9.7 Orthonormalbasen:

Vorgelegt: Endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR V mit Skalarprodukt σ.

d.h. $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ symm. Bilinearform, positiv definit, d.h. $\sigma(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ für alle $\vec{v}$

$\sigma(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

Bsp: $\sigma(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^t \underline{v} = \langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle$ auf $V = \mathbb{R}^n$

Eine Basis $B = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$ heißt Orthonormalbasis von V (kurz ONB), wenn:

$$\sigma(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j$$
$$\sigma(\underline{u}_i, \underline{u}_i) = 1 \quad \text{für alle } i$$

Alternativ

$\sigma(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = \delta_{ij}$

mit "Kronecker-Delta"

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Beispiel: Für das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis.

9.8 Orthogonale Abbildungen

Vorgelegt: Endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-VR V mit Skalarprodukt σ sowie eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V$.
Mit $\nu(\vec{v}) = \sqrt{\sigma(\vec{v}, \vec{v})}$ bezeichnen wir die zu σ gehörende Norm.

Dann gilt: Genau dann ist f längentreu, d.h. es gilt $\nu(f(\vec{v})) = \nu(\vec{v})$, wenn f eine orthogonale Abbildung ist, d.h.

$$\sigma(f(\vec{u}), f(\vec{v})) = \sigma(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{f. alle } \vec{u}, \vec{v}$$

Beweis: • f orthogonal

$$\Rightarrow \nu(f(\vec{v})) = \sqrt{\sigma(f(\vec{v}), f(\vec{v}))} \overset{\text{Vor.}}{=} \sqrt{\sigma(\vec{v}, \vec{v})} = \nu(\vec{v})$$

d.h. f ist längentreu

• f längentreu: $\sigma(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu(\vec{u}+\vec{v})^2 - \nu(\vec{u})^2 - \nu(\vec{v})^2 \right)$

$$\sigma(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}) = \sigma(\vec{u}, \vec{u}) + 2\,\sigma(\vec{u}, \vec{v}) + \sigma(\vec{v}, \vec{v})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\nu(f(\vec{u}) + f(\vec{v}))^2 - \nu(f(\vec{u}))^2 - \nu(f(\vec{v}))^2 \right) = \sigma(f(\vec{u}), f(\vec{v})),$$

d.h. f ist orthogonal. ∎

9.9 Orthogonale Matrizen

Vorgelegt: Endlich-dim. $\mathbb{R}$-VR V mit Skalarprodukt σ.
Lineare Abbildung $f: V \to V$.
ONB $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ von V.
Sowas gibt es: Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Genau dann ist f orthogonal, wenn $\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^T \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = E$.

Beweis: Für $\vec{v} \in V$ gilt

$$\sigma(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}]_{\mathcal{B}}^T \cdot G_{\mathcal{B}}(\sigma) \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{u}]_{\mathcal{B}}^T [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \langle [\vec{u}]_{\mathcal{B}}, [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \rangle$$

$$G_{\mathcal{B}}(\sigma) = (\sigma(\vec{u}_i, \vec{u}_j))_{i,j=1}^n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n = E$$

Also: Koordinatisieren mit ONB "macht" aus V den $\mathbb{R}^n$ mit dem gewöhnlichen Euklidischen Skalarprodukt.

$$[f(\vec{u})]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\vec{u}]_{\mathcal{B}}$$

Also: $\sigma(f(\vec{u}), f(\vec{v})) = [f(\vec{u})]_{\mathcal{B}}^T \cdot [f(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = \left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\vec{u}]_{\mathcal{B}}\right)^T \left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}\right)$

$$= [\vec{u}]_{\mathcal{B}}^T \cdot \left(\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^T \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}\right.$$

$$\overset{!}{=} \sigma(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}]_{\mathcal{B}}^T \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

genau dann, wenn $\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^T \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = E$ $\blacksquare$

9.10 Orthogonale Matrizen:

Eine quadratische reelle Matrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **orthogonal**, wenn $R^T \cdot R = E$ gilt.

Bem

(a) $f: (V, \sigma) \to (V, \sigma)$ orthogonal, falls $[f]_B^B$ orthogonale Matrix ist, wenn B eine ONB. (9.9)

(b) $R^T \cdot R = E$ bedeutet: R invertierbar und $R^{-1} = R^T$

(c) Orthogonale Abbildungen sind invertierbar.

(d) $O(n)$: Menge der orthogonalen $n \times n$-Matrizen,

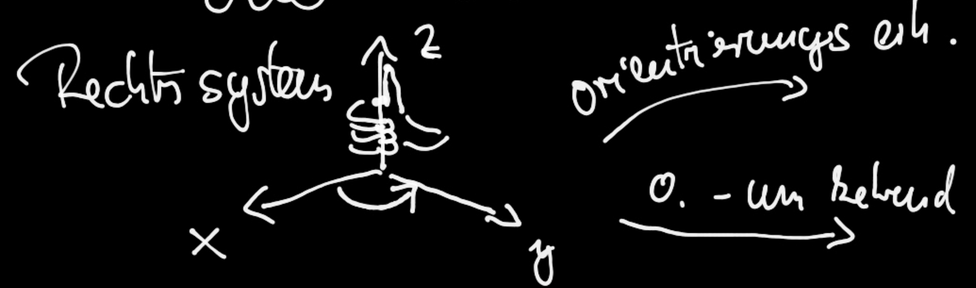
d.h. $R \in O(n) \iff R^T \cdot R = E$

Ist $R \in O(n)$, so gilt $\det(R)^2 = \det(R^T) \cdot \det(R) =$

$= \det(R^T R) = \det(E) = 1$,

also $\det R = 1$, R ist **orientierungserhaltend**

oder $\det R = -1$, R ist **orientierungsumkehrend**



Rechtssystem

Linkssystem

Bem. $R \in O(n)$ erhält das Volumen $|\det|$ eines Spats

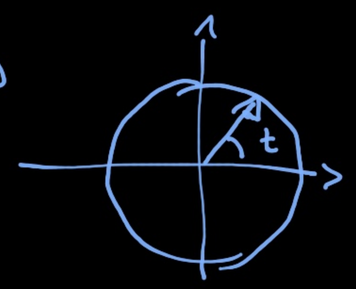
(e) $R = (\underline{r}_1 \cdots \underline{r}_n)$ ist genau dann orthogonal,

wenn die Spalten $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bzgl. des Euklidischen Skalarprodukts bilden

Denn: $R^T R = \begin{pmatrix} \underline{r}_1^T \\ \vdots \\ \underline{r}_n^T \end{pmatrix} \cdot (\underline{r}_1 \cdots \underline{r}_n) = (\underline{r}_i^T \underline{r}_j)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ ✓

(f) $SO(n) = \{ R \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid R^T R = E \text{ und } \det R = 1 \}$

"spezielle orthogonale Abbildungen".



Bsp. 1: $\mathbb{R}^{2\times 2} \ni R = (\underline{r}_1 \; \underline{r}_2)$ orthogonal, falls

$\|\underline{r}_1\|_2^2 = \underline{r}_1^T \underline{r}_1 = 1 = \underline{r}_2^T \cdot \underline{r}_2$, $\underline{r}_1^T \cdot \underline{r}_2 = 0$

Es gibt $t \in \mathbb{R}$ mit $\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. $\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\underline{r}_1^T \cdot \underline{r}_2 = (\cos t, \sin t) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cos t + y \sin t = 0$

Folgt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$; $\|\underline{r}_2\|_2^2 = s^2 \sin^2 t + s^2 \cdot \cos^2 t = s^2 \overset{!}{=} 1$

Also: $s = \pm 1$ und: $R \in O(2) \iff R = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2)$

oder $R = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \notin SO(2)$

Beispiel B

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \in O(3)\,? \qquad R^{-1} = ?$$

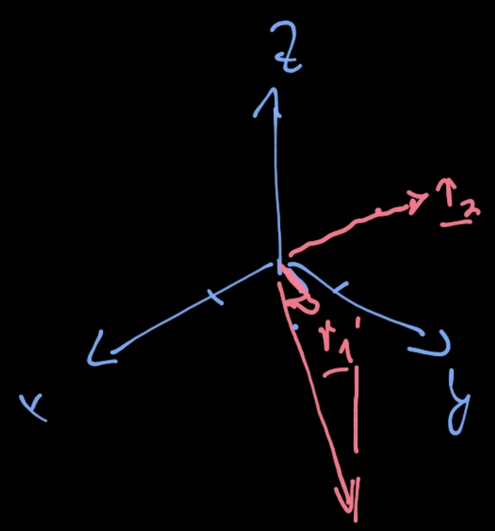
$$(R^T R)^T = R^T R$$

d.h. $R^T \cdot R$ ist symmetrisch!

$R^T R$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{6}$	$-2/\sqrt{6}$
$1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{6}$	1	0	0
$-1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{6}$	0	1	0
$0 \quad 1/\sqrt{3} \quad -2/\sqrt{6}$	0	0	1

$$\Rightarrow R^T R = E \Rightarrow R \in O(3)$$

$$R^T = R^{-1}$$



Vermutung: $\det R = -1$

$$\det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) = -1$$

§ 10: Symmetrische Matrizen

$G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

- zugeh. symmetrische Bilinearform ist
$$\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T \cdot G \cdot \underline{v}$$

- zugeh. lineare Abbildung:
$$f(\underline{u}) = G \cdot \underline{u}$$

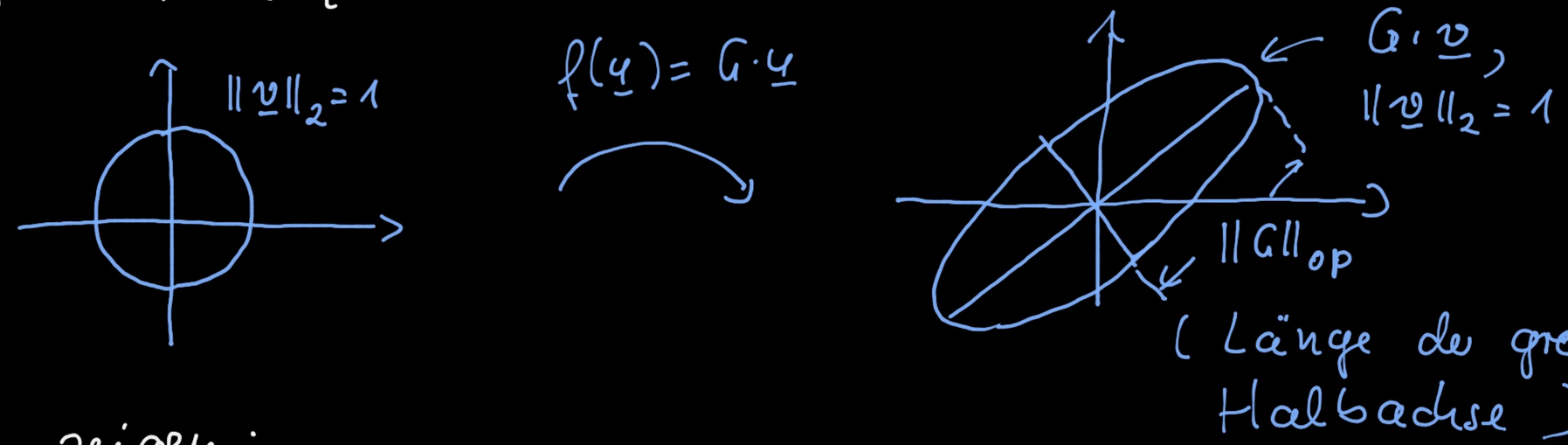
$\langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \cdot \underline{v}$ Euklidisches Skalarprodukt

$$\langle G\underline{u} \mid \underline{v} \rangle = (G\underline{u})^T \cdot \underline{v} = \underline{u}^T G^T \underline{v} = \underline{u}^T G \cdot \underline{v} \quad \swarrow \beta(\underline{u}, \underline{v})$$
$$= \langle \underline{u} \mid G\underline{v} \rangle,$$

also
$$\boxed{\langle G \cdot \underline{u} \mid \underline{v} \rangle = \langle \underline{u} \mid G \cdot \underline{v} \rangle}$$

Vorgelegt: $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch

$$\|G\|_{op} = \max \{ \|G \cdot \underline{u}\|_2 \mid \underline{u} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\underline{u}\|_2 = 1 \}$$



Kann zeigen:

$$\|G\|_{op} = \max \{ \underbrace{|\langle \underline{v} \mid G\,\underline{v} \rangle|}_{\beta(\underline{v},\,\underline{v}) \,=\, \underline{v}^T G\, \underline{v}} \mid \underline{v} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\underline{v}\|_2 = 1 \}$$

<u>10.1</u> <u>Satz</u>: (G symmetrisch).

Dann ist $\|G\|_{op}$ oder $-\|G\|_{op}$ ein Eigenwert von G ist, und zwar der mit dem größten Betrag.

Außerdem: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von G sind orthogonal.

10.1 Satz: (G symmetrisch).

Dann ist $\|G\|_{op}$ oder $-\|G\|_{op}$ ein Eigenwert von G, und zwar der mit dem größten Betrag.

Außerdem: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von G sind orthogonal.

Beweis: $\|G\|_{op} = \max\{\, |\langle \underline{v} \mid G\underline{v}\rangle| \mid \|\underline{v}\|_2 = 1 \,\}$.

Wähle $\underline{v}$ mit $\|\underline{v}\|_2 = 1$ und $|\langle \underline{v} \mid G\underline{v}\rangle| = \|G\|_{op}$.

Setze $r = \langle \underline{v} \mid G\underline{v}\rangle = \pm \|G\|_{op}$.

$$0 \leq \|G\cdot\underline{v} - r\cdot\underline{v}\|_2^2 = \langle G\cdot\underline{v} - r\cdot\underline{v} \mid G\underline{v} - r\cdot\underline{v}\rangle$$

$$= \underbrace{\langle G\cdot\underline{v} \mid G\cdot\underline{v}\rangle}_{\|G\cdot\underline{v}\|_2^2 \leq \|G\|_{op}^2 = r^2} + r^2\cdot\underbrace{\langle \underline{v} \mid \underline{v}\rangle}_{=1} - 2\cdot r\,\underbrace{\langle \underline{v} \mid G\underline{v}\rangle}_{r} \leq 0$$

Also $\|G\cdot\underline{v} - r\cdot\underline{v}\|_2 = 0$, d.h. $G\cdot\underline{v} = r\cdot\underline{v}$, also $\underline{v}$ ist EV zum EW $r = \pm\|G\|_{op}$.

10.1 Satz: (G symmetrisch).

Dann ist $\|G\|_{op}$ oder $-\|G\|_{op}$ ein Eigenwert von G, und zwar der mit dem größten Betrag.

Außerdem: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von G sind orthogonal.

Beweis (Forts.):

- Sei t EW von G, $\underline{v}$ ein zugeh. EV mit $\|\underline{v}\|_2 = 1$.

  Dann: $|t| = |t| \cdot |\langle \underline{v} | \underline{v} \rangle| = |\langle \underline{v} | t \cdot \underline{v} \rangle|$
  $= |\langle \underline{v} | G\underline{v} \rangle| \leq \|G\|_{op}$

- Sind $\underline{u}, \underline{v}$ EV von G zu den EW $s \neq t$,

  also $G \cdot \underline{u} = s \cdot \underline{u}$, $G \cdot \underline{v} = t \cdot \underline{v}$, $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0}$

  $t \cdot \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = \langle \underline{u} | G\underline{v} \rangle = \langle G \cdot \underline{u} | \underline{v} \rangle = s \cdot \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle$,

  d.h. $\underbrace{(t-s)}_{\neq 0} \cdot \langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = 0$, also $\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = 0$. ∎

Der Weg zum "Spektralsatz":

<u>1. Schritt:</u> Vorgelegt ist ein endlich-dim. $\mathbb{R}$-VR V mit Skalarprodukt σ.

$f: V \to V$ sei linear und selbstadjungiert,

d.h. $\sigma(\vec{u}, f(\vec{v})) = \sigma(f(\vec{u}), \vec{v})$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$

<u>Bsp</u>: $V = \mathbb{R}^n$, $\sigma = \langle \cdot | \cdot \rangle$, $f(\underline{u}) = G \cdot \underline{u}$ mit G symm.

Wähle ein ONB $\mathcal{B}$ bzgl. σ.

In Koordinaten: $\sigma(\vec{u}, \vec{v}) = \langle [\vec{u}]_{\mathcal{B}} | [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \rangle$

$$[f(\vec{u})]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}_{\text{symmetrische Matrix}} \cdot [\vec{u}]_{\mathcal{B}}$$

Also: $t_0 = \pm \| f \|_{op} = \pm \| [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \|_{op}$ ist ein Eigenwert von f

und: Eigenvektoren von f bzgl. <u>verschiedener</u> Eigenwerte stehen bezüglich σ senkrecht aufeinander.

E_t = Eigenraum von f bzlg. EW t.

2. Schritt: Zerlege V

"Lotraum" $E_t^\perp = \{ \vec{u} \in V \mid \sigma(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ f. alle } \vec{v} \in E_t \}$

Beh (1.) $E_t \cap E_t^\perp = \{\vec{0}\}$

wg. $\vec{u} \in E_t \cap E_t^\perp \Rightarrow \sigma(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$

(2.) $E_t + E_t^\perp = V$ wähle ONB $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$ von E_t

$$\vec{v} \in V \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\vec{v} - \sum_{l=1}^{k} \sigma(\vec{v}, \vec{w}_l) \cdot \vec{w}_l}_{\in E_t^\perp} + \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \sigma(\vec{v}, \vec{w}_l) \cdot \vec{w}_l}_{\in E_t}$$

(3.) $\vec{u} \in E_t^\perp \Rightarrow f(\vec{u}) \in E_t^\perp$

Sei $\vec{v} \in E_t$ (also $f(\vec{v}) = t \cdot \vec{v}$).

Dann: $\sigma(f(\vec{u}), \vec{v}) = \sigma(\vec{u}, f(\vec{v})) = t \cdot \sigma(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Fazit: $E_t^\perp$ ist VR mit $\dim E_t^\perp < \dim V$,

σ ist ein Skalarprodukt auf $E_t^\perp$

$f|_{E_t^\perp} : E_t^\perp \longrightarrow E_t^\perp$ selbstadjungiert.

<u>3. Schritt</u>: $V = E_t + E_t^\perp$

Mache analog mit $E_t^\perp$ und erhalte

$$V = E_{t_1} + E_{t_2} + \dots + E_{t_\ell},$$

mit
- E_{t_j} ist Eigenraum von f zum EW t_j
- $t_1, \dots, t_\ell$ sind paarweise verschieden
- $\vec{v}_j \in E_{t_j} \setminus \{0\} \Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ lin. unabh.
- $j \neq i \Rightarrow E_{t_i}, E_{t_j}$ stehen senkrecht

<u>4. Schritt</u> Wähle ONB der E_{t_i}; die Vereinigung dieser ist eine ONB B von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.

<u>Spektralsatz</u>: V, σ, f wie oben. Dann besitzt V eine ONB, die aus Eigenvektoren von f besteht.

10.2 Der Spektralsatz für Matrizen

Jede symmetrische Matrix besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. ∎

Beispiel: $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum EW 3

$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum EW 1

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

als Matrix: Drehung um $\frac{\pi}{4}$ ▷ 0

$$B^T G B = B^{-1} G B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gehört zu $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \underline{v}$

gehört zu $\underline{u} \mapsto G \cdot \underline{u}$

10.3 Hauptachsentransformation:

Zu jeder symmetrischen Matrix G gibt es eine orthogonale Matrix R (also $R^T \cdot R = E$), für die $R^T G R = R^{-1} G R$ eine Diagonalmatrix D ist. In der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von G.

<u>Beweis</u>: 10.2: Es gibt eine ONB $(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n)$ von $\mathbb{R}^n$ mit $G \cdot \underline{r}_i = t_i \cdot \underline{r}_i$, $t_i \in \mathbb{R}$

$R = (\underline{r}_1 \dots \underline{r}_n) \in O(n)$, also $R^{-1} = R^T$

$$R^T G R = R^{-1} G R = D = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Bilinearform von $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \underline{v}$ hat bzgl. $(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n)$ die Grammatrix $\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}$, also bis auf Basiswechsel $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = t_1 u_1 v_1 + t_2 u_2 v_2 + \dots + t_n u_n v_n$

Speziell: $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \underline{v}$ ist ein Skalarprodukt, falls alle EW positiv.

<u>Beispiel</u>: $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat EW $3, 1$

Also: $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \underline{v}$ ist ein Skalarprodukt

Dagegen: $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

hat EW 3 (Eigenvektor z. B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

und EW -1 (Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

d.h. $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \underline{v}$ ist <u>kein</u> Skalarprodukt.

$$\beta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (1, 1)\, G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (1\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$\beta\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \ldots = -2$$

$$\beta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\beta\left(r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 6r^2 - 2 \cdot s^2 = f(r, s)$$

$(r, s) = (1, 0) \rightarrow f(r, s) = 6 > 0$; $f(0, 1) = -2 < 0$, $f(1, \sqrt{3}) = 0$

$(r, s) = (1, \sqrt{3})$ gehört zu $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$, $\beta(\underline{u}, \underline{u}) = 0$

Notiz: Ist A eine invertierbare Matrix,
so ist $A^T \cdot A$ eine symmetrische Matrix
und $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T A^T A \underline{v}$ ein Skalarprodukt.

Denn: $\underline{u}$ mit $0 = \beta(\underline{u}, \underline{u}) = \underline{u}^T A^T A \underline{u} = (A\underline{u})^T (A \cdot \underline{u})$

$$= \langle A\underline{u} \mid A\underline{u} \rangle$$

$$\Rightarrow A \cdot \underline{u} = \underline{0} \underset{A \text{ inv.}}{\Rightarrow} \underline{u} = \underline{0}.$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ invertierbar: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow G = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 66 & 78 & 62 \\ 78 & 93 & 76 \\ 62 & 76 & 70 \end{pmatrix}$$ gehört zu einem Skalarprodukt.

10.4 Der symmetrische Gaußalgorithmus

$E_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Eintrag an der Stelle (i,j) ist 1, alle anderen Einträge 0.

$$A(i,j;r) = E + r \cdot E_{ij} \qquad (i \neq j;\ r \in \mathbb{R})$$

z.B. für $n = 3$:

$$A(2,3;\tfrac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 3/2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{m}_1\ \underline{m}_2\ \underline{m}_3) \cdot A(2,3;\tfrac{3}{2}) = (\underline{m}_1\ \underline{m}_2\ \underline{m}_3) + \frac{3}{2}(\underline{0}\ \underline{0}\ \underline{m}_2)$$
$$= (\underline{m}_1\ \underline{m}_2\ \underline{m}_3 + \tfrac{3}{2}\underline{m}_2)$$

$M \rightsquigarrow M \cdot A(i,j;r)$ addiert das r-fache der i-ten Spalte zur j-ten Spalte.

$M \rightsquigarrow A(i,j;r)^T \cdot M$ addiert das r-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile.

$M(i;r)$ mit $r \neq 0$: $M(i;r) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & r & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te}$

$G = (\underline{g}_1 \dots \underline{g}_n)$

$\rightsquigarrow G \cdot M(i;r)$: Multipliziert die i-te Spalte mit r

$\underbrace{M(i;r)^T}_{= M(i;r)} \cdot G$: Multipliziert die i-te Zeile mit r

Außerdem : $T(i,j) = E_{ij} + E_{ji} + \sum_{k \neq i,j}^{!} E_{kk}$ für $i \neq j$

Für $n=2$: $T(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$G \rightsquigarrow G \cdot T(i,j)$: Vertauscht die i-te und die j-te Spalte

$\rightsquigarrow \underbrace{T(i,j)^T}_{= T(i,j)} \cdot G$: ——— " ——— Zeile.

Also: Gaußalgorithmus entspricht

$$G \rightsquigarrow U_1^T \cdot G \rightsquigarrow U_2^T U_1^T G \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow U_m^T \dots U_2^T U_1^T \cdot G$$

$$= (U_1 U_2 \cdot \dots \cdot U_m)^T \cdot G$$

$\uparrow$

$A(i,j;r)^T$; $M(i;r)^T$

$T(i,j)^T$

Also: $\left(U_\ell = A(i,j;r),\ M(i;r) \text{ oder } T(i,j) \right)$

$G \curvearrowright U_\ell^T G U_\ell \longrightarrow$ Transformation der Grammatrix G (Basiswechsel)

$\longrightarrow$ Durchführen einer elementaren Spaltenumformung, gefolgt von derselben Zeilenumformung.

Bsp $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = G$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 4 & 5 & -2I \\ 3 & 5 & 7 & \\ \hline & -2I & & \end{array} \curvearrowright \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix} \curvearrowright \begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{matrix}$$

$$A(1,2;-2)^T G \cdot A(1,2;-2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

<u>2. Zutat</u>:

$$D = \begin{pmatrix} p_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & p_k & & & & & \\ & & & -q_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -q_\ell & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } p_1, \dots, p_k ; q_1, \dots, q_\ell > 0$$

$n-k-\ell$

Mit Vielfachheiten gezählt:
D besitzt k positive und ℓ negative Eigenwerte
und $n-k-\ell = \dim \ker D = \operatorname{def} D$

<u>Beh</u> Ist A invertierbar, so besitzt $A^T D A = G$ ebenfalls k positive, ℓ negative Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt) und $\operatorname{def} A^T D A = n-k-\ell$.

$\operatorname{def} A^T D A$: $\quad A^T D A \cdot \underline{u} = 0 \iff (A^{-1})^T D \cdot A \cdot \underline{u} = 0$

$\iff A \cdot \underline{u} \in \operatorname{span}\{ e_n, e_{n-1}, \dots, e_{n-k-\ell+1} \}$

$\iff \underline{u} \in \underbrace{\operatorname{span}\{ A^{-1} e_n, \dots, A^{-1} e_{n-k-\ell+1} \}}_{\operatorname{def} A^T D A = \dim = n-k-\ell = \operatorname{def} D.}$

k = max. mögliche Dimension eines Teilraums ⊗, auf dem $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T D \underline{v}$ pos. definit ist.

⊗ : z.B. $\operatorname{span}\{ \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k \}$

Auch diese Zahl ändert sich beim Übergang zu $A^T D A$ (Basiswechsel !) nicht.

<u>Fazit</u>: G symm. Matrix

Für passendes $R \in O(n)$ ist $R^T G R$ eine Diagonalmatrix D mit k positiven und l negativen Einträgen auf der Diagonalen.

k = Anzahl der positiven EW von G <u>(mit Vielfachheit)</u>

l = —— " — negativen —— " <u>——————</u>

$n-k-l$ = Vielfachheit des EW 0.

Ist A invertierbar, so gilt:

$$A^T G A = A^T \underbrace{R D R^T}_{G} A = (R^T A)^T D (R^T A)$$

hat k pos., l neg. EW

⚠ $G = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ (G hat $k = 1 = l$)

$A^T G A = \begin{pmatrix} 5 & \\ & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \\ & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \\ & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & \\ & -12 \end{pmatrix} \neq G$: auch $k = l = 1$

Also: G symmetrisch, A invertierbar

Dann haben G und $A^T G A$

- die gleiche Anzahl positiver Eigenwerte (mit Vielf. zählen)
- die gleiche Anzahl negativer Eigenwerte (— " —)
- denselben Defekt.

Speziell ändert sich die Anzahl der pos. EW von G nicht unter dem "symmetrischen Gaußalgorithmus"

$$G \rightsquigarrow U_1^T G U_1 \rightsquigarrow U_2^T U_1^T G U_1 U_2 \rightsquigarrow \dots$$

mit $U_s = A(i,j;r)$, $M(i;r)$ oder $T(i,j)$

Schritt des symmetrischen Gaußalgorithmus:

- Durchführen einer elementaren Zeilenumformung
- sofortiges Durchführen derselben Spaltenumformung.

Beispiel: $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ist $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \underline{v}$ ein Skalarprodukt?

Symmetrische G an β

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 2 & \\ 2 & 1 & 0 & -2\cdot I \\ 2 & 0 & 3 & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ \hline & & -2\cdot I \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 2 & \\ 0 & -3 & -4 & \\ 2 & -4 & 3 & -2\cdot I \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \\ \hline & & -2\cdot I \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -3 & -4 & \\ 0 & -4 & -1 & -\frac{4}{3}\cdot II \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} \\ \hline & & -\frac{4}{3}\cdot II \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & -3 & \\ & & \frac{13}{3} \end{array} \Rightarrow$$ G hat zwei positive und einen negativen Eigenwert

$\Rightarrow$ β ist kein Skalarprodukt.

Spaltenumf: $G \rightsquigarrow G \cdot A(1,2,-2) \rightsquigarrow G \cdot A(1,2,-2)\, A(1,3,-2) \cdot A(2,3,-\frac{4}{3})$

Beispiel: $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ist $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \underline{v}$ ein Skalarprodukt? Nein!

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 13/3 \end{pmatrix} = U^T G U$ mit

$$U = A(1,2,-2)\, A(1,3,-2)\, A(2,3,-4/3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & -2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -4/3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -4/3 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/3 \\ & 1 & -4/3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Zusatz: Finde $\underline{v} \neq \underline{0}$ mit $\beta(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 13/3 \end{pmatrix} = U^T G U$

$$(\sqrt{3}, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 13/3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}'} = 0$$

Also: $0 = (U \cdot \underline{v}')^T \cdot G\, (U\, \underline{v}')$

d.h. $\underline{v} = U \cdot \underline{v}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/3 \\ & 1 & -4/3 \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt die gewünschte Gleichung

Hausaufgabe IngMa 16:

Vorgelegt sind die symmetrischen Matrizen

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Finde eine orthogonale Matrix R, so dass $R^T H R$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Zu G gehört die symmetrische Bilinearform $\beta(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T G \underline{v}$ auf $\mathbb{R}^3$. Ist β ein Skalarprodukt? Wenn nicht, gibt es Vektoren $\underline{u} \neq \underline{0}$ mit $\beta(\underline{u}, \underline{u}) = 0$?

(c) Vorgelegt ist ein fester Vektor $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $\underline{u}_0 \neq \underline{0}$.

Begründe, warum $U = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{u}_0^T G \underline{v} = 0 \}$ ein Untervektorraum ist. Welche Dimension besitzt U?