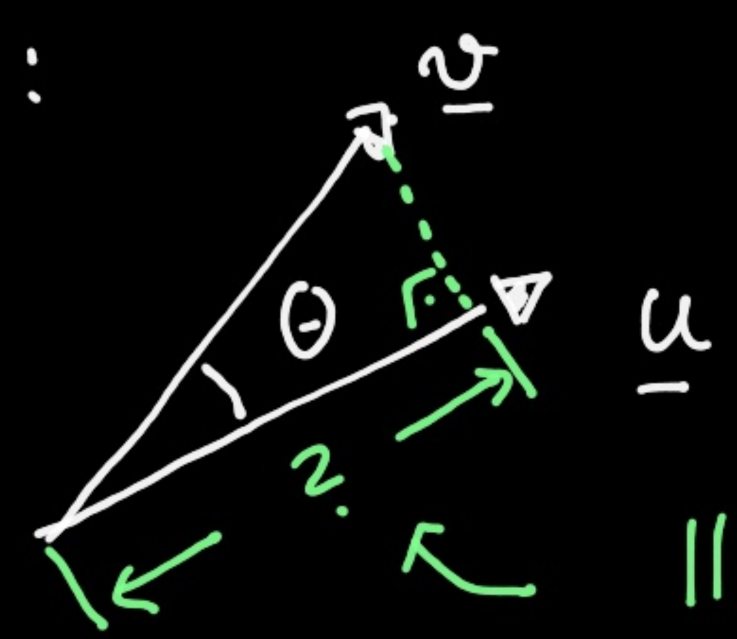
Kapitel 3: Bilinearformen

§ 8: Bilinearformen

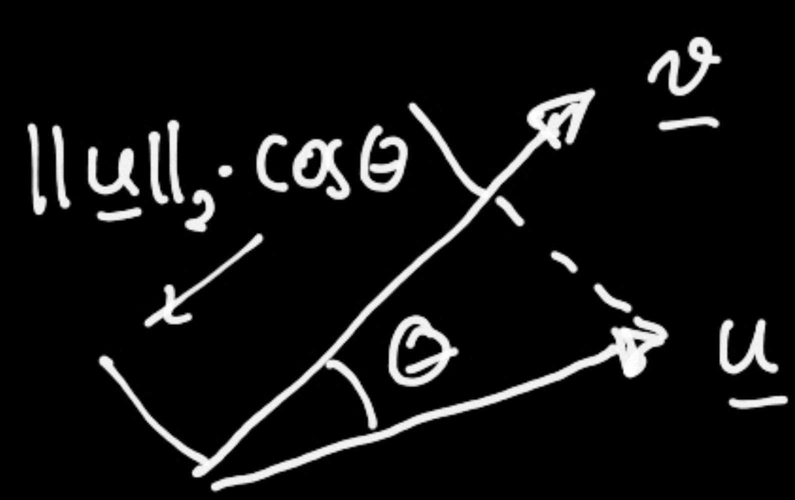
Motivation:

Θ : "theta"

Länge von $\underline{v}$: $\|\underline{v}\|_2$



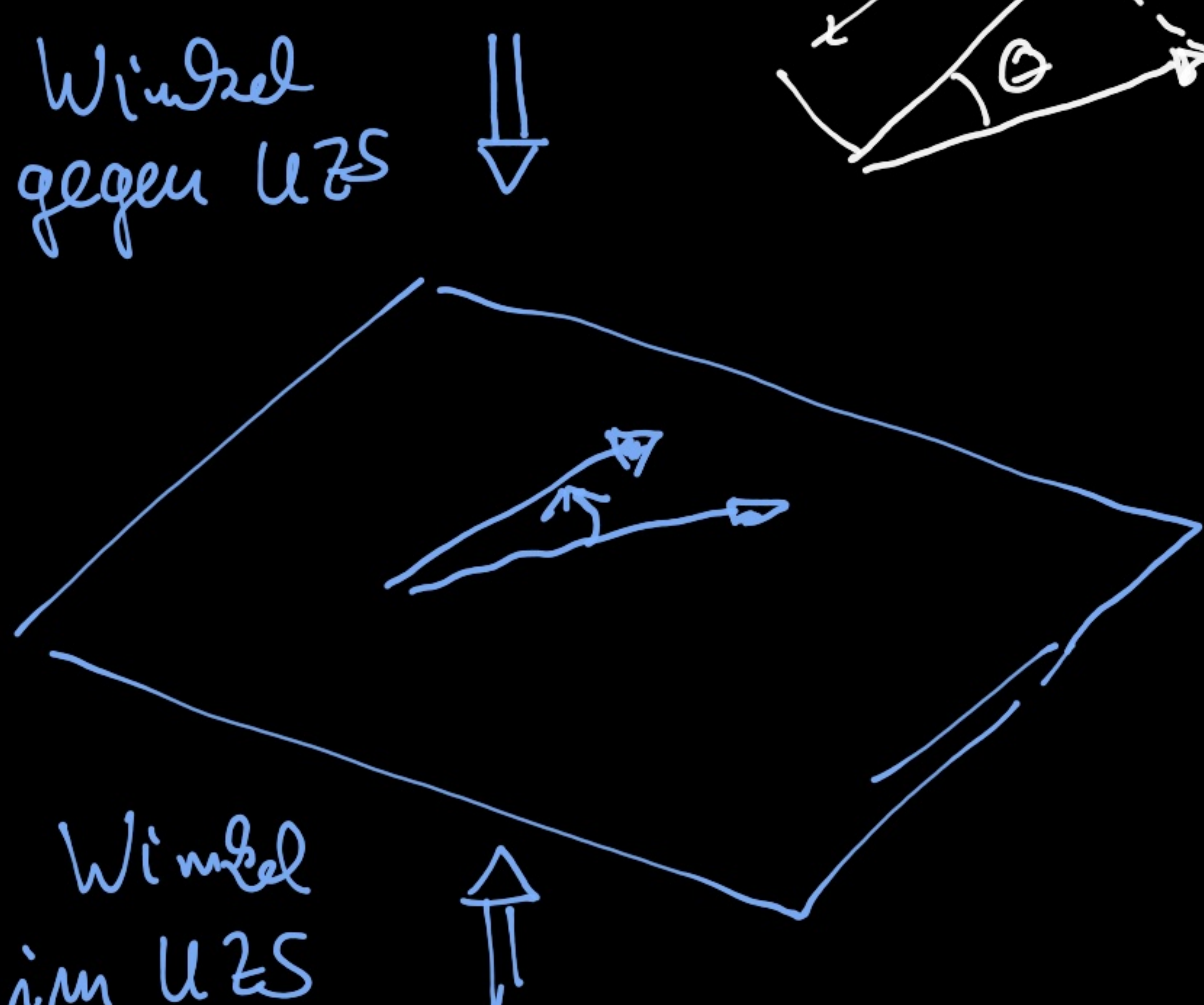
$\|\underline{v}\|_2 \cdot \cos\Theta$



Skalarprodukt von $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle = \|\underline{u}\|_2 \cdot \|\underline{v}\|_2 \cdot \cos\Theta,}$$

wobei $\Theta \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen $\underline{u}, \underline{v}$



kleiner Winkel ist Θ

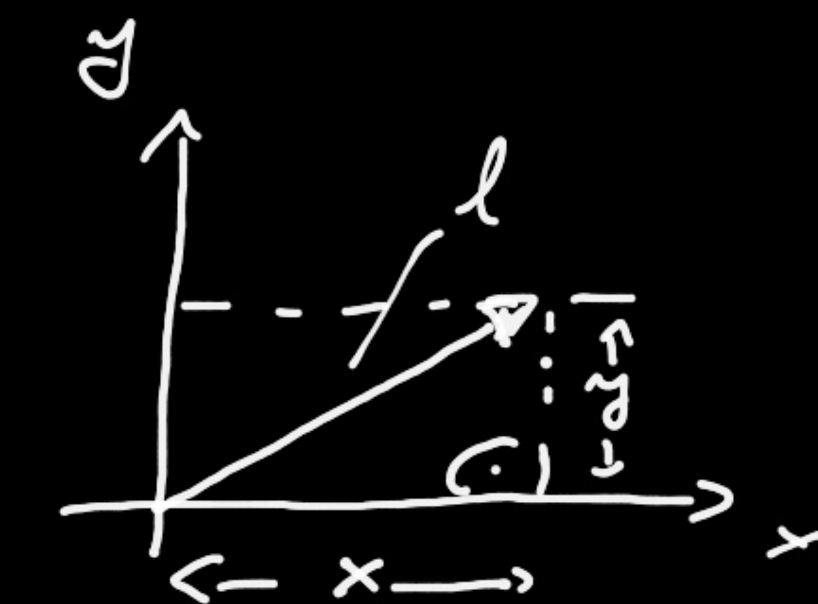
Gesucht:

$\langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle$ aus Koordinaten

Notiz: $\|\underline{u}\|_2^2 = \langle \underline{u} \mid \underline{u} \rangle$

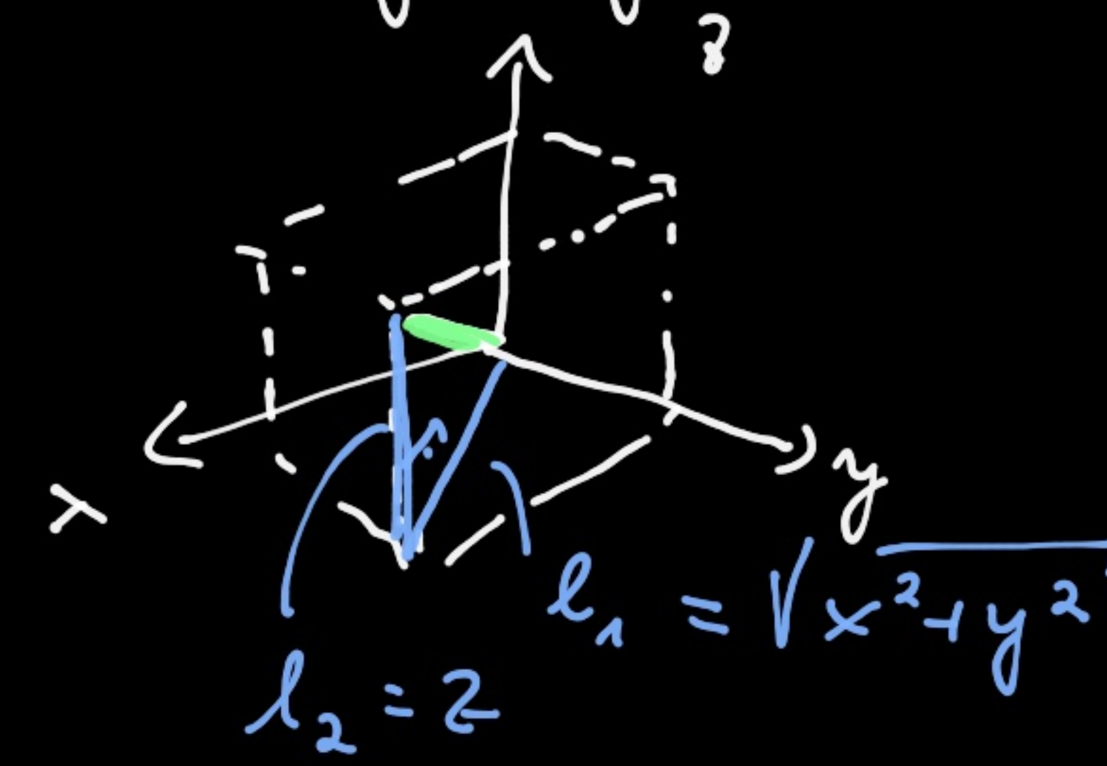
Im $\mathbb{R}^2$:

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$$



Pythagoras: $l = \sqrt{x^2+y^2}$

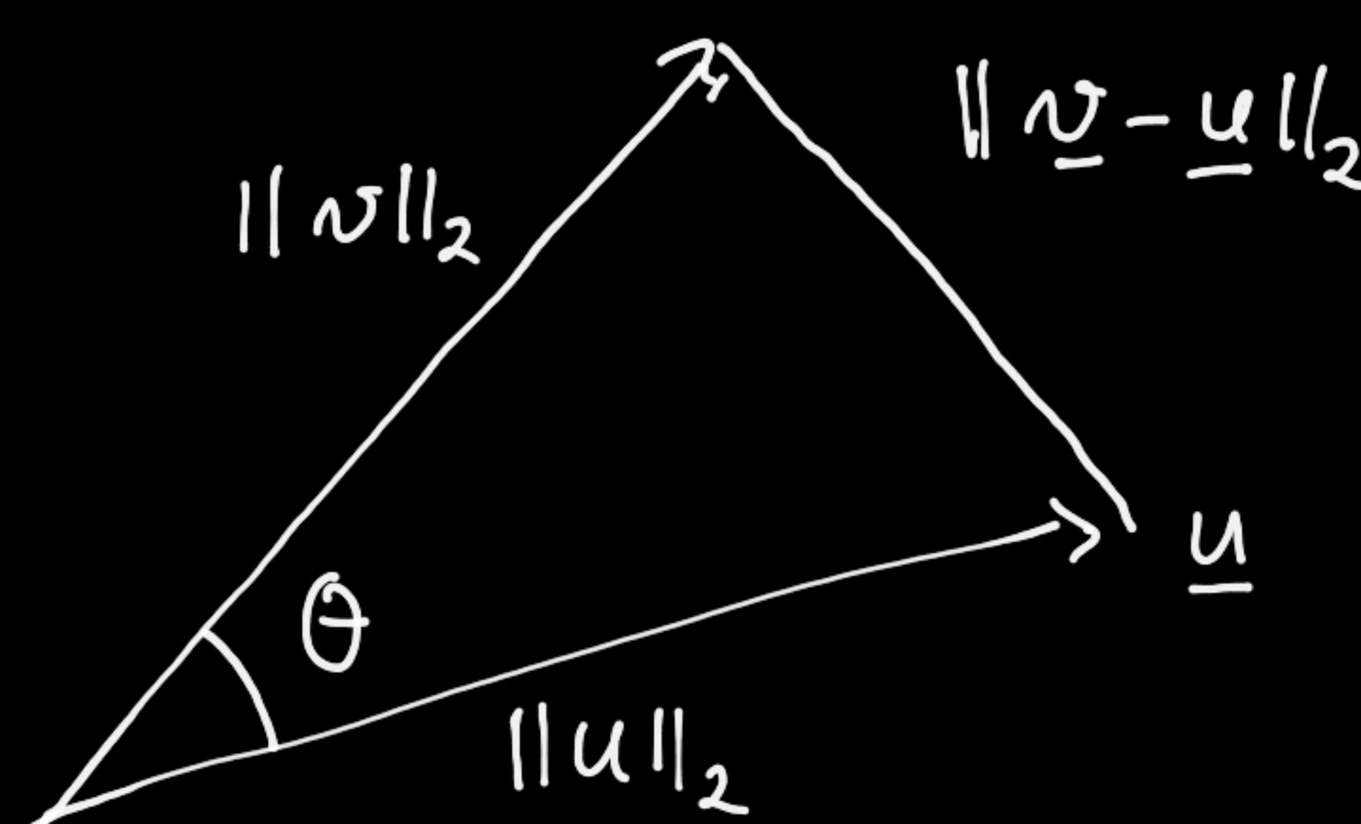
Im $\mathbb{R}^3$: $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



Damit erhalte für $\mathbb{R}^n$

$$\| \underline{u} \|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Euklidische Norm



Kosinussatz

$$\|\underline{u}\|_2^2 + \|\underline{v}\|_2^2 - 2 \underbrace{\|\underline{u}\|_2 \|\underline{v}\|_2 \cos\theta}_{\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle}$$

$$= \|\underline{v} - \underline{u}\|_2^2$$

$$\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = \left(\|\underline{u}\|_2^2 + \|\underline{v}\|_2^2 - \|\underline{v}-\underline{u}\|_2^2\right)/2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum u_i^2 + \sum v_i^2 - \sum \underbrace{(v_i - u_i)^2}_{v_i^2 + u_i^2 - 2u_i v_i} \right)$$

$$= \sum u_i v_i \quad \leftarrow$$

8.1 Das Euklidische Skalarprodukt

Für $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ setze $\langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$.

$\langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle$ heißt das **Euklidische Skalarprodukt** von $\underline{u}$ und $\underline{v}$

Beispiel $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = \underline{\underline{-1}}$

Eigenschaften:

(1.) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ist symmetrisch, d.h. $\langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle = \langle \underline{v} \mid \underline{u} \rangle$ ✓

(2.) $\langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \cdot \underline{v}$, mit $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}^T = (u_1 \; \dots \; u_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

Folgt: $\underline{u}^T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{u}^T \underline{v}_1 + \underline{u}^T \underline{v}_2$, $\underline{u}^T(r \cdot \underline{v}) = r \cdot \underline{u}^T \underline{v}$

bzw. $\left.\begin{array}{l} \langle \underline{u} \mid \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{u} \mid \underline{v}_1 \rangle + \langle \underline{u} \mid \underline{v}_2 \rangle \\ \langle \underline{u} \mid r \cdot \underline{v} \rangle = r \cdot \langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle \end{array}\right\}$ "linear im 2. Argument"

und $\left.\begin{array}{l} \langle \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \mid \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}_1 \mid \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}_2 \mid \underline{v} \rangle \\ \langle r \cdot \underline{u} \mid \underline{v} \rangle = r \cdot \langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle \end{array}\right\}$ "linear im 2. Argument"

Insgesamt: $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ist bilinear.

(3.) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ist "positiv definit", d.h. für $\underline{u} \neq \underline{0}$ gilt

$\langle \underline{u} \mid \underline{u} \rangle > 0$ (denn $\langle \underline{u} \mid \underline{u} \rangle = \sum_i u_i^2$)

8.2 Bilinearformen

(a) Vorgelegt ist ein K-VR V.

Eine Abbildung $\beta : V \times V \to K$ heißt (K-) Bilinearform,

wenn:
- $\beta(\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \beta(\vec{u}, \vec{v}_1) + \beta(\vec{u}, \vec{v}_2)$
- $\beta(\vec{u}, r \cdot \vec{v}) = r \cdot \beta(\vec{u}, \vec{v})$
- $\beta(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}) = \beta(\vec{u}_1, \vec{v}) + \beta(\vec{u}_2, \vec{v})$
- $\beta(r \cdot \vec{u}, \vec{v}) = r \cdot \beta(\vec{u}, \vec{v})$

Beispiel: Ist $V = K^n$ und ist G eine $(n \times n)$-Matrix,

dann ist $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T \cdot G \cdot \underline{v}$

z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\beta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (a, b) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (a, b) \cdot \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} = ax + 2ay + 3bx + 4by$$

(b) Die Bilinearform β heißt symmetrisch, falls

$\beta(\vec{u}, \vec{v}) = \beta(\vec{v}, \vec{u})$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt.

Bsp: $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$.

8.3 Notizen

(a) Ist $G \in K^{n \times n}$, so ist $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \cdot \underline{v}$ genau dann symmetrisch, wenn $G^T = G$:

$$\underline{u}^T \cdot G \cdot \underline{v} = (\underline{u}^T \cdot G \cdot \underline{v})^T = \underline{v}^T G^T \underline{u}$$

Erinnerung $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ für Matrizen A, B

$G = G^T \Rightarrow \beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T \cdot G \cdot \underline{v} = \underline{v}^T G \underline{u} = \beta(\underline{v}, \underline{u})$ ✓

Umgekehrt: Ist β symmetrisch, dann gilt

$$\beta(\underline{v}, \underline{u}) = \underline{v}^T \cdot G \cdot \underline{u} \overset{!}{=} \beta(\underline{u}, \underline{v}) \overset{\text{s.o.}}{=} \underline{v}^T \cdot G^T \cdot \underline{u}$$

für alle $\underline{u}, \underline{v} \in K^n$.

Dann ist $G^T = G$, denn:

(b) $G = (g_{ij})_{i,j=1..n}$, $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \cdot \underline{v}$

Dann $g_{ij} = \underline{e}_i^T G \cdot \underline{e}_j = \underline{e}_i^T \cdot \begin{pmatrix} g_{1j} \\ \vdots \\ g_{nj} \end{pmatrix} = \beta(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$

(mit $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$: Standardbasis

Matrizen mit $G^T = G$ heißen symmetrisch.

8.4 Die Gram-Matrix

Vorgelegt ist ein endlich-dimensionaler K-VR V, eine Basis $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ von V, sowie eine symmetrische Bilinearform β auf V.

Rechnung: $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \vec{b}_i$, $\quad \vec{v} = \sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \vec{b}_j \leftarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

Dann: $\beta(\vec{u}, \vec{v}) = \beta\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \vec{b}_i , \sum_{j=1}^{n} r_j \vec{b}_j \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i \, \beta\left(\vec{b}_i , \sum_{j=1}^{n} r_j \vec{b}_j \right) \qquad \text{(linear im 1. Arg.)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=1}^{n} r_j \, \beta(\vec{b}_i, \vec{b}_j) \qquad \text{(linear im 2. Arg.)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_i r_j \, \beta(\vec{b}_i, \vec{b}_j)$$

$$= (s_1 \;\dots\; s_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \beta(\vec{b}_1, \vec{b}_j)\, r_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta(\vec{b}_n, \vec{b}_j)\, r_j \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(s_1 \;\dots\; s_n)}_{[\vec{u}]_{\mathcal{B}}^T} \begin{pmatrix} \beta(\vec{b}_1, \vec{b}_1) & \dots & \beta(\vec{b}_1, \vec{b}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta(\vec{b}_n, \vec{b}_1) & \dots & \beta(\vec{b}_n, \vec{b}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$n \times n$-Matrix, symm.

$[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$

8.4 Die Gram-Matrix

Vorgelegt ist ein endlich-dimensionaler K-VR V, eine Basis $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ von V, sowie eine (symmetrische) Bilinearform β auf V.

Dann gilt $\beta(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}]_{\mathcal{B}}^T \cdot G_{\mathcal{B}}(\beta) \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$

mit der Gram-Matrix

$$G_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} \beta(\vec{b}_1, \vec{b}_1) & \beta(\vec{b}_1, \vec{b}_2) & \dots & \beta(\vec{b}_1, \vec{b}_n) \\ \beta(\vec{b}_2, \vec{b}_1) & \beta(\vec{b}_2, \vec{b}_2) & \dots & \beta(\vec{b}_2, \vec{b}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta(\vec{b}_n, \vec{b}_1) & \beta(\vec{b}_n, \vec{b}_2) & \dots & \beta(\vec{b}_n, \vec{b}_n) \end{pmatrix}$$

der Bilinearform β bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Die Gram-Matrix einer symmetrischen Bilinearform ist symmetrisch.

__Beispiel__: $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$

$p(x), q(x) \in V$: Setze $\beta(p(x), q(x)) = p(2) \cdot q(2)$

Also: $\beta(r_0 + r_1 x + r_2 x^2, s_0 + s_1 x + s_2 x^2)$

$$= (r_0 + r_1 \cdot 2 + r_2 \cdot 4) \cdot (s_0 + s_1 \cdot 2 + s_2 \cdot 4)$$

$$= r_0 s_0 + 2(r_0 s_1 + r_1 s_0) + 4(r_0 s_2 + r_4 s_0)$$

$$+ 4 r_1 s_1 + 8 \cdot (r_1 s_2 + r_2 s_1) + 16 \cdot r_2 s_2$$

$$= (r_0, r_1, r_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$[r_0 + r_1 x + r_2 x^2]_{(1,x,x^2)}$

$[s_0 + s_1 x + s_2 x^2]_{(1,x,x^2)}$

$G_{(1,x,x^2)}(\beta)$

Betrachte $B = (1 - x, 1 + x, 1 - x^2)$

$$G_B(\beta) = ? = \left(\beta(\vec{b}_i, \vec{b}_j) \right)_{i,j=1}^{3}$$

__Beispiel__: $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$

$p(x), q(x) \in V$: Setze $\beta(p(x), q(x)) = p(2) \cdot q(2)$

$\mathcal{B} = (1-x, 1+x, 1-x^2)$

$$G_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} \beta(1-x, 1-x) & \beta(1-x, 1+x) & \beta(1-x, 1-x^2) \\ & \beta(1+x, 1+x) & \beta(1+x, 1-x^2) \\ & & \beta(1-x^2, 1-x^2) \end{pmatrix}$$

hier symmetrisch ergänzen

$$\beta(1-x, 1+x) = (1-2)\cdot(1+2) = -3 \qquad 1-2^2 = -3$$

$$G_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 9 & -9 \\ 3 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\beta\left(r_0(1-x) + r_1(1+x) + r_2(1-x^2) \,;\, s_0(1-x) + s_1(1+x) + s_2(1-x^2) \right)$$
$$= (r_0, r_1, r_2) \cdot G_{\mathcal{B}}(\beta) \cdot \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

8.5 Satz: Vorgelegt sind

- ein K-VR V,
- eine Bilinearform β, und
- zwei Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von V.

Setze $T = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$: Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$.

$$[\vec{u}]_{\mathcal{C}}^T \underline{G_{\mathcal{C}}(\beta)} [\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \beta(\underline{u}, \underline{v}) = [\vec{u}]_{\mathcal{B}}^T G_{\mathcal{B}}(\beta) [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

$$= \Big(\underbrace{[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [\vec{u}]_{\mathcal{C}}}_{= [\vec{u}]_{\mathcal{B}}}\Big)^T \cdot G_{\mathcal{B}}(\beta) \cdot \Big([\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{C}}\Big)$$

$$= [\vec{u}]_{\mathcal{C}}^T \cdot \Big\{ \big(\underline{[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}}\big)^T \cdot G_{\mathcal{B}}(\beta) \cdot [\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \Big\} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{C}}$$

T : Trafo von $\mathcal{C}$ (neue Basis) nach $\mathcal{B}$ (alte Basis)

8.5 Satz: Vorgelegt sind

- ein K-VR V,
- eine Bilinearform β, und
- zwei Basen B, C von V.

Setze $W = [id_V]_C^B$: Transformationsmatrix des Basiswechsels von C nach B.

Dann gilt: $\boxed{G_C(\beta) = W^T \, G_B(\beta) \, W}$

Transformationsformel für Gram-Matrizen

Beispiel: $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$, $\beta(p(x), q(x)) = p(2)\, q(2)$

$B = (1, x, x^2)$, $C = (1-x, 1+x, 1-x^2)$

$$G_B(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$W = [id_V]_C^B$ $\qquad e_1 = [1-x]_C$

$[p(x)]_B = [id_V]_C^B \cdot [p(x)]_C$

Spalten von W: $\qquad [1-x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{G_C(\beta) = W^T\, G_B(\beta)\, W}$$

Transformationsformel für Gram-Matrizen

<u>Beispiel</u>: $V = \{ r_0 + r_1 x + r_2 x^2 \mid r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$, $\beta(p(x), q(x)) = p(2)\, q(2)$

$B = (1, x, x^2)$, $C = (1-x,\ 1+x,\ 1-x^2)$

$$G_B(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_C(\beta) = W^T G_B(\beta)\, W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 6 & -6 \\ -4 & 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 9 & -9 \\ 3 & -9 & -15 \end{pmatrix}$$

$D = (1,\ x-2,\ x^2-4)$. $\qquad G_D(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

§9: Skalarprodukte

Hier: Grundkörper $K = \mathbb{R}$
V reeller Vektorraum

9.1 Def: Eine symmetrische Bilinearform σ auf V heißt Skalarprodukt auf V, falls sie "positiv definit" ist, d.h.

$\sigma(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$ für alle $\vec{u} \in V$ (positiv semidef.)

und $\sigma(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Bsp: Das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt $V = \mathbb{R}^n$.

Ist σ ein Skalarprodukt, so setze

$$\|\vec{u}\|_\sigma = \sqrt{\sigma(\vec{u}, \vec{u})},$$

die durch σ induzierte "Norm".

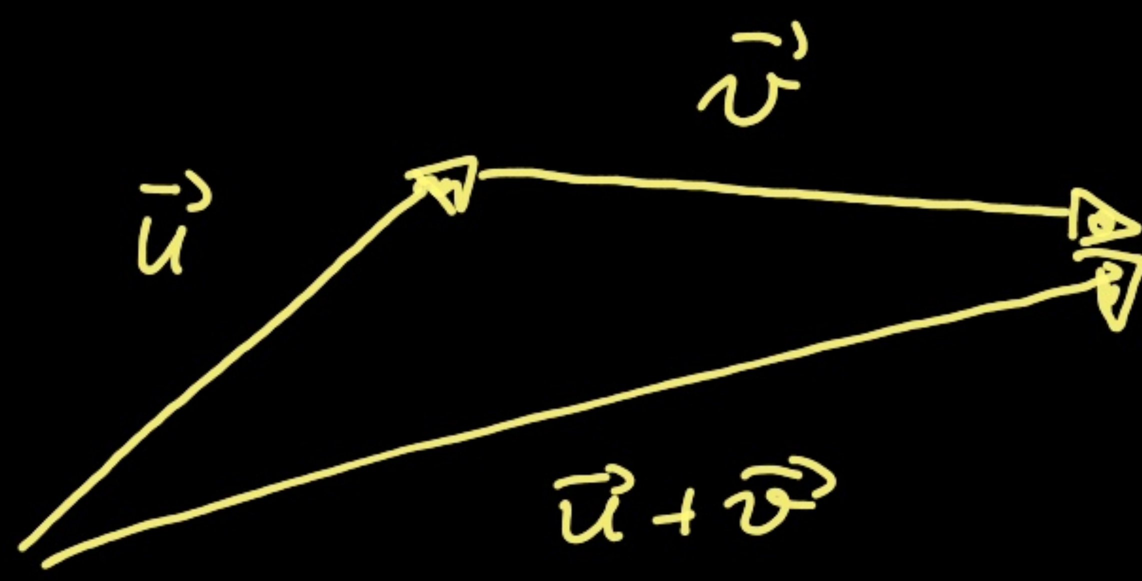
9.2 Def Eine Norm auf V ist eine Abbildung $\nu : V \longrightarrow [0, \infty)$ mit:

(1.) $\nu(\vec{v}) = 0$ genau für $\vec{v} = 0$

(2.) $\nu(r \cdot \vec{v}) = |r| \cdot \nu(\vec{v})$

(3.) $\nu(\vec{u} + \vec{v}) \leq \nu(\vec{u}) + \nu(\vec{v})$

Dreiecksungleichung / Δ-Ungl.



9.3 Satz Ist σ ein Skalarprodukt auf V, so ist $\|\vec{v}\|_\sigma := \sqrt{\sigma(\vec{v}, \vec{v})}$ eine Norm.

Beweis (1.) $\|\vec{0}\|_\sigma = \sqrt{\sigma(\vec{0}, \vec{0})} = \sqrt{0} = 0$

$\|\vec{v}\|_\sigma = 0 \Rightarrow 0 = \|\vec{v}\|_\sigma^2 = \sigma(\vec{v}, \vec{v})$

$\Rightarrow \vec{v} = 0$, da σ pos. definit.

(2) $\|r \cdot \vec{v}\|_\sigma = \sqrt{\sigma(r\vec{v}, r \cdot \vec{v})} = \sqrt{r^2 \, \sigma(\vec{v}, \vec{v})}$

$= \underbrace{|r|}_{=\sqrt{r^2}} \cdot \sqrt{\sigma(\vec{v}, \vec{v})} = |r| \cdot \|\vec{v}\|_\sigma$

(3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|_\sigma^2 = \sigma(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = \sigma(\vec{u}, \vec{u}) + 2\,\sigma(\vec{u}, \vec{v}) + \sigma(\vec{v}, \vec{v})$

siehe (9.3) $\overset{?}{\leq} (\|\vec{u}\|_\sigma + \|\vec{v}\|_\sigma)^2 = \|\vec{u}\|_\sigma^2 + 2\,\|\vec{u}\|_\sigma \|\vec{v}\|_\sigma + \|\vec{v}\|_\sigma^2$

9.3 Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Vorgelegt: $\mathbb{R}$-VR V, σ Skalarprodukt auf V, $\|\cdot\|_\sigma$ die zugehörige Norm.

Dann gilt: $$\boxed{|\sigma(\vec{u},\vec{v})| \leq \|\vec{u}\|_\sigma \cdot \|\vec{v}\|_\sigma} \qquad \text{C-S-U}$$

Außerdem: $|\sigma(\vec{u},\vec{v})| = \|\vec{u}\|_\sigma \cdot \|\vec{v}\|_\sigma$ gilt genau dann, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind.

Also: $$|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3| \leq \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

(Nehme σ = Euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$)

Beweis: Für $\vec{v}=\vec{0}$ ist das klar!

Für $\vec{v}\neq\vec{0}$ setze $r=\sigma(\vec{u},\vec{v})/\sigma(\vec{v},\vec{v})$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sigma(\vec{u}-r\cdot\vec{v},\vec{u}-r\cdot\vec{v})\cdot\sigma(\vec{v},\vec{v})\\
&= \big(\sigma(\vec{u},\vec{u}) - 2r\cdot\sigma(\vec{u},\vec{v}) + r^2\,\sigma(\vec{v},\vec{v})\big)\cdot\sigma(\vec{v},\vec{v})\\
&= \sigma(\vec{u},\vec{u})\cdot\sigma(\vec{v},\vec{v}) - 2\cdot\sigma(\vec{u},\vec{v})^2 + \sigma(\vec{u},\vec{v})^2\\
&= \|\vec{u}\|_\sigma^2\cdot\|\vec{v}\|_\sigma^2 - \sigma(\vec{u},\vec{v})^2 \quad\Rightarrow\quad \text{C-S-U}
\end{aligned}$$

"=" in C-S-U bedeutet $\sigma(\vec{u}-r\cdot\vec{v},\vec{u}-r\cdot\vec{v})=0$, also $\vec{u}-r\vec{v}=0$

d.h. $\vec{u}=r\cdot\vec{v}$

9.4 : Winkel

Vorgelegt ist ein $\mathbb{R}$-VR V mit Skalarprodukt σ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|_\sigma$.

Es seien $\vec{u}, \vec{v}$ von $\vec{0}$ verschieden.

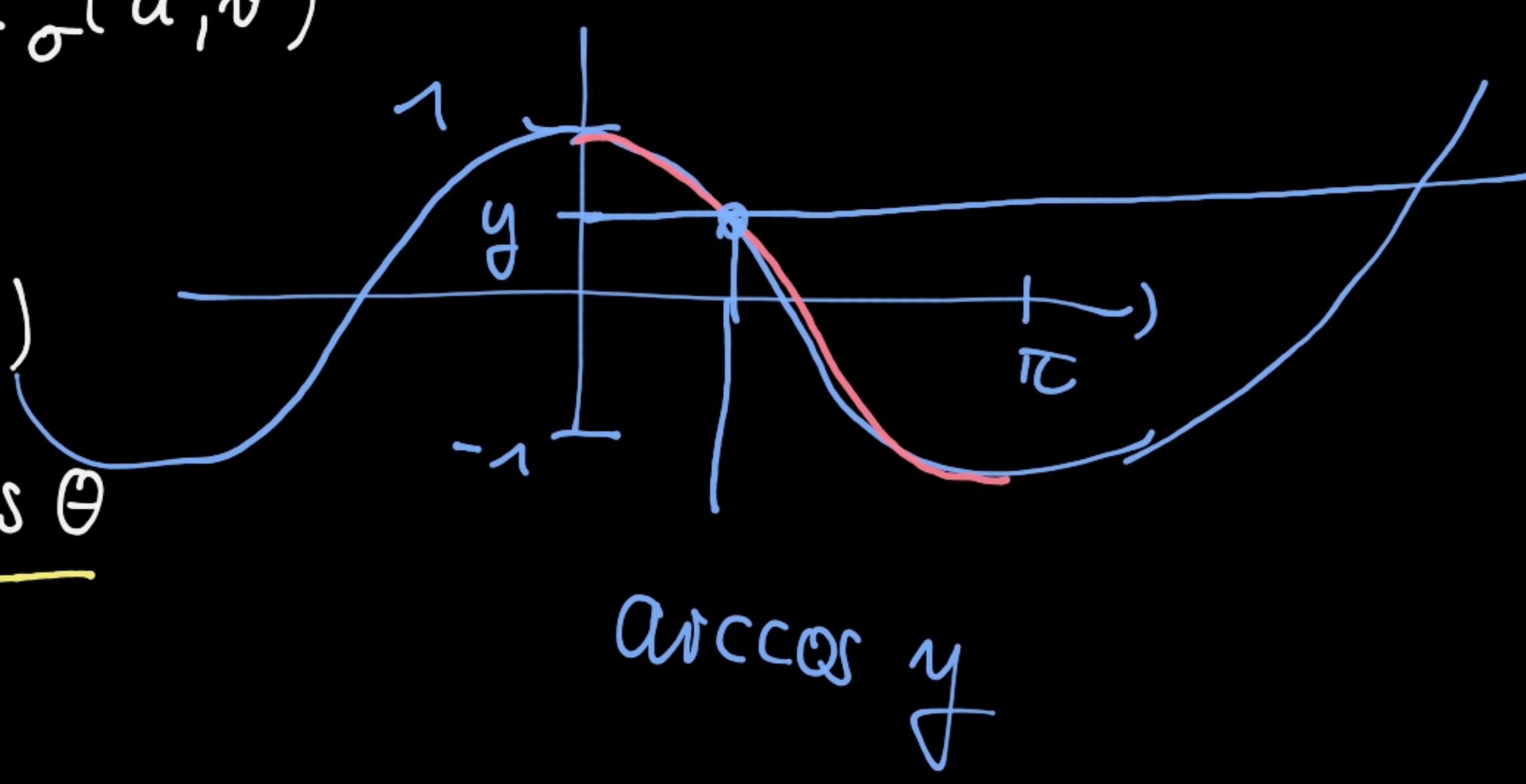
C-S-U : $\quad |\sigma(\vec{u},\vec{v})| \leq \|\vec{u}\|_\sigma \cdot \|\vec{v}\|_\sigma$

Also : $\quad -\|\vec{u}\|_\sigma \cdot \|\vec{v}\|_\sigma \leq \sigma(\vec{u},\vec{v}) \leq \|\vec{u}\|_\sigma \cdot \|\vec{v}\|$

bzw. $\quad -1 \leq \dfrac{\sigma(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|_\sigma \cdot \|\vec{v}\|_\sigma} \leq 1$, d.h. es gibt

$$\measuredangle_\sigma(\vec{u},\vec{v}) = \arccos \frac{\sigma(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|_\sigma \cdot \|\vec{v}\|_\sigma} \in [0,\pi]$$

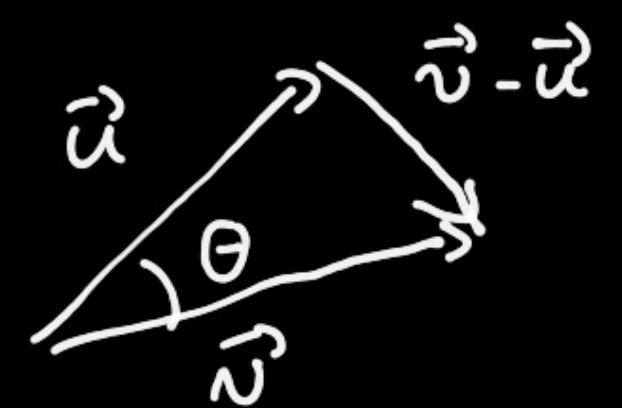
Also: $\quad \sigma(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|_\sigma \cdot \|\vec{v}\|_\sigma \cdot \cos \measuredangle_\sigma(\vec{u},\vec{v})$



Kosinussatz : $\quad \|\vec{v}-\vec{u}\|_\sigma^2 = \sigma(\vec{v}-\vec{u}, \vec{v}-\vec{u})$

$= \sigma(\vec{v},\vec{v}) - 2\,\sigma(\vec{u},\vec{v}) + \sigma(\vec{u},\vec{u})$

$= \|\vec{u}\|_\sigma^2 + \|\vec{v}\|_\sigma^2 - 2\,\|\vec{u}\|_\sigma \|\vec{v}\|_\sigma \cos\theta$

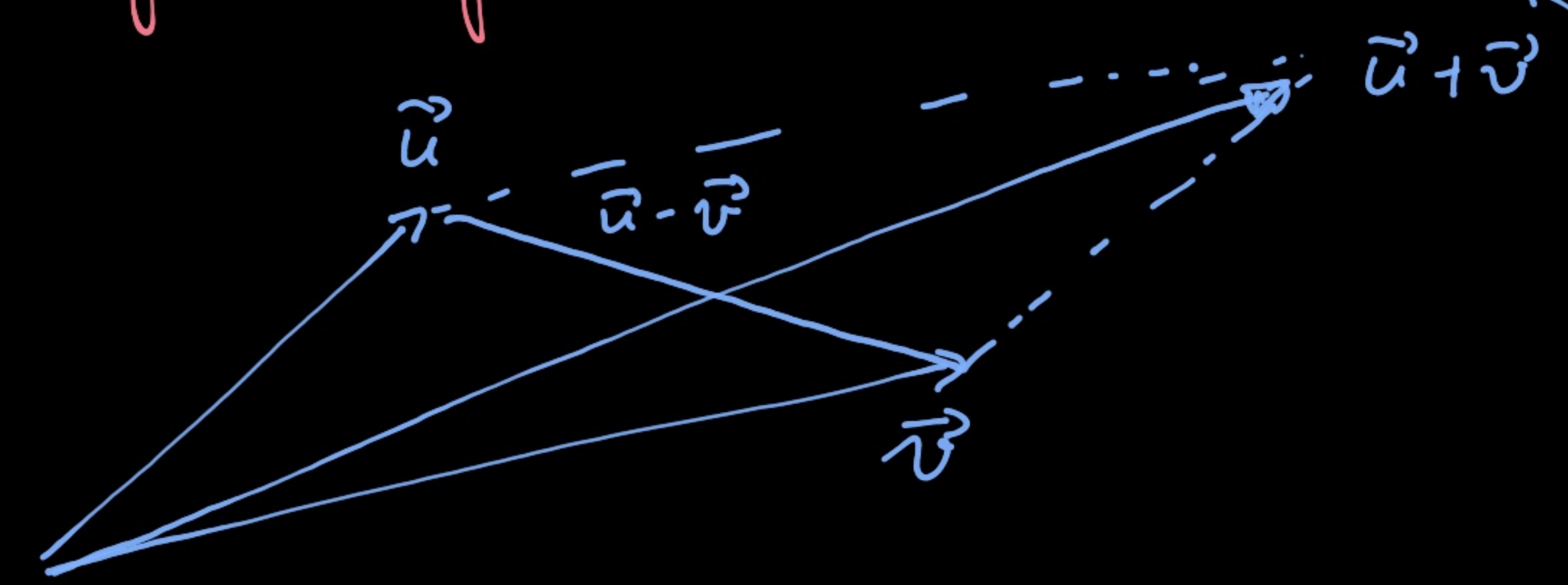


9.5 Satz: Zu einer Norm ν gibt es genau dann ein Skalarprodukt σ mit $\nu = \|\cdot\|_\sigma$, wenn die

Parallelogrammgleichung: $2 \cdot \nu(\vec{u})^2 + 2 \cdot \nu(\vec{v})^2 = \nu(\vec{u}+\vec{v})^2 + \nu(\vec{u}-\vec{v})^2$

Summe der Quadrate der Seiten

= Summe der Quadrate der Diagon.



In diesem Fall: $\sigma(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{4}\left(\nu(\vec{u}+\vec{v})^2 - \nu(\vec{u}-\vec{v})^2\right)$

Beweisidee: Für $\nu = \|\cdot\|_\sigma$ gelten die Gleichungen.

Erfüllt ν die Parallelogrammgl., so zeige, dass

$$\sigma(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{4}\left(\nu(\vec{u}+\vec{v})^2 - \nu(\vec{u}-\vec{v})^2\right)$$

ein Skalarprodukt ist mit $\nu = \|\cdot\|_\sigma$ .... ∎

Beispiel: Maximumsnorm

$\|\underline{u}\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|\}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Δ-Ungl.: $\max\{|u_1+v_1|, |u_2+v_2|, \dots, |u_n+v_n|\}$

$$\leq \max\{|u_1|+|v_1|, |u_2|+|v_2|, \dots, |u_n|+|v_n|\}$$

$$\leq \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\} + \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} \checkmark$$

Parallelogrammgleichung für $\mathbb{R}^2$ nicht erfüllt

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\left\|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\|_\infty^2 + 2\cdot\left\|\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right\|_\infty^2 = 2\cdot 3^2 + 2\cdot 2^2 = 26 \\ \left\|\begin{pmatrix}3-2\\2+2\end{pmatrix}\right\|_\infty^2 + \left\|\begin{pmatrix}3+2\\2-2\end{pmatrix}\right\|_\infty^2 = 4^2 + 5^2 = 41 \end{array}\right\} \neq$$

Also: $\|\cdot\|_\infty \neq \|\cdot\|_\sigma$ für jedes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

Hausaufgabe IngMa 15A:

Zeige: $\|\underline{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, die die Parallelogrammgleichung für $n \geq 2$ nicht erfüllt.

"1-Norm"

9.6: Die Operatornorm für Matrizen

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ setze

"≤" geht auch

$$\|A\|_{op} = \max\{ \|A\cdot \underline{u}\| \mid \|\underline{u}\| = 1 \} \quad \text{Operatornorm von } A.$$

- Δ-Ungl.: $\|A+B\|_{op} = \max\{ \underbrace{\|(A+B)\cdot\underline{u}\|}_{\leq \|A\cdot\underline{u}\| + \|B\cdot\underline{u}\|} \mid \|\underline{u}\|=1\}$

$$\leq \max\{\|A\underline{u}\| \mid \|\underline{u}\|=1\} + \max\{\|B\underline{u}\| \mid \|\underline{u}\|=1\}$$

$$= \|A\|_{op} + \|B\|_{op}$$

- Für alle $\underline{u}$ gilt $\|A\cdot\underline{u}\| \leq \|A\|_{op}\cdot\|\underline{u}\|$

Für $\underline{u}=\underline{0}$ klar; für $\underline{u}\neq\underline{0}$: $\left\|\frac{1}{\|u\|}\cdot u\right\| = 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\|\underline{u}\|}\cdot\|A\cdot\underline{u}\| = \left\|A\,\underbrace{\left(\frac{1}{\|\underline{u}\|}\cdot\underline{u}\right)}_{\|\cdot\|=1}\right\| \leq \|A\|_{op} \rightsquigarrow \checkmark$$

Hausaufgabe IngMa 15B: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Berechne $\|A\|_{op}$ bzgl $\|\cdot\|_2$ und bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Hinweis: Für $\underline{u}\in\mathbb{R}^2$ ist $\|\underline{u}\|_2 = 1$, falls $\underline{u} = \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}$ für passendes t.