x \underline{-9}$

Mögliche rationale NSt. $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{9}$

Ausprobieren: $x_0 = 1$ ist Nullstelle

Das HORNER-Schema

Idee: Zerlege

$$p(x) = \underline{a_n} x^n + \dots + a_1 x + \underline{a_0} = (b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)\cdot(x - x_0) + p(x_0)$$

$$\doteq b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + \dots + b_{k-1}x^k + \dots + b_0 x$$
$$- b_{n-1}x_0 x^{n-1} - \dots - b_k x_0 x^k - \dots - b_1 x_0 x - b_0 x_0 + p(x_0)$$

$$= \underline{b_{n-1}}\, x^n + (b_{n-2} - b_{n-1}x_0)\, x^{n-1} + \dots + \underbrace{(b_{k-1} - b_k x_0)}_{= a_k} x^k + \dots (b_0 - b_1 x_0)x + \underline{p(x_0) - b_0 x_0}$$

Koeffizientenvergleich

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{k-1} = a_k + b_k \cdot x_0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1$$
$$p(x_0) = a_0 + b_0 x_0$$

kenne ich schon: $= a_n$

$k = n-1$: $\quad b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1} x_0$

$k = n-2$: $\quad b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2} x_0$

$\vdots$

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & \\
x_0 & & +x_0 b_{n-1} & +x_0 b_{n-2} & \dots & +x_0 b_1 & +x_0 b_0 & \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + a_0 b_{n-1} & b_{n-3} & \dots & b_0 & & p(x_0) \\
 & = b_{n-1} & = b_{n-2} & & & & &
\end{array}$$

Beispiel Finde alle Nullstellen von $p(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$.

Hausaufgabe IngMa 12 B: Finde alle NSt von $x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x + 6$

Mögliche rationale NSt: $\pm 1, \pm 2$

	x^4	x^3	x^2	x	1
	1	0	-4	-1	2
$x = 1$		$+1\cdot 1$	$1\cdot 1$	$-3\cdot 1$	$-4\cdot 1$
	1	1	-3	-4	-2

$$p(x) = (x^3 + x^2 - 3x - 4)(x-1) - 2$$
$$p(1) = -2$$

	1	0	-4	-1	2
$x = -1$		-1	1	3	-2
	1	-1	-3	$+2$	0
$x = 2$		2	2	-2	
	1	1	-1	0	

$$p(x) = (x^3 - x^2 - 3x + 2)\cdot(x+1) + 0$$

$$p(x) = (x^2 + x - 1)\cdot(x-2)\cdot(x+1)$$

p-q-Formel $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

NSt. von $p(x)$ lauten: $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$; -1, 2.