(c) Der Gauß-Algorithmus:

Ablesen der Lösungen an der reduzierten Stufenform.

(1) Reduzierte Stufenform

$$
\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -5 & 8 \\
0 & \boxed{1} & -3 & 0 & +1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 &
\end{array}
$$

$\boxed{1}$ "Eckensteher"

0 : unterhalb der Treppe, oberhalb der Eckensteher

0 : gehört zu 0-Zeile; steht da etwas $\neq 0$, so ist das System nicht lösbar

allgemeine Lösung = spezielle Lösung + allg. homogenen Lsg.

x_3, x_6 "freie Variable" auf 0

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + 2x_3 \quad - 5x_5 &= 8 \\
x_2 - 3x_3 \quad + x_5 &= 2 \\
x_4 + 2x_5 &= 5
\end{aligned}
\quad \rightsquigarrow \quad \underline{x}_{spez} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Ⓒ Der Gauß-Algorithmus:

Ablesen der Lösungen an der reduzierten Stufenform.

(1) Reduzierte Stufenform

$$\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -5 & 8 \\
0 & \boxed{1} & -3 & 0 & +1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 &
\end{array}$$

allgemeine Lösung =

spezielle Lösung $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

\+ allg. homogene Lösung

zugeh. homogenes System:

$$\begin{aligned}
x_1 \quad + 2x_3 \quad - 5x_5 &= 0 \\
x_2 - 3x_3 \quad + x_5 &= 0 \\
x_4 + 2x_5 &= 0
\end{aligned}$$

umformen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -2x_3 + 5x_5 \\
x_2 &= 3x_3 - x_5 \\
x_4 &= -2x_5
\end{aligned}$$

Setze alle freien Variablen bis auf eine auf 0, diese auf 1 und erhalte jeweils eine Lösung des hom. Systems, diese Lösungen bilden eine Basis des Lösungsraums:

$x_3 = \underline{1}$, $x_5 = \underline{0}$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $x_3 = \underline{0}$, $x_5 = \underline{1}$: $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ \underline{0} \\ -2 \\ \underline{1} \end{pmatrix}$

(c) Der Gauß-Algorithmus:

Ablesen der Lösungen an der reduzierten Stufenform.

(1) Reduzierte Stufenform

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -5 & 8 \\
0 & \boxed{1} & -3 & 0 & +1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}
\end{array}
$$

allgemeine Lösung =

spezielle Lösung $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

+ allg. homogene Lösung

zugeh. homogenes System (Nullzeile lassen wir weg)

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 2 & 0 & -5 & 0 \\
0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0
\end{array}\right)
$$

: Lösungsraum hat Basis $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Also:

Lösungen sind $\underline{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

reicht als "Antwortsatz" aus!

① Lineare Abbildungen

(1) Zeige nur mit Hilfe der Definition, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$V = \{ a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$W = \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad (\text{ Vektorraum der } (2\times2)\text{-Matrizen})$$

$$f: V \longrightarrow W, \qquad f(a_0 + a_1 x) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

(1.) $f(p+q) = f(p) + f(q)$; (2.) $f(r\cdot p) = \underbrace{r}_{\text{Skalar}} \cdot f(p)$

(1.) $$f(a_0 + a_1 x + b_0 + b_1 x) = f(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x)$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 & -(a_1+b_1) \\ a_1 + b_1 & a_0 + b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix} = f(a_0 + a_1 x) + f(b_0 + b_1 x)$$

(2.) $$\left.\begin{aligned} f(r\cdot(a_0 + a_1 x)) &= f(ra_0 + (ra_1)x) = \begin{pmatrix} ra_0 & -ra_1 \\ ra_1 & ra_0 \end{pmatrix} \\ r\cdot f(a_0 + a_1 x) &= r \cdot \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} =$$

(2.) Gibt es eine lineare Abb. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$?

Wenn ja, so bestimme diejenige Matrix M mit $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$ (für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$).

Suche $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $M\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $M\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $M\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Es gibt eine solche Matrix M genau dann, wenn

$$M \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Transponieren: $(M\cdot A)^t = A^t M^t$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot M^t = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

lin. GLS (mit mehreren rechten Seiten

Schema:

$$\begin{array}{ccc|cc}
1 & 2 & 3 & 1 & -1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{array}
\quad \begin{array}{l} -\mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{III} \\ \\ \end{array}
\quad \begin{array}{l} \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 2 & 1 & 0\\
0 & 0 & +2 & +1 & +2
\end{array}
\quad \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ :2 \end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & 0 & -1/2 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & -2\\
0 & 0 & 1 & 1/2 & 1
\end{array}$$

$$\underbrace{\begin{array}{cc} -1/2 & 0\\ -1 & -2\\ 1/2 & 1\end{array}}_{M^t}$$

(2.) Gibt es eine lineare Abb. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$?

Wenn ja, so bestimme diejenige Matrix M mit $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$ (für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$).

Suche $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $M \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $M \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $M \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Es gibt eine solche Matrix M genau dann, wenn

$$M \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Lösung: $M^t = \begin{pmatrix}-1/2 & 0\\-1 & -2\\1/2 & 1\end{pmatrix}$ bzw. $M = \begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 1/2\\0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

Die Abbildung $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$ <u>ist</u> linear und erfüllt die Bed., die Matrix M steht schon da.

(3.) Vorgelegt ist die Bilinearform

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 - 3 x_1 y_2 - 3 x_2 y_1 + 42 x_2 y_2$$

(a) Ist β symmetrisch?

(b) Bestimme die Grammatrix G von β bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$

(c) Zeige, dass die Abbildung $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a \ b) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (mit festen $a, b \in \mathbb{R}$) linear ist.

(d) Gibt es $(a,b) \neq (0,0)$, für die die in (c) eingeführte Abbildung die Nullabbildung ist?

Notiz: β ist eine Bilinearform.

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 \ \ x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 42 \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(a) G ist symmetrisch, also ist β symmetrisch

(b) G ist die Grammatrix bzgl. der Standardbasis

(c) $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ ist linear $\|$ $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{[(a \ \ b) \cdot G]}_{\in \mathbb{R}^{1\times 2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist linear

(3.) Vorgelegt ist die Bilinearform

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 - 3 x_1 y_2 - 3 x_2 y_1 + 42 x_2 y_2$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 42 \end{pmatrix}}_{(1 \times 2)\text{-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(d) Gibt es $(a, b) \neq (0,0)$, für die die in (c) eingeführte Abbildung die Nullabbildung ist?

Das geht nur, falls $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

bzw. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (transponieren!)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 42 \end{pmatrix} = 42 - 9 \neq 0$$

Also nur $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ Lösung.

(E) Koordinaten

(a) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\leftarrow$ $\underline{\underline{4}}$ – dimensional

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \leftarrow \underline{\underline{4}} \text{ Elemente}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \pi^2/6 \\ 42 & 928 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi^2/6 \\ 42 \\ 928 \end{pmatrix}$$ Koordinatenvektor aus $\mathbb{R}^{\underline{\underline{4}}}$ (bzgl. $\mathcal{B}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi^2/6 \\ 42 & 928 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\pi^2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 42 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 928 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

ist ebenfalls eine Basis.

Erzeugendensystem, $4 = \dim V$ Elemente $\rightsquigarrow$ Basis

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a-d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{b+c}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{c-b}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad ; \quad \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} \\ \frac{a-d}{2} \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{c-b}{2} \end{pmatrix}$$

$V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$

$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$f : V \longrightarrow V, \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(i) f ist linear; denn $f(X) = T \cdot X$ mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist linear

(ii) $[f]_{\mathcal{B}}^{C} = ?$ Darstellungsmatrix:

$$f(X) = Y \iff [f]_{\mathcal{B}}^{C} \cdot [X]_{\mathcal{B}} = [Y]_{C}$$

bzw.: $\boxed{\underbrace{[f(X)]_C}_{\in \mathbb{R}^4} = \underbrace{[f]_{\mathcal{B}}^{C}}_{\in \mathbb{R}^{4\times 4}} \cdot \underbrace{[X]_{\mathcal{B}}}_{\in \mathbb{R}^4}}$

(iii) M Matrix:

$$M \cdot \vec{e}_j = j\text{-te Spalte von } M$$

$[\mathcal{B}_j]_{\mathcal{B}} = \vec{e}_j \rightsquigarrow$ j-te Spalte von $[f]_{\mathcal{B}}^{C}$ ist $[f]_{\mathcal{B}}^{C} \cdot [\mathcal{B}_j]_{\mathcal{B}}$
$= [f(\mathcal{B}_j)]_C$

$$V = \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$f : V \to V, \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Die j-te Spalte von $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ ist $[f(\mathcal{B}_j)]_{\mathcal{C}}$:

$$f(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [f(\mathcal{B}_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1. \text{Spalte})$$

$$f(\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [f(\mathcal{B}_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad (2. \text{Spalte})$$

$$f(\mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [f(\mathcal{B}_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \vdots$$

$$f(\mathcal{B}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f(\mathcal{B}_4)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vdots$$

Folgt: $$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$f : V \longrightarrow V, \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \qquad [f(x)]_{\mathcal{C}} = [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\implies [f(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 + c + d/2 \\ a/2 + c - d/2 \\ b/2 + c/2 + d \\ -b/2 + c/2 - d \end{pmatrix}$$

Also: $f(x) = \left(\frac{a}{2} + c + \frac{d}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{a}{2} + c - \frac{d}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$+ \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + d\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{b}{2} + \frac{c}{2} - d\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ✓$$

$V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$

$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$id_V : V \to V \; ; \quad id_V(x) = x$

$[id_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$: Sinn?

$$[x]_{\mathcal{C}} = [id_V(x)]_{\mathcal{C}} = [id_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

"Übertragung von Koord. bzgl. $\mathcal{B}$ in Koord. bzgl. $\mathcal{C}$"

"Koordinatentransformation"

j-te Spalte von $[id_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ ist $[\mathcal{B}_j]_{\mathcal{C}}$

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $[id_V]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$id_V : V \to V \; ; \quad id_V(x) = x$

$$[id_V]^C_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$[id_V]^C_B \cdot [id_V]^B_C \, [x]_C$

$= [id_V]^C_B \, [x]_B$

$= [x]_C$ für alle x

$\Rightarrow [id_V]^C_B \cdot [id_V]^B_C = E$

$[id_V]^B_C = T^{-1}$ inverse Matrix

Kochrezept: Inverse einer quadratischen Matrix T bestimmen

$T \mid E \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} E \mid T^{-1}$ (falls möglich, sonst T nicht invertierbar)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow E \;\Big|\; \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}}_{T^{-1}}$$

$T \cdot T^{-1} = E, \quad T^{-1} \cdot T = E$

(b) Spezialfall : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$, linear

B Basis von $\mathbb{R}^n$, C Basis von $\mathbb{R}^m$

Gesucht: $[f]_B^C$

$B = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ → Basis → Matrix

z.B. $n=2$ $\quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Basis

$\longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2x2)-Matrix

$[f(\underline{b}_j)]_C = [M \cdot \underline{b}_j]_C = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$, falls $M \cdot \underline{b}_j = r_1 \underline{c}_1 + \ldots + r_n \underline{c}_n$

$= (c_1 \ldots c_n) \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

$= C \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

↑ j-te Spalte von $[f]_B^C$

Also : j-te Spalte $\underline{r}$ von $[f]_B^C$ ist die

Lösung von $C \cdot \underline{r} = M \cdot \underline{b}_j$ $\quad (j = 1, \ldots, n)$

Zusammen : $C \cdot X = M \cdot B$ hat Lösung $X = [f]_B^C$

Schema $\quad C \mid M \cdot B \xrightarrow{\text{Gauß}} E \mid [f]_B^C$

Speziell: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$ linear

B Basis von $\mathbb{R}^n$, C Basis von $\mathbb{R}^m$, gesucht: $[f]^C_B$

Schema $\quad C \mid M \cdot B \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} E \mid [f]^C_B$;

das klappt genau dann, wenn C eine Basis ist.

Gesucht ist die Darstellungsmatrix von $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underline{x}$$

bzgl. der Basen $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(1.) $M \cdot B$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

(2) $C \mid M \cdot B$

$$\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \quad \| - \mathrm{I} \ \| \cdot 2$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \quad \| + \mathrm{II} \quad \rightsquigarrow E \,\Big|\, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = [f]^C_B$$

(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(a) Warum ist $f: V \to V$ linear?

(b) Bestimme $[f]_B^B$ für $B = (1, x, x^2)$

(c) Ist $C = (x+1, x-1, x^2)$ eine Basis von V?

(d) Bestimme $[f]_C^C$.

(e) Ist f invertierbar? Bestimme ggf. $f^{-1}: V \to V$.

(f) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

(g) Ist f diagonalisierbar?

(h) Bestimme die Matrix der Basistransformation von B nach C.

(i) Welche Untervektorräume $U \leq V$ werden durch f in sich abgebildet (d.h. $f(p(x)) \in U$ gilt für alle $p(x) \in U$)?

Nullpolynom $n(x) = 0$

$\left.\begin{array}{l} U = \{0\} \\ U = V \end{array}\right\}$ "triviale" Beispiele

(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

<u>Schritt 1</u>: Was ist das für eine Abbildung?

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$
$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2$$
$$p(0) = a_0$$
$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2$$

Also: $f(p(x)) = f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

$$= (a_0 + a_1 + a_2) + a_0 \cdot x + (a_0 - a_1 + a_2) x^2$$

$$f(1) = 1 + x + x^2$$

$$f(x) = 1 - x^2$$

$$f(x^2) = 1 + x^2$$

(2) <u>Übung</u>: $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(a) Warum ist $f: V \to V$ linear?

f ist linear, denn:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + a_0 x + (a_0 - a_1 + a_2) \cdot x^2$$

- $f((a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2))$

$= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2)$

$= (a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2) + (a_0 + b_0) \cdot x + (a_0 + b_0 - (a_1 + b_1) + a_2 + b_2) x^2$

$= (a_0 + a_1 + a_2) + a_0 x + (a_0 - a_1 + a_2) x^2 + (b_0 + b_1 + b_2) + b_0 x + (b_0 - b_1 + b_2) x^2$

$= f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + f(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$

- $f(r \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)) = r a_0 + r a_1 + r a_2 + r a_0 x + (r a_0 - r a_1 + r a_2) x^2$

$= r \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + a_0 x + (a_0 - a_1 + a_2) x^2) = r \cdot f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

(2) <u>Übung</u>: $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0)\cdot x + p(-1)\cdot x^2$

(b) Bestimme $[f]_B^B$ für $B = (1, x, x^2)$

Erinnerung $\left([f(1)]_B \quad [f(x)]_B \quad [f(x^2)]_B \right) = [f]_B^B$

$$
\begin{aligned}
[f]_B^B &= \left([f(1)]_B \quad [f(x)]_B \quad [f(x^2)]_B \right) \\
&= \left([1 + x + x^2]_B \quad [1 - x^2]_B \quad [1 + x^2]_B \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2) Übung: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(a) Warum ist $f : V \longrightarrow V$ linear?

(b) Bestimme $[f]_B^B$ für $B = (1, x, x^2)$

(c) Ist $C = (x+1, x-1, x^2)$ eine Basis von V?

(d) Bestimme $[f]_C^C$.

(e) Ist f invertierbar? Bestimme ggf. $f^{-1} : V \to V$.

(f) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

(g) Ist f diagonalisierbar?

(h) Bestimme die Matrix der Basistransformation von B nach C.

? (i) Welche Untervektorräume $U \leq V$ werden durch f in sich abgebildet (d.h. $f(p(x)) \in U$ gilt für alle $p(x) \in U$)?

(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(a) Warum ist $f: V \longrightarrow V$ linear? ✓

(b) Bestimme $[f]_B^B$ ✓ für $B = (1, x, x^2)$

Alternative: (a) und (b) gemeinsam lösen

(a), (b): $f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + a_0 x + (a_0 - a_1 + a_2) x^2$

In Koordinaten: $[f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)]_B = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 \\ a_0 \\ a_0 - a_1 + a_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$[f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, d.h.

$[f(p(x))]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot [p(x)]_B$, d.h. f ist in den Koordinaten linear. Also ist f linear und

$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(c) Ist $C = (x+1, x-1, x^2)$ eine Basis von V?

(d) Bestimme $[f]^C_C$.

(h) Bestimme die Matrix der Basistransformation von B nach C.

(c) Zeige: C ist lin. unabh. <u>oder</u> C ist Erzeugendensystem.

(d) $[f]^C_C = \left([f(x+1)]_C \; \cdots \right)$

(h) $[id_V]^C_B = \left([1]_C \; [x]_C \; [x^2]_C \right)$

(h) $[id_V]^C_B$ ist invertierbar? $\Rightarrow$ C ist Basis (c)

und $[f]^C_C = [id_V]^C_B \, [f]^B_B \left([id_V]^C_B \right)^{-1}$

bzw. $[f]^C_C \, [id_V]^C_B = [id_V]^C_B \, [f]^B_B$

$$\left([id_V]^C_B \right)^t \cdot \left([f]^C_C \right)^t = \left([f]^B_B \right)^t \cdot \left([id_V]^C_B \right)^t$$

GLS für $\left([f]^C_C \right)^t$

Schema $[id_V]^C_B \;\Big|\; \left([id_V]^C_B \, [f]^B_B \right)^t$

$\underset{\leadsto}{\text{Gauß}}$ $\quad E \;\Big|\; \left([f]^C_C \right)^t$

Klappt? Dann ist $[id_V]^C_B$ invertierbar

(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(c) Ist $C = (x+1, x-1, x^2)$ eine Basis von V?

(d) Bestimme $[f]_C^C$.

(h) Bestimme die Matrix der Basistransformation von B nach C.

(h) $T = [id_V]_B^C = ([1]_C \; [x]_C \; [x^2]_C) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>N.R.</u>: $1 = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)$

$x = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1)$

$x^2 = x^2$

$B \subseteq \operatorname{span} C$

$\Rightarrow V = \operatorname{span} B \subseteq \operatorname{span} C$

$\Rightarrow C$ ist Erzeugendensystem

(c) $[id_V]_B^C$ existiert, also ist C eine Basis.

(d) $X = [f]_C^C = [id_V]_B^C \, [f]_B^B \, [id_V]_C^B = T \cdot [f]_B^B \cdot T^{-1}$

T^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1/2 & 0 & \\ -1/2 & 1/2 & 0 & E \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right. \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right. = T^{-1}$

(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(c) Ist $C = (x+1, x-1, x^2)$ eine Basis von V?

(d) Bestimme $[f]_C^C$.

(h) Bestimme die Matrix der Basistransformation von B nach C.

(d) $T = [id_V]_B^C = ([1]_C \; [x]_C \; [x^2]_C) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[f]_C^C = T \cdot [f]_B^B \cdot T^{-1}$ Transformationsformel

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Merke</u>: Ist B eine Basis, und existiert $T = ([b_1]_C \ldots [b_n]_C)$, so ist auch C eine Basis und $T = [id_V]_B^C$.

(2) <u>Übung</u>: $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(f) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

(g) Ist f diagonalisierbar?

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} : \det([f]_B^B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1-\lambda \end{array}\right) =$$

$$(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[\lambda \cdot (\lambda-1) - 2]$$

$$= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2)$$

Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot 3 = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Eigenwerte von f (Eigenwerte von $[f]_B^B$) sind $1, -1, 2$.

(g) $\dim V = 3 =$ Anzahl der (verschiedenen) Eigenwerte von f.

Also ist f diagonalisierbar.

(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(f) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

(g) Ist f diagonalisierbar?

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \nwarrow M \quad : \quad \text{Eigenwerte } 1, -1, 2.$$

Eigenvektoren über Schema $M - \lambda \cdot E \mid 0$
(λ Eigenwert)

$\underline{\lambda = 1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Basis des ER E_1 ist $\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} = [1 + x - x^2]_B$

$\underline{\lambda = -1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{Basis } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \text{Basis: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Erhalte für die Eigenräume V_λ von f:

$$V_1 = \operatorname{span}(1 + x - x^2)$$
$$V_{-1} = \operatorname{span}(-1 + x + x^2)$$
$$V_2 = \operatorname{span}(x - x^2)$$

(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(i) Welche Untervektorräume $U \leq V$ werden durch f in sich abgebildet (d.h. $f(p(x)) \in U$ gilt für alle $p(x) \in U$)?

Nachgewiesen: $p(x) = r_1 p_1(x) + r_2 p_2(x) + r_3 p_3(x) \in U \Rightarrow r_1 p_1(x), r_2 p_2(x), r_3 p_3(x) \in U$

1. Fall: $r_1 = 0$ für alle $p(x) \in U \Rightarrow U \leq \operatorname{span}\{p_2(x), p_3(x)\}$

2. Fall: $r_1 \neq 0$ für ein $p(x) \in U \Rightarrow p_1(x) \in U \Rightarrow \operatorname{span}\{p_1(x)\} \leq U$

Jetzt geschickte Fallunterscheidung:

1. Fall: $p_1(x), p_2(x), p_3(x) \in U \Rightarrow U = V$

2. Fall: $p_1(x) \notin U$; $p_2(x), p_3(x) \in U \Rightarrow U = \operatorname{span}\{p_2(x), p_3(x)\}$

(bis auf "Umnummerieren" ist das der Fall: $\#(U \cap \{p_1, p_2, p_3\}) = 2$)

3. Fall: $p_1(x), p_2(x) \notin U$; $p_3(x) \in U \Rightarrow U = \operatorname{span}\{p_3(x)\}$

4. Fall: $p_1(x), p_2(x), p_3(x) \notin U \Rightarrow U = \{0\}$

Hausaufgabe IngMa 18A:

Vorgelegt sind die Vektorräume $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
und $W = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ sowie
die Abbildung $f : V \longrightarrow W$, $f(A) = (1 \;\; x) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

Zum Beispiel: $f \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \;\; x) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$
$= (2 + 3x \quad 3 + 4x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 2 + 3x + 3x + 4x^2 = 2 + 6x + x^2.$

(a) Bestimme $f \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ explizit.
(b) Ist V überhaupt ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?
(c) Warum ist f linear?
(d) Ist $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von V?

(e) Bestimme die Abbildungsmatrix $[f]^C_B$ für die in (d) angegebene Basis B von V und für die Basis $C = (1, x, x^2)$ von W.
(f) Zeige, dass $\tilde{C} = (x - 1, x^2 - x, x^2 + 1)$ eine Basis von W ist und berechne die Matrix der Basistrafo von $\tilde{C}$ nach C.
(g) Berechne $[f]^{\tilde{C}}_B$.
(h) Bestimme – wenn möglich – die Umkehrabbildung f^{-1}.

Hausaufgabe IngMa 18B:

Vorgelegt ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
mit der zugehörigen linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$.

(a) Zeige, dass $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeige, dass $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ und $D = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
Basen von $\mathbb{R}^2$ sind und bestimme die Matrizen der Basistransformationen von C nach D und von D nach C.

(c) Berechne die Darstellungsmatrizen $[f]^C_B$ und $[f]^D_B$.

(d) Ist f injektiv? surjektiv? bijektiv?

(e) Bestimme – wenn möglich – Matrizen $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
mit $M \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $Y \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.