Aufgabe (Klausur 2020)

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und bestimme (falls möglich) eine invertierbare Matrix T, für die TAT^{-1} Diagonalgestalt besitzt.

Ein Eigenwert einer Matrix A ist eine Zahl t, für die die Gleichung $A\cdot\underline{v} = t\cdot\underline{v}$ wenigstens eine Lösung $\underline{v} \neq \underline{0}$ besitzt. Solche $\underline{v} \neq \underline{0}$ heißt Eigenvektoren zum Eigenwert t.

Rechne: $A\cdot\underline{v} = t\cdot\underline{v} \iff A\cdot\underline{v} - \overbrace{t\cdot\underline{v}}^{t\cdot E\cdot\underline{v}} = \underline{0}$

$\iff (A - t\cdot E)\cdot\underline{v} = \underline{0}$

(lineares homogenes GLS)

Eine Lösung $\underline{v} \neq \underline{0}$ existiert genau dann, wenn $\ker(A - t\cdot E) \neq \{0\}$; das wiederum ist gleichwertig zu: $\det(A - t\cdot E) = 0$.

Aufgabe (Klausur 2020)

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und bestimme (falls möglich) eine invertierbare Matrix T, für die TAT^{-1} Diagonalgestalt besitzt.

Ansatz:

(1.) Berechne $\det(A - t\cdot E)$ und die Nullstellen t dieses Ausdrucks – das sind die Eigenwerte.

(2.) Für jeden Eigenwert t bestimme die Lösungen des LGS $(A - t\cdot E)\cdot \underline{u} = \underline{0}$ – das sind Eigenvektoren.

zu (1.) $\det\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - t\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

$$\det(A-tE) = \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1-t & -1 & -2 \\ \boxed{0} & \boxed{2-t} & \boxed{0} \\ 1 & 1 & 4-t \end{pmatrix}}_{\text{in der Diagonalen } t \text{ abziehen}} \overset{\substack{\text{Nach 2. Zeile} \\ \text{entwickeln}}}{=} (2-t)\cdot\det\begin{pmatrix} 1-t & -2 \\ 1 & 4-t \end{pmatrix}$$

Aufgabe (Klausur 2020)

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(Fortsetzung) $\det(A - t\cdot E) = (2-t)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-t & -2 \\ 1 & 4-t \end{pmatrix}$

$$= (2-t)\cdot\left[(1-t)\cdot(4-t) - 1\cdot(-2)\right]$$

$$= (2-t)\cdot(t^2 - 5t + 6) = 0$$

NICHT ausmultiplizieren

für $t=2$ oder für t mit $t^2-5t+6=0$, d.h. $t=2, t=3$

Raten $t^2-5t+6 = (t-a)\cdot(t-b) = (t-2)(t-3)$

$$= t^2 - \underbrace{(a+b)}_{=5}\cdot t + \underbrace{a\cdot b}_{=6}$$

Folgt: $t=2$ und $t=3$ sind die Eigenwerte von A

Punkt (1.) ist erledigt.

Aufgabe (Klausur 2020)

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(Fortsetzung) Für jeden der Eigenwerte $t=2$, $t=3$ löse das LGS $(A - t\cdot E)\cdot \underline{v} = \underline{0}$

$\underline{t=2}$ $\quad A - 2\cdot E = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 & -2 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 1 & 4-2 \end{pmatrix}$

Schema $\begin{array}{ccc|c} 1-2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4-2 & 0 \end{array} \curvearrowright \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \Big\| -\mathrm{II}$

Eigenraum zu $t=2$

$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$ Basis des Lösungsraums

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $t=2$: $\quad \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

Aufgabe (Klausur 2020)

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(Fortsetzung) $\underline{t=3}$

$$\left.\begin{array}{ccc} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{c} +\mathrm{II} \\ \\ -\mathrm{II} \end{array}\right\| \begin{array}{c} +2\cdot\mathrm{III} \\ \big\downarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Basis des Lösungsraums: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Ergebnisse bisher:

Eigenwerte sind $t=2$ und $t=3$,

Eigenraum zu $t=2$ hat Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Eigenraum zu $t=3$ hat Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe (Klausur 2020)

Gibt es zu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix T,

für die TAT^{-1} Diagonalgestalt besitzt?

also $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = D$ für passende $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Setze $S = T^{-1}$ $\qquad S^{-1} A S = D$ ist gleichwertig zu

$$A S = S D$$

$$S = (\underline{u}\ \ \underline{v}\ \ \underline{w})$$

$$\downarrow$$

$$A \cdot (\underline{u}\ \ \underline{v}\ \ \underline{w}) \overset{!}{=} (\underline{u}\ \ \underline{v}\ \ \underline{w}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

$$(A\underline{u}\ \ A\underline{v}\ \ A \cdot \underline{w}) \overset{!}{=} (\alpha \underline{u}\ \ \beta \underline{v}\ \ \gamma \underline{w})$$

Daher: $A\underline{u} = \alpha \underline{u}$ $\leadsto$ α Eigenwert, $\underline{u}$ zugeh. Eigenvektor

$A\underline{v} = \beta \underline{v}$ $\qquad \beta$ —"— , $\underline{v}$ —"—

$A\underline{w} = \beta \cdot \underline{w}$ $\qquad \gamma$ —"— , $\underline{w}$ —"—

Aufgabe (Klausur 2020)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Ergebnisse bisher: Eigenwerte sind $t=2$ und $t=3$,

Eigenraum zu $t=2$ hat Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Eigenraum zu $t=3$ hat Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Wenn alles klappt, dann mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Falls S invertierbar, so gilt automatisch $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

↑

S ist invertierbar, denn $\det S = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach 2. Zeile} \\ \text{entwickeln}}}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0.$$

Das gesuchte T ist $T = S^{-1}$

Aufgabe (Klausur 2020)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = S^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \quad \& \text{ Vertauschen}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \\ -I-2\cdot II \end{array} \quad \leadsto \quad \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ +III, \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad E \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right. = S^{-1} = T$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$ ist so eine Matrix.

Aufgabe (Klausur 2020)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = D \text{ bzw. } A = T^{-1} D T$$

$$A^5 = (T^{-1} D T)^5 = T^{-1} D \cancel{T T^{-1}} D \cancel{T T^{-1}} D \cancel{T T^{-1}} D \cancel{T T^{-1}} D T$$

$$= T^{-1} D^5 T$$

$$3^5 = (3^2)^2 \cdot 3$$
$$= 81 \cdot 3 = 243$$

$$D^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & & \\ & 2^5 & \\ & & 3^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & & \\ & 32 & \\ & & 243 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} D^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & & \\ & 32 & \\ & & 243 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 64 & 243 \\ -32 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & -243 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & T \\ \hline T^{-1}D^5 & A^5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & -1 & -1 & -2 \\ \hline 32 & 64 & 243 & -179 & -211 & -422 \\ -32 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & -32 & -243 & 211 & 211 & 454 \end{array}$$

Also: $A^5 = \begin{pmatrix} -179 & -211 & -422 \\ 0 & 32 & 0 \\ 211 & 211 & 454 \end{pmatrix}$

Aufgabe Bestimme:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 4a^3 & 3a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix} = a^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^3 \\ a^3 & a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3a & 4a^3 \\ 4a^3 & 3a & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{IV} - 4\cdot\text{II}}{\overset{\text{III} - \text{I}}{=}} -a^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^3 \\ a^3 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^3 \\ 0 & +a & +2 & +3 \end{pmatrix}$$

Laplace
1. Spalte

$$= -a^2 \cdot \left\{ \det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 3a^3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} - a^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & 2a & 3a^3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= -a^2 \cdot \left\{ \det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 3a^3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - a^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & a & 2a^3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= -a^2 \cdot \left\{ \det\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 2a & 3a^3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - a^3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^3 \\ 0 & a & 2a^3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$4a^2 - 3a^4 - 1$

$3a + a^5 - 4a^3$

$$= -a^2 \left\{ 4a^2 - 3a^4 - 1 - 3a^4 - a^8 + 4a^6 \right\}$$

Aufgabe Finde alle $a, b, c, q \in \mathbb{R}$ mit

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3\underline{q}\underline{+2} & 4\underline{q}\underline{+2} & 5\underline{q}\underline{+3} \\ a & b & c \end{pmatrix} = q \qquad (*)$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3q+2 & 4q+3 & 5q+3 \\ a & b & c \end{pmatrix} = q \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Also: $q = 0$ oder

$$1 = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & b-2a & c-2a \end{pmatrix} = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} +2 & -1 \\ b-2a & c-2a \end{pmatrix}$$

$$= 2(c-2a) - (b-2a) = -2a - b + 2c$$

Also: $(*)$ gilt für $q = 0$, a, b, c bel.

oder q bel., $-2a - b + 2c = 1$

Aufgabe: Bestimme

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{III}-\text{IV}}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{II}-4\cdot\text{I} \\ \text{III}-2\cdot\text{I} \\ \text{IV}-\text{I}}}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2^{+} & 3^{-} & 0^{+} & 1^{-} & 8 \\ -5 & -11 & 8 & 0 & -30 \\ 4 & -6 & 1 & 0 & -14 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= +2\cdot\det\begin{pmatrix} -5 & -11 & 8 & +30 \\ 4 & -6 & 1 & +14 \\ -2 & 3 & 3 & +1 \\ 6 & 1 & 9 & -2 \end{pmatrix} \underset{S\text{II}-S\text{III}}{=} -2\cdot\det\begin{pmatrix} -5 & +19 & 8 & 30 \\ 4 & +7 & 1 & 14 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & +8 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{S.\text{III}+\text{I}}{=} -2\det\begin{pmatrix} -5 & 19 & 3 & 30 \\ 4 & 7 & 5 & 14 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 15 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{S.\text{I}+2\cdot\text{III} \\ S.\text{IV}-\text{III}}}{=}$$

$$= -2\cdot\det\begin{pmatrix} 1^{+} & 19^{-} & 3^{+} & 27 \\ 14 & 7 & 5^{-} & 9 \\ 0 & 0 & 1^{+} & 0 \\ 36 & 8 & 15 & -17 \end{pmatrix} = -2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 19 & 27 \\ 14 & 7 & 9 \\ 36 & 8 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 19 & 27 \\ 14 & 7 & 9 \\ 36 & 8 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\overset{S.\,III-II}{=} -2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 19 & 8 \\ 14 & 7 & 2 \\ 36 & 8 & -25 \end{pmatrix} \underset{S.\,III-2\cdot II_{neu}}{\overset{S.\,II-2\cdot III}{=}} -2\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 14 & 3 & -4 \\ 36 & 58 & -141 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{II-14\cdot I \\ III-36\,I}}{=} -2\cdot\det\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 3 & 2 \\ 0 & +39 & +32 \\ 0 & +50 & +213 \end{pmatrix} = -2\cdot\det\begin{pmatrix} 39 & 32 \\ 50 & 213 \end{pmatrix}$$

$$= -2\cdot(39\cdot 213 - 32\cdot 50) = -2\cdot(8307 - 1600)$$

$$= -2\cdot 6707 = \underline{\underline{-13.414}}$$