Klausurtraining

(A) Vektorräume / Unterräume

(1) Zeige, dass $so(3) = \{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^t = -A \}$ mit der üblichen Addition / skalaren Mult. ein Vektorraum ist.

Stelle fest: $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist ein $\mathbb{R}$-VR.
Reicht zz: $so(3)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$

U Unterraum:
- Nullvektor $\in U$
- $X, Y \in U \Rightarrow X+Y \in U$
- $X \in U,\ r \in \mathbb{K} \Rightarrow r \cdot X \in U$

- $0 \in so(3)$, denn $0^t = 0 = -0$
- $X, Y \in so(3)$, dann $(X+Y)^t = X^t + Y^t \overset{\text{Vor.}}{=} -X - Y = -(X+Y)$,
  d.h. $X+Y \in so(3)$
- $X \in so(3)$, $r \in \mathbb{R}$, dann $(r \cdot X)^t = r \cdot X^t \overset{\text{Vor.}}{=} -r \cdot X$,
  d.h. $r \cdot X \in so(3)$ $\square$

(2) Überprüfe, ob die folgenden Mengen Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}[x]$ sind:

(a) $A = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = p(1) = 0 \}$

(b) $B = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0,\ p(1) = 1 \}$

(c) $C = \{ p(x) \cdot (x-1)^2 \mid p(x) \in \mathbb{R}[x] \}$

(a) Nullvektor: $n(x) = 0$

- $n(x) \in A$, da $n(0) = n(1) = 0$
- $p(x), q(x) \in A$, $s(x) = p(x) + q(x)$

$$\left.\begin{array}{l} s(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0 \\ s(1) = 0 \text{ analog} \end{array}\right\} \Rightarrow s(x) \in A$$

- $p(x) \in A$, $r \in \mathbb{R}$, $v(x) = r \cdot p(x)$

$v(0) = r \cdot p(0) = r \cdot 0 = 0$; $v(1) = 0$ analog

$\Rightarrow v(x) \in A$

A ist ein Unterraum.

(b) B ist kein Teilraum, denn $n(x) \notin B$ wg. $n(1) = 0 \neq 1$.

(2) Überprüfe, ob die folgenden Mengen Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}[x]$ sind:

(c) $C = \{ p(x) \cdot (x-1)^2 \mid p(x) \in \mathbb{R}[x] \}$

C ist ein Unterraum:

- $n(x) = n(x) \cdot (x-1)^2 \in C$
- $a(x), b(x) \in C \Rightarrow$ es gibt $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $a(x) = p(x) \cdot (x-1)^2$, $b(x) = q(x) \cdot (x-1)^2$
  Also $a(x) + b(x) = [p(x) + q(x)] \cdot (x-1)^2 \in C$
- $a(x) \in C$, $r \in \mathbb{R} \Rightarrow$ es gibt $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $a(x) = p(x) \cdot (x-1)^2$, also
  $r \cdot a(x) = [r \cdot p(x)] \cdot (x-1)^2 \in C$. $\square$

Alternativen: $f : p(x) \longmapsto p(0)$, $g : p(x) \longmapsto p(1)$,
$h : p(x) \longmapsto p(x) \cdot (x-1)^2$ sind linear.

$A = \{ p(x) \mid p(0) = 0 = p(1) \} = \ker f \cap \ker g$ ist als Schnitt der Unterräume $\ker f, \ker g$ ein Unterraum.

$C = \operatorname{im} h$ ist als Bild einer lin. Abb. ein Unterraum.

Ⓑ Basen / lineare Unabhängigkeit

(1) Bestimme eine Basis des Unterraums

$$\underbrace{\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Erzeugendensystem, lässt zu einer Basis reduzieren / verarbeiten}} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Schreibe die Vektoren zeilenweise in eine Matrix und führe den Gaußalgorithmus durch

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & -1 & +\,\mathrm{III} \\ 1 & 2 & 3 & -\,\mathrm{I} - 4\cdot\mathrm{III} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Stufenform

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis.}$$

(2) Überprüfe die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit

$$\underset{\underline{a}}{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}},\ \underset{\underline{b}}{\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}},\ \underset{\underline{c}}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3$$

Alternativ: Überprüfe, ob diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden

3 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann lin. unabh., wenn sie eine Basis bilden.

Für lin. unabh. muss zeigen $\underbrace{r \cdot \underline{a} + s \cdot \underline{b} + t \cdot \underline{c}}_{} = \underline{0} \Rightarrow r = s = t = 0$

$$\begin{pmatrix}\underline{a} & \underline{b} & \underline{c}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\2 & 5 & 0 & 0\\3 & 6 & -1 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot I\\ -3\cdot I\end{array} \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\0 & +3 & +1 & 0\\0 & +6 & +4 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\cdot II\end{array} \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)$$

Einzige Lösung ist $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig. und damit eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(3) Bestimme eine Basis des Kerns und des Bilds der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\leftarrow\, M} \cdot \underline{x} .$$

$\ker f = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\underline{x}) = \underline{0} \}$: Lösungsraum von $M \cdot \underline{x} = \underline{0}$

$\operatorname{im} f = \{ f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \}$: Aufspann der Spaltenvektoren von M.

$\underline{\ker f}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1/3) \\ -\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{2}{3}\cdot\mathrm{III} \\ +\frac{1}{3}\cdot\mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \qquad \left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/6 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ Basis von } \ker f .$$

reduzierte Stufenform

↑

freie Variable

(3) Bestimme eine Basis des Kerns und des Bilds der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underline{x} .$$

$\ker f = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\underline{x}) = \underline{0} \}$: Lösungsraum von $M \cdot \underline{x} = \underline{0}$

$\operatorname{im} f = \{ f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \}$: Aufspann der Spaltenvektoren von M.

<u>im f</u> : Spalten von M zeilenweise aufschreiben; Gauß anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2\cdot \mathrm{I} \\ \\ +\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :(-3) \\ -\mathrm{II} \\ -3\cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2\cdot \mathrm{IV} \\ \cdot(-1) \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(3) Bestimme eine Basis des Kerns und des Bilds der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underline{x} .$$

$\ker f = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\underline{x}) = \underline{0} \}$: Lösungsraum von $M \cdot \underline{x} = \underline{0}$

$\operatorname{im} f = \{ f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \}$: Aufspann der Spaltenvektoren von M.

im f mit Nachdenken:

$\dim \ker f = 1$ (s. vorletzte Folie)

Also $\dim \underbrace{\operatorname{im} f}_{\subseteq \mathbb{R}^3} = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4 - 1 = \underline{3}$

d.h. $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$ bzw.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$.

(4) Bestimme eine Basis von

$$\{ p(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = p(-1) = 0 \}$$

Nicht im $\mathbb{K}^n$? Kein spontaner Ansatz?
Übertrage in Koordinaten!

$$p(1) = r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 0$$
$$p(-1) = r_0 - r_1 + r_2 - r_3 = 0$$

$\rightsquigarrow$ LGS $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

freie Var.

$$r_2 = 1,\ r_3 = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow x^2 - 1$$

$$r_2 = 0,\ r_3 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow x^3 - x$$

$\{ x^2 - 1,\ x^3 - x \}$ Basis.

(5) $\quad U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimme Basen von $U + V$ und $U \cap V$.

$$U+V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U \cap V = \{ \underline{x} \mid \underline{x} \in U \text{ und } \underline{x} \in V \}.$$

<u>$U+V$</u>:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -2\cdot I + II \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2\cdot I - I \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $U+V$.

<u>$U \cap V$</u>: $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-3 = 1$;

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in U \cap V \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $U \cap V$

(5) $\quad U = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{a}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} \right\}$

$\quad V = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{u}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{v}} \right\}$

Bestimme Basen von $U + V$ und $U \cap V$.

$\underline{x} \in U \cap V \iff \underline{x} = r \cdot \underline{a} + s \cdot \underline{b} = p \cdot \underline{u} + q \cdot \underline{v}$

$r \cdot \underline{a} + s \cdot \underline{b} - p \cdot \underline{u} - q \cdot \underline{v} = \underline{0} \leftarrow$ löse dieses GLS!

$$\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -\mathrm{I} \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & -\mathrm{II} \\ \underline{a} & \underline{b} & -\underline{u} & -\underline{v} & & \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & \text{frei} & & \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcl} 2 & \leftarrow & r \\ -1 & \leftarrow & s \\ 1 & \leftarrow & p \\ 0 & \leftarrow & q \end{array}$$

für jede Basislösung

$r = 2,\ s = -1 : \quad 2 \cdot \underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

bildet Basis von $U \cap V$

erhalte ein Element einer Basis von $U \cap V$

(6) Eine heimtückische Aufgabe:

$$V = \{ p(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0 \}$$

$$W = \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$f : V \longrightarrow W ; \quad p(x) \longmapsto \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) & p(2) \\ p(-1) & p(+2) & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme Basen von ker f und im f

Falls einem nichts einfällt:

- Führe Basen von V und W ein.
- Bestimme die Abb.-Matrix von f bzgl. dieser Basen
- Bestimme Basen von Kern / Bild dieser Matrix
- Interpretiere diese in V bzw. W.

Basis von V: $\mathcal{B} = (x-1, x^2-1, x^3-1)$

von W: $$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

(6) Eine heimtückische Aufgabe:

$$V = \{ p(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0 \}$$

$$W = \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$f: V \longrightarrow W;\quad p(x) \longmapsto \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) & p(2) \\ p(-1) & p(+2) & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme Basen von ker f und im f

Basis von V: $\mathcal{B} = (x-1,\ x^2-1,\ x^3-1)$

von W: $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$$f(x-1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad f(x^2-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},\quad f(x^3-1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[f]^C_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

← hiervon kann man sich Kern und Bild ausrechnen:

ker $= \underline{0}$

im $= f(x-1),\ f(x^2-1),\ f(x^3-1)$

(6) Eine heimtückische Aufgabe:

$$V = \{ p(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0 \}$$

$$W = \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$f: V \longrightarrow W;\quad p(x) \longmapsto \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) & p(2) \\ p(-1) & p(+2) & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme Basen von ker f und im f

$p(x) \in \ker f$, falls $p(1) = 0 = p(0) = p(-1) = p(2)$

$p(x)$ hat Grad 3 und 4 NSt, also $p(x) = 0$

$\ker f = \{0\}$

Man sieht: $\dim V = 3$

$B = (x-1,\ x^2-1,\ x^3-1)$ Basis von V

$\dim \ker f = 0 \implies f$ ist injektiv ← das heißt ja $\ker f = \{0\}$

$f(B) = (f(x-1), f(x^2-1), f(x^3-1))$ ist ein lin unabh.

sowieso Erzeugendensystem von im f, also eine Basis

d.h. $\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \right)$ Basis von im f

Hausaufgabe IngMa 17A

(1) Wir betrachten $V = \{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid M = M^t \text{ und } \operatorname{tr} M = 0 \}$

$\operatorname{tr} M$ = Summe der Diagonalelemente

Zeige, dass V ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, und bestimme eine Basis sowie die Dimension von V.

(2) Vorgelegt sind die Teilräume

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^4$. Bestimme je eine Basis von U, V, $U+V$, $U \cap V$.

(3) Bestimme je eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$