Wozu Skalarprodukte / Normen?

Erinnerung: V reeller Vektorraum

$\sigma : V \times V \to [0, \infty)$ heißt SKALARPRODUKT, wenn

(1.) σ bilinear ($\sigma(\underline{u}+\underline{v}, \underline{w}) = \sigma(\underline{u}, \underline{w}) + \sigma(\underline{v}, \underline{w})$

$\sigma(r \cdot \underline{u}, \underline{v}) = r \cdot \sigma(\underline{u}, \underline{v})$

2. Komp. analog)

(2.) σ ist symmetrisch, d.h. $\sigma(\underline{u}, \underline{v}) = \sigma(\underline{v}, \underline{u})$

(3.) σ ist positiv definit, d.h. $\sigma(\underline{u}, \underline{u}) = 0 \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$.

Bsp $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T \cdot \vec{v}$ euklidisches Skalarprodukt

$= \|\vec{u}\|_2 \cdot \|\vec{v}\|_2 \cdot \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$

HIER Skalarprodukt $\longleftrightarrow$ Geometrie / Trigonometrie

Bsp $V = \mathbb{R}^3$, $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ symmetrisch, "positiv definit"

d.h. $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u}^T \Theta \vec{u} > 0$

$\uparrow$ "Theta"

$\sigma(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^T \cdot \Theta \cdot \vec{v}$ symmetrische Bilinearform

$\sigma(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v}^T \Theta \vec{u} = (\vec{v}^T \Theta \vec{u})^T = \vec{u}^T \cdot \Theta^T \cdot \vec{v}$

$\underset{\uparrow}{=} \vec{u}^T \Theta \vec{v} = \sigma(\vec{u}, \vec{v})$

Θ symm.

Θ Trägheitstensor $E_{rot} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \vec{\omega}^T \cdot \Theta \cdot \vec{\omega}}_{\frac{1}{2}\sigma(\vec{\omega}, \vec{\omega})} \leftarrow$

$\rightsquigarrow$ Mechanik starrer Körper

Ein obskures (?) Beispiel $\qquad$ $[a,b]$ Intervall

V = Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\underset{\in V}{\underline{f,g}}$ $\rightsquigarrow$ bilde neue Funktion: $f+g$

def. durch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

für $r \in \mathbb{R}$: $\qquad r \cdot f : [a,b] \to \mathbb{R}$

def. durch $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$

Damit ist V ein reeller Vektorraum. $\qquad$ $\boxed{\text{STOP}}$

$f,g \in V$ $\qquad \displaystyle\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx =: \sigma(f,g) = \langle f, g \rangle$

ist ein Skalarprodukt auf V $\qquad$ gezeigt?

$\sigma(f,g) = \sigma(g,f)$: ✓

linear im 1. Argument: $\qquad \sigma(f_1 + f_2, g) = \displaystyle\int_a^b (f_1 + f_2)(x) \cdot g(x)\, dx$

$$= \int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big) \cdot g(x)\, dx = \int_a^b \big[f_1(x) g(x) + f_2(x) g(x)\big]\, dx$$

$$= \int_a^b f_1(x) g(x)\, dx + \int_a^b f_2(x) g(x)\, dx = \sigma(f_1, g) + \sigma(f_2, g)$$

$\sigma(r \cdot f, g) = r \cdot \sigma(f,g)$ für ein r aus $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ ✓

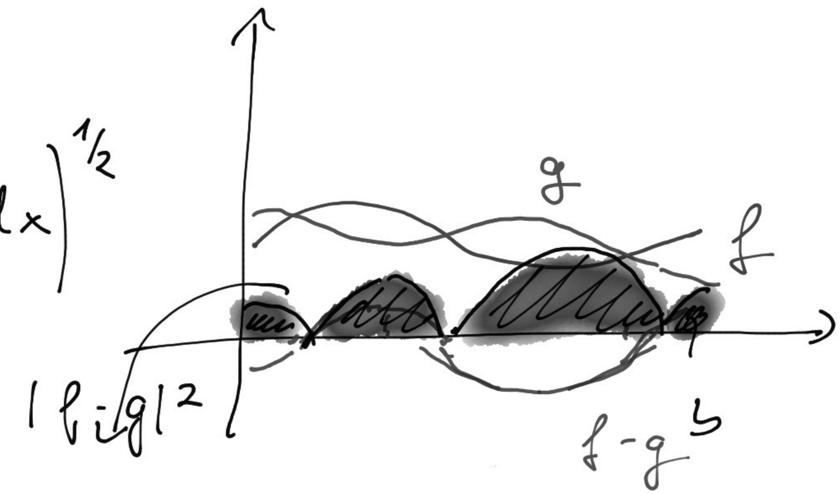
positiv definit: $f \neq 0 \Rightarrow \sigma(f,f) = \displaystyle\int_a^b \underbrace{f(x)^2}_{>0}\, dx > 0$ ✓

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sigma(f,f)}$$ "L^2 - Norm"

$$= \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$f, g \in V$

"Abstand": $\|f-g\|_2 = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2 \, dx \right)^{1/2}$



Betrachte einen Unterraum U von V,

z.B. $U = \operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3\}$

$$= \{ f \mid f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$

Vorgelegt: $f(x) = \sin(x)$

Problem: Für welches $p \in U$ ist $\|f-p\|_2$ minimal?

Wie findet man dieses p?

V

$p \in U$ ist "beste Approximation im Sinne der L^2-Norm" von f, d.h. $\|f - p\|_2$ ist minimal für $p \in U$, falls

$$\langle f-p, q \rangle = 0 \text{ f. alle } q \in U$$

Bsp: U = Raum der Polynome

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \in U$$

$$[a,b] = [0,1].$$

Gibt zu $\varepsilon > 0$ ein n mit

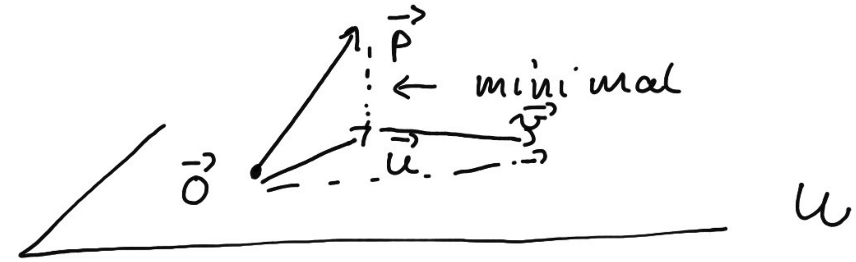
$$\max_{0 \le x \le 1} |e^x - p_n(x)| \le \varepsilon$$

$$\max_{0 \le x \le 1} (e^x - p_n(x))^2 \le \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (e^x - p_n(x))^2 \, dx \le \int_0^1 \varepsilon^2 \, dx = \varepsilon^2$$

$$\|\exp - p_n\|_2 \le \varepsilon$$

$\mathbb{R}^3$



Abstand $\|\vec{p} - \vec{u}\|_2$ minimal, wenn $\vec{p} - \vec{u}$ senkrecht auf U steht, also senkrecht auf jedem $\vec{v} \in U$, d.h.

$$\langle \vec{p} - \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ f. alle } \vec{v} \in U.$$

Ist $\vec{u}$ so ein Vektor, so gilt

$$\langle \vec{p} - (\vec{u} + \vec{v}), \vec{p} - (\vec{u} + \vec{v}) \rangle = \|p - (\vec{u} + \vec{v})\|$$

$$= \langle \vec{p} - \vec{u}, \vec{p} - \vec{u} - \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{p} - \vec{u} - \vec{v} \rangle$$

$$= \langle \vec{p} - \vec{u}, \vec{p} - \vec{u} \rangle - \underbrace{\langle \vec{p} - \vec{u}, \vec{v} \rangle}_{=0} \text{ (s.o.)}$$

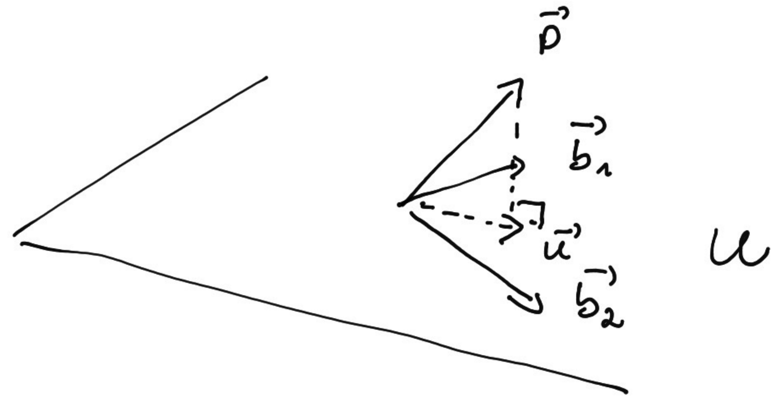
$$- \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{p} - \vec{u} \rangle}_{=0} + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

$$= \|\vec{p} - \vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2$$

Insges. $\|\vec{p} - (\vec{u} + \vec{v})\|_2^2 = \|\vec{p} - \vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2$

minimal für $\vec{v} = \vec{0}$

$\mathbb{R}^3$



$\vec{p} - \vec{u}$ senkrecht auf U

$\vec{v} \in U \, , \quad \vec{v} = s_1 \vec{b}_1 + s_2 \vec{b}_2$

$\vec{u} = r_1 \vec{b}_1 + r_2 \vec{b}_2$

$$
\begin{aligned}
0 = \langle \vec{p} - \vec{u}, \vec{v} \rangle = \; & \langle \vec{p} - r_1 \vec{b}_1 - r_2 \vec{b}_2 \, , \, s_1 \vec{b}_1 + s_2 \vec{b}_2 \rangle \\
& s_1 \langle \vec{p}, \vec{b}_1 \rangle + s_2 \langle \vec{p}, \vec{b}_2 \rangle \\
& - r_1 s_1 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle - r_1 s_2 \underbrace{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle}_{=0} - r_2 s_1 \underbrace{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_1 \rangle}_{=0} \\
& - r_2 s_2 \underbrace{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle}_{1}
\end{aligned}
$$

Spezielle Wahl von $\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2 \}$ liefert $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle = \langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle = 1$, und $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = 0$. Dann:

$$0 = \langle \vec{p} - \vec{u}, \vec{v} \rangle = s_1 \langle \vec{p}, \vec{b}_1 \rangle + s_2 \langle \vec{p}, \vec{b}_2 \rangle - r_1 s_1 - r_2 s_2$$

$s_1 = 1, \; s_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \langle \vec{p}, \vec{b}_1 \rangle - r_1 = 0$ bzw. $r_1 = \langle \vec{p}, \vec{b}_1 \rangle$

$s_1 = 0, \; s_2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad r_2 = \langle \vec{p}, \vec{b}_2 \rangle$

$$\boxed{\vec{u} = \langle \vec{p}, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1 + \langle \vec{p}, \vec{b}_2 \rangle \cdot \vec{b}_2}$$

ist das richtige $\vec{u}$

FOURIER-Entwicklung

FOURIER - Entwicklung

Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt σ.

Wir setzen $\nu(\underline{v}) := \sqrt{\sigma(\underline{v}, \underline{v})}$ (das ist eine Norm).

Sei U ein endlich-dimensionaler Unterraum und

$B = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von U,

d.h. (1.) B ist eine Basis von U

(2.) $\nu(\underline{u}_i)^2 = \sigma(\underline{u}_i, \underline{u}_i) = 1$ f. alle i

(3.) $\sigma(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = 0$ für $i \neq j$

Vorgelegt sei ein $\underline{v} \in V$.

Dann gilt für den in U liegenden Vektor

$$\underline{u} = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle \cdot \underline{u}_1 + \ldots + \langle \underline{v}, \underline{u}_n \rangle \cdot \underline{u}_n \, ;$$

FOURIER - Entwicklung von $\underline{v}$ in U.

$$\nu(\underline{v} - \underline{u}) = \sqrt{\sigma(\underline{v} - \underline{u}, \underline{v} - \underline{u})} = \min \{ \nu(\underline{v} - \underline{u}') \mid \underline{u}' \in U \}$$

Das GRAM-Schmidt-Verfahren

oder wie man aus jeder Basis eine Orthonormalbasis herstellt.

Bezeichnungen wie oben; $A = \{ \underline{a}_1, -, \underline{a}_n \}$ bel. Basis von U.

Ziel: Produziere eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{ \underline{c}_1, -, \underline{c}_n \}$ von U
mit $\operatorname{span}\{ \underline{c}_1, -, \underline{c}_k \} = \operatorname{span}\{ \underline{a}_1, -, \underline{a}_k)$ für $1 \le k \le n$.

Das Verfahren:

- $\underline{c}_1 = \underline{a}_1 / \nu(\underline{a}_2)$ $\qquad \nu(\underline{c}_1) = 1$, $\operatorname{span}\{\underline{c}_1\} = \operatorname{span}\{\underline{a}_1\}$

  $\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - \sigma(\underline{a}_2, \underline{c}_1) \cdot \underline{c}_1$

- $\underline{c}_2 = \underline{b}_2 / \nu(\underline{b}_2)$ $\qquad \{ \underline{c}_1, \underline{c}_2 \}$ ONB von $\operatorname{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$

  $\underline{b}_3 = \underline{a}_3 - \sigma(\underline{a}_3, \underline{c}_1) \cdot \underline{c}_1 - \sigma(\underline{a}_3, \underline{c}_2) \cdot \underline{c}_2$

- $\underline{c}_3 = \underline{b}_3 / \nu(\underline{b}_3)$ $\qquad \{ \underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3 \}$ ONB von $\operatorname{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$

  $\underline{b}_4 = \underline{a}_4 - \sigma(\underline{a}_4, \underline{c}_1) \cdot \underline{c}_1 - \sigma(\underline{a}_4, \underline{c}_2) \cdot \underline{c}_2 - \sigma(\underline{a}_4, \underline{c}_3) \cdot \underline{c}_3$

- $\underline{c}_4 = \underline{b}_4 / \nu(\underline{b}_4)$

usw.

Die Hausaufgabe

Vorgelegt sind die Vektoren

$$\vec{a}_1 = (1, -2, 1, 4)^T$$

$$\vec{a}_2 = (0, 1, 3, -1)^T$$

$$\vec{a}_3 = (1, -3, 1, -1)^T$$

$$\vec{v} = (1, 2, 3, 4)^T$$

a) Wende das GRAM-SCHMIDT-Verfahren auf die Basis $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ des Unterraums $U = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ an.

b) Berechne die FOURIER-Entwicklung von $\vec{v}$ bzgl. der in a) bestimmten ONB von U.

c) Welchen Abstand hat der Punkt $(1, 2, 3, 4)$ von U?

($\mathbb{R}^4$ mit euklidischem Skalarprodukt)

Beispiel für Gram-Schmidt

$[a,b] = [-4,4]$, "Vektoren" sind (stetige) Funktionen $f: [-4,4] \to \mathbb{R}$

$\langle f, g \rangle = \int_{-4}^{4} f(x)g(x)\,dx \qquad \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-4}^{4} f(x)^2\,dx$

$a_0(x) = 1,\ a_1(x) = x,\ a_2(x) = x^2,\ \ldots\ldots,\ a_{14}(x) = x^{14}$

$U = \operatorname{span}\{1, x, x^2, \ldots, x^{14}\}$, $\boxed{f(x) = e^{\sin(x)}}$

Gram - Schmidt

- $b_0(x) = a_0(x)$, $c_0(x) = b_0(x) / \|b_0\|_2$

  $b_0(x) = 1$, $\|b_0\|_2^2 = \int_{-4}^{4} 1^2\,dx = [x]_{-4}^{4} = 8$, $c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

- $b_1(x) = a_1(x) - \langle a_1, c_0 \rangle \cdot c_0(x)$

  $= a_1(x) - \langle a_1, \frac{b_0}{\|b_0\|_2} \rangle \cdot \frac{b_0(x)}{\|b_0\|_2} = a_1(x) - \frac{\langle a_1, b_0 \rangle}{\|b_0\|_2^2} \cdot b_0(x)$

  $\langle a_1, b_0 \rangle = \int_{-4}^{4} x \cdot 1\,dx = 0$, also $b_1(x) = a_1(x) = x$

  $\|b_1\|_2^2 = \int_{-4}^{4} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{4} = \frac{2}{3} \cdot 4^3 = \frac{2^7}{3}$, $\|b_1\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 8$

  $\rightsquigarrow c_1(x) = \frac{1}{\|b_1\|_2} \cdot b_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{8} \cdot x = \frac{\sqrt{6}}{16} \cdot x$

- $b_2(x) = a_2(x) - \frac{\langle a_2, b_0 \rangle}{\|b_0\|_2^2} \cdot b_0(x) - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|_2^2} \cdot b_1(x)$

  $c_2(x) = \frac{3}{128}\sqrt{10}\,x^2 - \frac{\sqrt{10}}{8}$

- $c_3(x) = \frac{5}{512}\sqrt{14}\,x^3 - \frac{3}{32}\sqrt{14} \cdot x$

numerisch

$\langle c_3, f \rangle = \int_{-4}^{4} \left(\frac{5}{512}\sqrt{14}\,x^3 - \frac{3}{32}\sqrt{14}\,x\right) e^{\sin x}\,dx$

Ergebnisse:

$f(x) = e^{\sin(x)}$ auf $[-4, 4]$

(I) FOURIER – Entwicklung im Unterraum

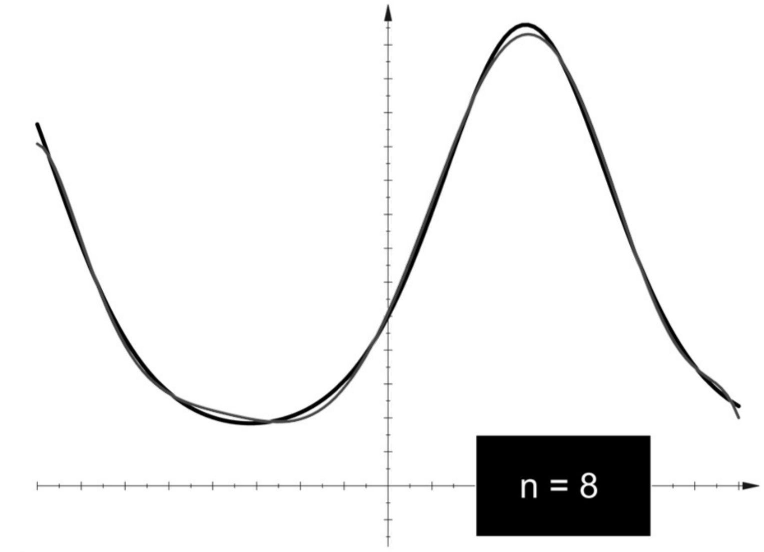
$U_n = \text{span}\{a_0(x), a_1(x), .., a_n(x)\}$

$= $ Polynome vom Grad $\leq n$

$p_n(x) = \langle f, c_0 \rangle \cdot c_0(x) + \dots + \langle f, c_n \rangle \cdot c_n(x)$

$n = 0 \dots 14 \rightarrow$ Animation

$\| f - p_n \|_2^2 = \int_{-4}^{4} (f(x) - p_n(x))^2 dx$



(II) TAYLOR

$$q_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$q_n(0) = f(0)$, $q_n'(0) = f'(0)$, $\dots$, $q_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$.

$f(0) = 1$, $f'(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin x}$

$f'(0) = 1$, $f''(x) = (\cos(x)^2 - \sin(x)) \cdot e^{\sin x}$

$f''(0) = 1$

$q_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2$

$\vdots$

$n = 0 \dots 14$