Ergänzungskurs "Lineare Algebra 1"

Die Determinante

Vorgelegt: $\mathbb{K}$-VR V

Eine Abbildung $f : V^n = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt **n-Form**,

Anzahl Argumente

Werte im Grundkörper

falls f in jedem Argument linear ist, d.h.

für $1 \leq i \leq n$ und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n \in V$ ist die Abb.

$$f(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \cdot, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n) : V \longrightarrow \mathbb{K},$$
$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{x}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$$

eine Linearform auf V.

Gilt zusätzlich $f(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0$ für alle linear abhängigen $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, so heißt die n-Form **alternierend**.

Beispiel: (1.) $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ ist eine alternierende 2-Form auf dem $\mathbb{K}^2$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -a_2 x_1 + a_1 x_2 = (-a_2, a_1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ist linear}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = b_2 x_1 - b_1 x_2 = (b_2, -b_1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ist linear}$$

Beispiel: $f\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right) = a_1b_1 + a_2b_2$ ist eine 2-Form

$(a_1, a_2)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ oder $(b_1, b_2)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = 1\cdot 2 + 0\cdot 0 = 2 \neq 0$$

linear abh.!

Bemerkung: Gleichwertig sind:

(1.) f ist alternierend

(2.) Für $i\neq j$ und $\vec{a}_i = \vec{a}_j$ gilt $f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0$.

Beweis: (1. $\Rightarrow$ 2.) klar

(2. $\Rightarrow$ 1.) $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ seien linear abh.

Darf annehmen: $\vec{b}_1 = \sum_{i=2}^{n} r_i \vec{b}_i$

Dann $f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = f\left(\sum_{i=2}^{n} r_i\vec{b}_i, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\right)$

$$= \sum_{i=2}^{n} r_i\, f(\underbrace{\vec{b}_i}_{i\geq 2}, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) \overset{(2.)}{=} \sum_{i=2}^{n} r_i\cdot 0 = 0$$

■

<u>Bemerkung</u>: Gilt $1+1 \neq 0$ in $\mathbb{K}$ (d.h. die Charakteristik von $\mathbb{K}$ ist ungleich 2), so sind äquivalent:

(1.) f ist alternierend

(2.) Für alle $i \neq j$ gilt

$$f(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n)$$
$$= -f(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

<u>Beweis</u> (1. $\Rightarrow$ 2.)

$$0 = f(\ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-tes Arg.}}}{\vec{a}_i + \vec{a}_j}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-tes Arg.}}}{\vec{a}_i + \vec{a}_j}, \ldots) = f(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \ldots) + f(\ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \ldots)$$

$$= \underbrace{f(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_i, \ldots)}_{=0} + f(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots) + f(\ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i, \ldots)$$

$$+ \underbrace{f(\ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_j, \ldots)}_{=0} \qquad \rightsquigarrow \text{Beh.}$$

(2. $\Rightarrow$ 1.) $f(\ldots, \underset{i}{\underline{x}}, \ldots, \underset{j}{\underline{x}}, \ldots) \overset{(2.)}{=} -f(\ldots, \underline{x}, \ldots, \underline{x}, \ldots)$

$$\Rightarrow 2 \cdot f(\ldots, \underline{x}, \ldots, \underline{x}, \ldots) = 0 \underset{2 \neq 0}{\Rightarrow} f(\ldots, \underline{x}, \ldots, \underline{x}, \ldots) = 0$$

Also: f alternierend.

6.5 Satz Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist

$$\mathrm{Abb}(M, V) = \{ f : M \to V \mid f \text{ Abbildung} \}$$

mit der Addition

$$f+g : M \longrightarrow V, \quad (f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

und der skalaren Multiplikation

$$r \cdot f : M \longrightarrow V, \quad (r \cdot f)(m) = r \cdot f(m)$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beweis: Langweiliges Nachrechnen der VR-Axiome ∎

6.6 Satz Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

(a) $\mathrm{Mult}_n(V) = \{ f : V^n \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } n\text{-Form} \}$ ist ein Teilraum von $\mathrm{Abb}(V^n, \mathbb{K})$

(b) $\mathrm{Alt}_n(V) = \{ f \in \mathrm{Mult}_n(V) \mid f \text{ alternierend} \}$ ist ein Teilraum von $\mathrm{Mult}_n(V)$.

Beweis: Langweiliges Überprüfen der Teilraumeigenschaften ∎

6.7 Satz Vorgelegt ist ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR V und eine Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ von V.

Die Elemente von $\mathrm{Alt}_n(V) = \mathrm{Alt}_{\dim V}(V)$ heißen **Volumenformen** auf V.

(a) Die Abb. $\alpha : \mathrm{Alt}_n(V) \longrightarrow \mathbb{K}$, $\alpha(f) = f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ ist linear und damit ist $\alpha \in (\mathrm{Alt}_n(V))'$

(b) $\ker \alpha = \{0\}$

(c) Es gilt $\mathrm{Alt}_n(V) = \{0\}$ oder $\mathrm{Alt}_n(V) \cong \mathbb{K}$.

Beweis (a) $f, g \in \mathrm{Alt}_n(V)$, $\underbrace{(f+g)(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)}_{\alpha(f+g)} = \underbrace{f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)}_{\alpha(f)} + \underbrace{g(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)}_{\alpha(g)}$

$\alpha(r \cdot f) = r \cdot \alpha(f)$ analog.

(b) $f \in \ker \alpha \Rightarrow f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = 0$

$$f\Big(\sum_{i_1=1}^{n} r_{1 i_1} \vec{b}_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} r_{n i_n} \vec{b}_{i_n}\Big) = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} r_{1,i_1} \cdot \ldots \cdot r_{n,i_n} \cdot f(\vec{b}_{i_1}, \dots, \vec{b}_{i_n})$$
$$= 0$$

Denn: $f(\vec{b}_{i_1}, \dots, \vec{b}_{i_n}) = 0$ falls $i_j = i_k$ für ein $j \neq k$ (alternierend!)

$f(\vec{b}_{i_1}, \dots, \vec{b}_{i_n}) = (-1)^k \cdot f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = 0$

(c) Nehme $\mathrm{Alt}_n(V) \neq \{0\}$ an.

Dann gibt es $f \in \mathrm{Alt}_n(V)$, $f \neq 0$

Also gibt es $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in V$ mit $f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = r \neq 0$

f alternierend $\Longrightarrow$ $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ linear unabh.

$\underset{\dim V = n}{\Longrightarrow}$ $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ Basis von V.

Beh.: (f) ist eine Basis von $\mathrm{Alt}_n(V)$.

Dazu: $g \in \mathrm{Alt}_n(V)$ (zz: $g = t \cdot f$ für passendes $t \in \mathbb{K}$)

α wie oben. $\alpha(g) = s$

$\alpha(f) = r \neq 0$

Also: $\alpha\left(g - \frac{s}{r} \cdot f\right) = \alpha(g) - \frac{s}{r} \cdot \alpha(f) = s - \frac{s}{r} \cdot r = 0$

$\Longrightarrow$ $g - \frac{s}{r} \cdot f \in \ker(\alpha) \overset{(b)}{=} \{0\} \Longrightarrow g - \frac{s}{r} f = 0$

bzw $g = \frac{s}{r} \cdot f \in \mathrm{span}(f) \rightsquigarrow (f)$ ist Basis

und $\mathrm{Alt}_n(V) \cong \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

$\blacksquare$

Einschub: Die symmetrische Gruppe

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \to \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

1. Index	1	2	3
2. Index	1	2	3
	2	3	1
	3	1	2
	3	2	1
	1	3	2
	2	1	3

bijektive Abb. $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

alle bijektiven Abb. treten auf

??

$$\det(\cdot) = \sum_{\substack{\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \\ \text{bijektiv}}} (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

Vorgelegt: $M \neq \emptyset$ Menge

$$\mathrm{Sym}(M) = \{ f : M \to M \mid f \text{ bijektiv} \}$$

Die Komposition $\circ$ von Abbildungen lese als "Verknüpfung"

$$\mathrm{Sym}(M) \times \mathrm{Sym}(M) \longrightarrow \mathrm{Sym}(M)$$
$$(f, g) \longmapsto f \circ g$$

Eigenschaften:

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ Assoziativität

$$\left.\begin{aligned} [(f\circ g)\circ h](m) &= (f \circ g)(h(m)) = f(g(h(m))) \\ [f \circ (g \circ h)](m) &= f((g\circ h)(m)) = f(g(h(m))) \end{aligned}\right\} = \checkmark$$

- $\mathrm{id}_M \circ f = f$ id_M "neutrales Element"

- $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_M$ f^{-1} ist zu f "invers"

6.8 Definition:

Sei G eine Menge mit einer Verknüpfung $\circ: G \times G \to G$, $\circ(f,g) = f \circ g$ mit den folgenden Eigenschaften

- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ für alle $f, g, h \in G$ Assoziativität
- Es gibt ein neutrales Element $1 \in G$ mit $1 \circ f = f \circ 1 = f$ für alle $f \in G$
- Zu $f \in G$ gibt es ein $f' \in G$ (das f inverse Element) mit $f \circ f' = 1$.

Dann heißt $(G, \circ)$ eine Gruppe

Beispiele: (a) $(\mathrm{Sym}(M), \circ)$ ist eine Gruppe

(b) V $\mathbb{K}$-VR $\Rightarrow$ $(V, +)$ ist eine Gruppe

(c) $\mathbb{K}$ Körper $\Rightarrow$ $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

Für $n \in \mathbb{N}$ schreibe $\mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$

symmetrische Gruppe auf n Ziffern

Beispiel $\mathrm{Sym}(4) \ni \sigma$ $\qquad$ $\mathrm{Sym}(4) = \mathrm{Sym}(\{1,2,3,4\})$

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	2	4	1	3

schreibe $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Notiz: Ist M eine endliche Menge, so sind für $\sigma : M \to M$ gleichwertig:

(a) σ ist bijektiv

(b) σ ist surjektiv

(c) σ ist injektiv

Die Elemente von $\mathrm{Sym}(n)$ heißen Permutationen.

Sind $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so definieren wir ein $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ per

$$\sigma(i_j) = i_{j+1} \quad \text{für } 1 \le j \le k-1$$

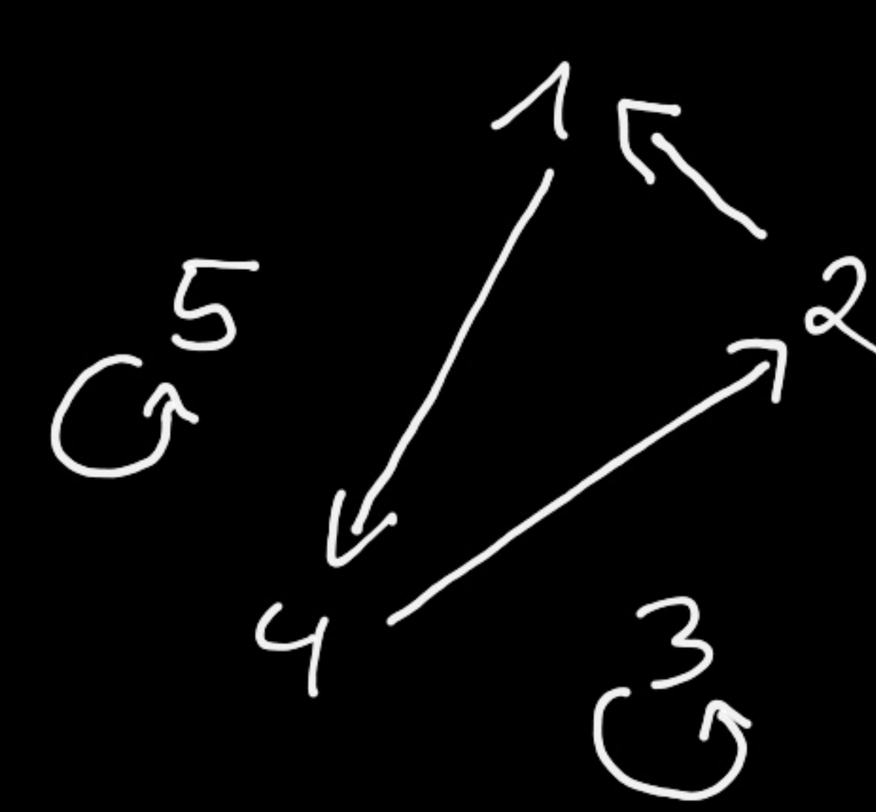
$$\sigma(i_k) = i_1$$

$$\sigma(j) = j \quad \text{für } j \in \{i_1, \dots, i_k\}$$

Für σ schreibe kurz $(i_1 \; i_2 \; \dots \; i_k)$

So ein σ heißt $(k-)$ Zykel

Bsp $(2 \; 1 \; 4) \in \mathrm{Sym}(5)$



Bsp $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma(\tau(1)) = \sigma(4) = 1$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\neq \begin{cases} \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (3\ 4) \\ \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3\ 5) \end{cases}$$

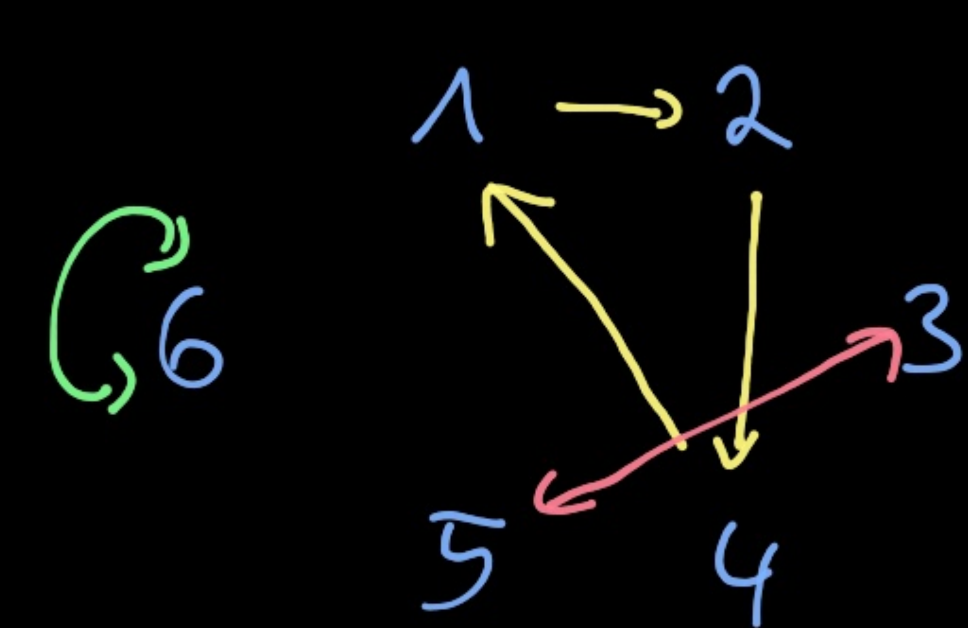
2-Zykel
Transposition

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 4) = (2\ 5\ 4\ 1)$$

Bsp $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$= (1\ 2\ 4) \circ (3\ 5) = (3\ 5) \circ (1\ 2\ 4)$$

"ziffernfremd"



Für einen Zykel $\zeta = (i_1\ i_2 \dots i_k)$ setze $|\zeta| = \{i_1, \dots, i_k\}$

Zykel ζ_1, ζ_2 heißen ziffernfremd, falls $|\zeta_1| \cap |\zeta_2| = \emptyset$. Dann gilt $\zeta_1 \circ \zeta_2 = \zeta_2 \circ \zeta_1$

<u>Satz</u>: Jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ lässt sich als Produkt $\sigma = \zeta_1 \circ \dots \circ \zeta_k$ ziffernfremder Zykel schreiben, diese Darstellung ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

<u>Beispiel</u> $(1\ 2) \circ (1\ 3) \circ (1\ 4) \circ (1\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$

Allgemein: $i, j_1, \dots, j_k$ paarw. verschiedene Ziffern. Dann

$$\boxed{(i\ j_1) \circ (i\ j_2) \circ (i\ j_3) \circ \dots \circ (i\ j_k) = (i\ j_k\ j_{k-1} \dots j_2\ j_1)}$$

Namensgebung: 2-Zykel heißen auch Transpositionen.

<u>Satz</u> Jedes $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben.

<u>Bsp</u> $(1\ 3) \circ (1\ 2) \circ (2\ 3) = (1\ 2) = (1\ 2) \circ (1\ 3) \circ (1\ 3) \circ (2\ 3) \circ (2\ 3)$

3 Transp. 1 Transp. 5 Transp.

6.9 Das Signum einer Permutation

Für $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ und $Z = \{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$.

schreibe $\sigma_Z = \sigma_{\{i,j\}} = \dfrac{\dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}}{\left| \dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \right|} \in \{1, -1\}$

Setze $\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{\substack{Z \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \# Z = 2}} \sigma_Z$

$\prod$: Produkt, analog zu Σ;

↖ Signum von σ

Beispiel $\sigma = (1\ 2) \in \mathrm{Sym}(3)$

Mögliche Z : $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

$$\sigma_{\{1,2\}} = \frac{\dfrac{\sigma(1) - \sigma(2)}{1 - 2}}{| \quad - \text{"} - \quad |} = \frac{\dfrac{2 - 1}{1 - 2}}{| - \text{"} - |} = -1$$

$$\sigma_{\{1,3\}} = \frac{\dfrac{\sigma(1) - \sigma(3)}{1 - 3}}{| - \text{"} - |} = \frac{\dfrac{2 - 3}{1 - 3}}{| - \text{"} - |} = \frac{1/2}{|1/2|} = 1$$

$$\sigma_{\{2,3\}} = \frac{\dfrac{1 - 3}{2 - 3}}{| - \text{"} - |} = \frac{2}{|2|} = 1$$

$$\mathrm{sign}(1\ 2) = -1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$$

6.10 Satz

(a) Für $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(n)$ gilt $\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sign}\,\sigma \cdot \mathrm{sign}\,\tau$

(b) Das Signum einer Transposition ist -1.

(c) ζ ein k-Zykel $\Rightarrow$ $\mathrm{sign}\,\zeta = (-1)^{k+1}$

Notiz zu (a): $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

$\mathrm{sign}: \mathrm{Sym}(n) \longrightarrow \{-1, 1\}$ ist ein "Gruppenhomomorphismus"

Allgemein: $(G, \circ), (H, *)$ Gruppen. Dann: $f: G \longrightarrow H$ heißt Gruppenhomomorphismus, falls $f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gelten

Bsp.: $f: V \to W$ linear $\Rightarrow$ $f: (V, +) \longrightarrow (W, +)$ Gruppenhom.

Beweis (a)

$$(\sigma \circ \tau)_{\{i,j\}} = \frac{(\sigma \circ \tau)(i) - (\sigma \circ \tau)(j)}{i - j} \Bigg/ \left| \frac{(\sigma \circ \tau)(i) - (\sigma \circ \tau)(j)}{i - j} \right|$$

$$= \frac{\dfrac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)}}{\left| \dfrac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \right|} \cdot \frac{\dfrac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}}{\left| \dfrac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \right|} = \sigma_{\{\tau(i), \tau(j)\}} \cdot \tau_{\{i,j\}}$$

6.10 Beweis von:

(a) Für $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(n)$ gilt $\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sign}\,\sigma \cdot \mathrm{sign}\,\tau$

Habe bereits: $(\sigma \circ \tau)_{\{i,j\}} = \sigma_{\{\tau(i),\tau(j)\}} \cdot \tau_{\{i,j\}} \in \{\pm 1\}$

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = \prod_{\substack{\{i,j\} \subseteq \{1,..,n\} \\ i \neq j}} (\sigma \circ \tau)_{\{i,j\}} = \prod_{\substack{\{i,j\} \subseteq \{1,..,n\} \\ i \neq j}} \sigma_{\{\tau(i),\tau(j)\}} \cdot \underbrace{\prod_{\dots} \tau_{\{i,j\}}}_{\mathrm{sign}(\tau)}$$

Fehlt: $$\prod_{\substack{\{i,j\} \subseteq \{1,..,n\} \\ i \neq j}} \sigma_{\{\tau(i),\tau(j)\}} \stackrel{?}{=} \mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{\substack{\{k,l\} \subseteq \{1,\dots,n\} \\ k \neq l}} \sigma_{\{k,l\}}$$

Faktoren links treten auch rechts auf und umgekehrt; es sind gleich viele Faktoren

Jetzt fertig!

Folgerung: $$\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\tau) \cdot \mathrm{sign}(\sigma^{-1})$$
$$= \mathrm{sign}(\underbrace{\sigma \circ \sigma^{-1}}_{= \mathrm{id}_{\{1,..,n\}}}) \cdot \mathrm{sign}(\tau) = \mathrm{sign}(\tau).$$

Also: $\mathrm{sign}(\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(i\ j)$

6.10 Beweis von (b): Das Signum einer Transposition ist -1.

Sei $(i\ j)$ (mit $i \neq j$) eine Transposition, $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$

$$(\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1})(\sigma(k)) = (\sigma \circ (i\ j))(k)$$

Für $k \neq i, j$ gilt $(\sigma \circ (i\ j))(k) = \sigma(k)$

$k = i$ $\quad (\sigma \circ (i\ j))(i) = \sigma(j)$

$k = j$ $\quad (\sigma \circ (i\ j))(j) = \sigma(i)$

Also: $\quad \sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \ \sigma(j))$

Wähle nun σ sodass $\sigma(i) = 1$, $\sigma(j) = 2$.

Erhalte $\quad \mathrm{sign}(i\ j) = \mathrm{sign}(\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma(i)\ \ \sigma(j))$

$$= \mathrm{sign}(1\ 2)$$

$$\mathrm{sign}(1\ 2) = \prod_{\substack{\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,n\} \\ i \neq j}} \frac{\dfrac{(1\ 2)(i) - (1\ 2)(j)}{i-j}}{\left| \quad - \text{"} - \quad \right|}$$

$= 1$ für $i, j \geq 3$

Erhalte (durch Weglassen der Faktoren zu $\{i,j\}$, $i,j \geq 3$):

$$\operatorname{sign}\underbrace{(1\ 2)}_{\sigma} = \frac{\frac{\sigma(1)-\sigma(2)}{1-2}}{\left|\text{—"—}\right|} \cdot \prod_{i=3}^{n} \frac{\frac{\sigma(i)-\sigma(1)}{i-1}}{\left|\text{—"—}\right|} \cdot \prod_{i=3}^{n} \frac{\frac{\sigma(i)-\sigma(2)}{i-2}}{\left|\text{—"—}\right|}$$

$$= \frac{\frac{2-1}{1-2}}{\left|\text{—"—}\right|} \cdot \prod_{i=3}^{n} \underbrace{\frac{\frac{i-2}{i-1}}{\left|\text{—"—}\right|}}_{=1} \cdot \prod_{i=3}^{n} \underbrace{\frac{\frac{i-1}{i-2}}{\left|\text{—"—}\right|}}_{=1}$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$$

(c) $$\operatorname{sign}(i_1\ i_2 \ldots i_k) = \operatorname{sign}\left((i_1\ i_k) \circ (i_1\ i_{k-1}) \circ \ldots \circ (i_1\ i_2)\right)$$

$$\overset{(a)}{=} \operatorname{sign}(i_1\ i_k) \cdot \operatorname{sign}(i_1\ i_{k-1}) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sign}(i_1\ i_2)$$

$$\overset{(b)}{=} (-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$$ ∎

Bsp $$\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{sign}\left((1\ 3\ 4) \circ (2\ 5)\right)$$

$$\overset{(a)}{=} \operatorname{sign}(1\ 3\ 4) \cdot \operatorname{sign}(2\ 5) \overset{(c)}{=} 1 \cdot (-1) = -1$$

6.11 Satz Vorgelegt: $\mathbb{K}$-VR V mit Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$. Dann gilt:

Dann ist $f\left(\sum_{i_1=1}^{n} r_{1,i_1} \vec{b}_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} r_{n,i_n} \vec{b}_{i_n}\right)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} r_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot r_{n,\sigma(n)} \cdot \mathrm{sign}(\sigma)$$

eine Volumenform von V mit $f(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = 1$.

Speziell: $\mathrm{Alt}_n(V) = \mathrm{span}\{f\} \cong \mathbb{K}$.

Notiz Mit $\mathbb{K}^{n \times n} = (\mathbb{K}^n)^n$ ist det <u>die</u> zu $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ passende Volumenform auf $\mathbb{K}^n$.

Hausaufgabe LA 12 A:

Zeige, dass das o.a. f tatsächlich multilinear ist.

Hinweis: Linearität in der ersten Komponente nachrechnen reicht.

<u>Beweis</u>: f ist eine n-Form (vgl. Hausaufgabe)

f ist alternierend:

$$\sigma \in \mathrm{Sym}(n) \implies \sigma \circ (1\ 2) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2))$$

$$\implies \sigma \circ (1\ 2) = (\sigma(1)\ \sigma(2)) \circ \sigma$$

$$\mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Sym}(n)^{+} \,\dot\cup\, \mathrm{Sym}(n)^{-} \quad \text{"disjunkte" Vereinigung}$$

mit $\mathrm{Sym}(n)^{\pm} = \{\sigma \in \mathrm{Sym}(n) \mid \mathrm{sign}(\sigma) = \pm 1\}$

$$G : \mathrm{Sym}(n)^{+} \longrightarrow \mathrm{Sym}(n)^{-}, \quad G(\sigma) = \sigma \circ (1\ 2) = (\sigma(1)\ \sigma(2)) \circ \sigma$$

G ist bijektiv mit Umkehrabb. $G^{-1} = G$

f ist alternierend, falls $f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = 0$ für $\vec{v}_i = \vec{v}_j$, $i \neq j$.

Reicht, $i = 1$, $j = 2$, also

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}{}' \underset{r_{1,i}}{r_i}\, \vec{b}_i,\ \sum_{i=1}^{n}{}' \underset{r_{2,i}}{r_i}\, \vec{b}_i,\ \sum_{i_3=1}^{n}{}' r_{3,i_3}\, \vec{b}_i, \dots\Big)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)}{}' \mathrm{sign}(\sigma)\, \underset{r_{1,\sigma(1)}}{r_{\sigma(1)}}\, \underset{r_{2,\sigma(2)}}{r_{\sigma(2)}}\, r_{3,\sigma(3)} \cdots r_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)^{+}} r_{\sigma(1)}\, r_{\sigma(2)}\, r_{3,\sigma(3)} \cdots r_{n,\sigma(n)} - \sum_{\pi \in \mathrm{Sym}(n)^{-}}{}' \cdots$$

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}{}' r_i \vec{b}_i,\ \sum_{i=1}^{n}{}' r_i \vec{b}_i,\ \sum_{i_3=1}^{n}{}' r_{3,i_3} \vec{b}_{i_3},\ \dots\Big)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)^+}{}' r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} r_{i_3,\sigma(3)} \cdot\ldots\cdot r_{i_n,\sigma(n)}$$

$$- \sum_{\pi \in \mathrm{Sym}(n)^-}{}' r_{\pi(1)} r_{\pi(2)} r_{i_3,\pi(3)} \cdot\ldots\cdot r_{i_n,\pi(n)}$$

$$= (\sigma(1)\ \sigma(2)) \circ \sigma \quad \text{für} \quad \sigma = \pi \circ (1\ 2) \in \mathrm{Sym}(n)^+$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)^+}{}' r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} \underline{r_{i_3,\sigma(3)} \cdot\ldots\cdot r_{i_n,\sigma(n)}}$$

$$- \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)^+} r_{\sigma(2)} r_{\sigma(1)} r_{i_3,\sigma(3)} \cdot\ldots\cdot r_{i_n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)}{}' \big(r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} - r_{\sigma(2)} r_{\sigma(1)}\big) \cdot r_{i_3,\sigma(3)} \cdot\ldots\cdot r_{i_n,\sigma(n)} = 0 \quad \checkmark$$

Fehlt: $$f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)}{}' \mathrm{sign}(\sigma)\, \underbrace{r_{1,\sigma(1)}}_{=\begin{cases}1 & \text{f. } \sigma(1)=1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}} \cdots \underbrace{r_{n,\sigma(n)}}_{=\begin{cases}1 & \text{f. } \sigma(n)=n\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}}$$

$$= \mathrm{sign}(\mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}) \cdot 1 \cdot\ldots\cdot 1$$

$$= 1 \qquad \blacksquare$$

Die Determinante:

Identifiziere $\mathbb{K}^{n\times n} = (\mathbb{K}^n)^n$

Setze für $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{n\times n} = (\mathbb{K}^n)^n$

$$\det A = \sum_{\sigma\in \mathrm{Symm}(n)} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

__Notiz:__ j-te Spalte von A: $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \underline{e}_i$

liefert: det ist __die__ Volumenform auf $\mathbb{K}^n$ mit

$\det(\underline{e}_1 \cdots \underline{e}_n) = 1$, vgl. voriger Satz!

__Notiz:__ Die in 6.11 beschriebene Volumenform erfüllt

$$f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \det([\vec{v}_1]_B \cdots [\vec{v}_n]_B)$$
$$= \det([\varphi]^B_B)$$

mit: φ ist die lineare Fortsetzung der Abb.

$\vec{b}_1 \longmapsto \vec{v}_1, \dots, \vec{b}_n \longmapsto \vec{v}_n$

Hausaufgabe LA 12B

(a) Berechne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Schreibe $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \sigma$

(i) als ein Produkt ziffernfremder Zykel

(ii) als ein Produkt von Transpositionen

Berechne außerdem $\operatorname{sign}(\sigma)$

(c) Leite die Regel von SARRUS direkt aus

$$\det (a_{ij})_{\substack{i=1,..,3 \\ j=1,..,3}} = \sum_{\sigma \in \operatorname{Sym}(3)} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2}\, a_{\sigma(3),3}$$

her.

(d) Zeige, dass die Abbildung $\varphi: \operatorname{Sym}(n) \to \operatorname{Sym}(n)$, $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ bijektiv ist. Verwende dies zum Nachweis von $\det A^T = \det A$ für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

$$\sum_{\sigma \in \operatorname{Sym}(n)} \underbrace{m(\sigma)}_{\in \mathbb{K}} = \sum_{\sigma \in \operatorname{Sym}(n)} m(\sigma^{-1})$$