(2) <u>Übung</u>: $V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

Für ein Polynom $p(x) \in V$ setze $f(p(x)) = p(1) + p(0) \cdot x + p(-1) \cdot x^2$

(a) Warum ist $f: V \to V$ linear?

(b) Bestimme $[f]_B^B$ für $B = (1, x, x^2)$

(c) Ist $C = (x+1, x-1, x^2)$ eine Basis von V?

(d) Bestimme $[f]_C^C$.

(e) Ist f invertierbar? Bestimme ggf. $f^{-1}: V \to V$.

(f) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

(g) Ist f diagonalisierbar?

(h) Bestimme die Matrix der Basistransformation von B nach C.

(i) Welche Untervektorräume $U \leq V$ werden durch f in sich abgebildet (d.h. $f(p(x)) \in U$ gilt für alle $p(x) \in U$)?

Hausaufgabe IngMa 18A:

Vorgelegt sind die Vektorräume $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
und $W = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ sowie
die Abbildung $f : V \longrightarrow W$, $f(A) = (1 \;\; x) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

Zum Beispiel: $f \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \;\; x) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$
$= (2 + 3x \quad 3 + 4x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 2 + 3x + 3x + 4x^2 = 2 + 6x + x^2.$

(a) Bestimme $f \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ explizit.
(b) Ist V überhaupt ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?
(c) Warum ist f linear?
(d) Ist $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von V?

(e) Bestimme die Abbildungsmatrix $[f]^C_B$ für die in (d) angegebene Basis B von V und für die Basis $C = (1, x, x^2)$ von W.
(f) Zeige, dass $\tilde{C} = (x - 1, x^2 - x, x^2 + 1)$ eine Basis von W ist und berechne die Matrix der Basistrafo von $\tilde{C}$ nach C.
(g) Berechne $[f]^{\tilde{C}}_B$.
(h) Bestimme – wenn möglich – die Umkehrabbildung f^{-1}.

Hausaufgabe IngMa 18 B:

Vorgelegt ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
mit der zugehörigen linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(\underline{x}) = M \cdot \underline{x}$.

(a) Zeige, dass $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeige, dass $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ und $D = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Basen von $\mathbb{R}^2$ sind und bestimme die Matrizen der Basistransformationen von C nach D und von D nach C.

(c) Berechne die Darstellungsmatrizen $[f]_B^C$ und $[f]_B^D$.

(d) Ist f injektiv? surjektiv? bijektiv?

(e) Bestimme – wenn möglich – Matrizen $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
mit $M \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $Y \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.