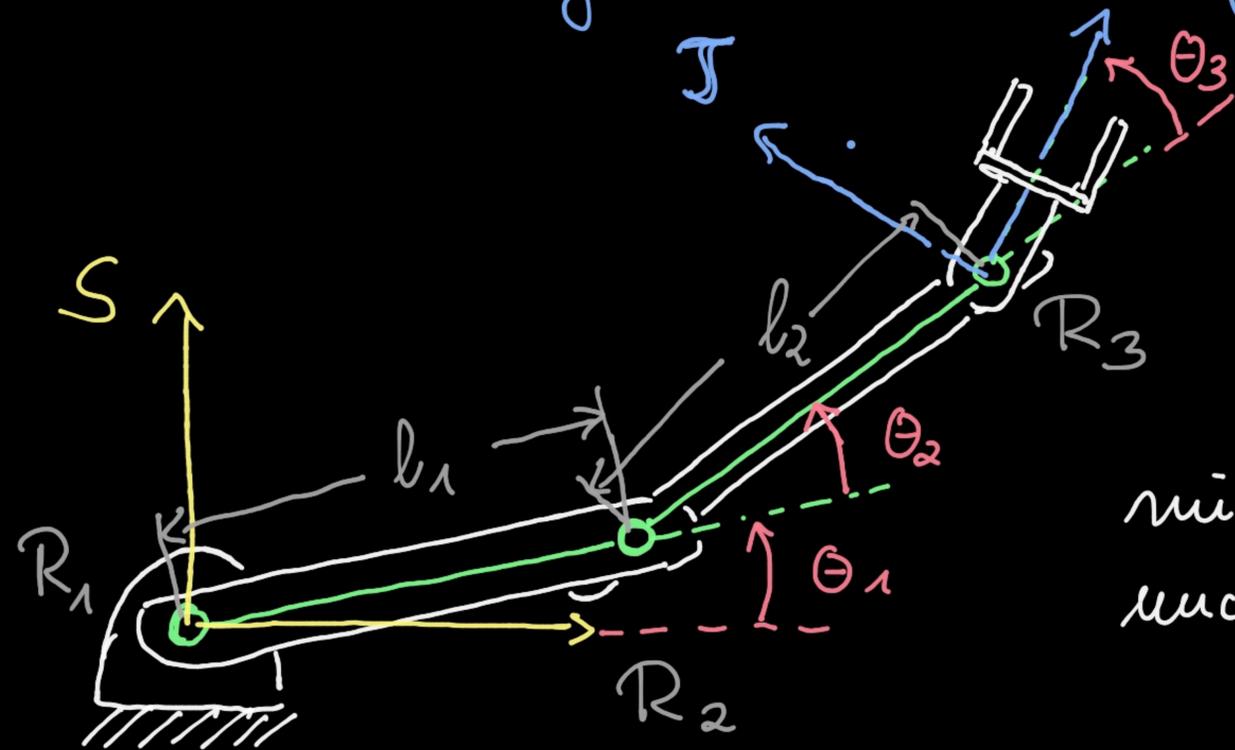


Inverse Kinematik des ebenen 3R-Arms

Zur Erinnerung $\text{Rot}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$



R_1, R_2, R_3 : Drehgelenke

Koordinatentransformation

$$[P]_S = M \cdot [P]_J + \underline{v}$$

mit $M = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$
und $\underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_1 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$v_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

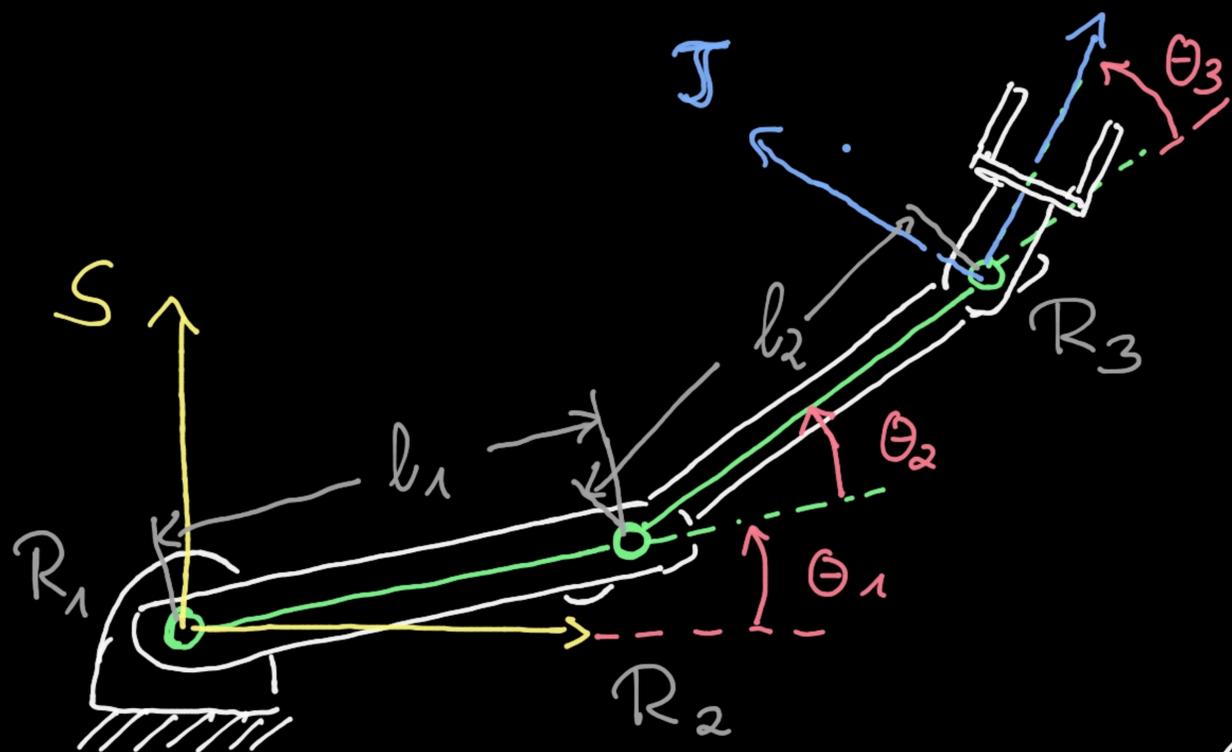
Inverses kinematisches Problem:

Vorgelegt sind M, \underline{v} (gewünschte Position des Greifers).

Gesucht sind alle Winkelkombinationen $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ mit

$$M = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad \text{und} \quad \underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inverse Kinematik des ebenen 3R-Arms



Gegeben: Koordinatentransformation

$$[P]_S = M \cdot [P]_J + \underline{v}$$

mit $M = \text{Rot}(\theta)$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [R_3]_S$

Gesucht: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ mit

$$M = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\text{und } \underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	v_1	v_2	θ	d	γ
θ_1	+	+	+	-	+
θ_2	+	+	+	+	+
θ_3	-	-	+	-	-

↑
erwarte Gleichung der Form $d = f(\theta_2)$
Auflösen dieser Gleichung liefert θ_2

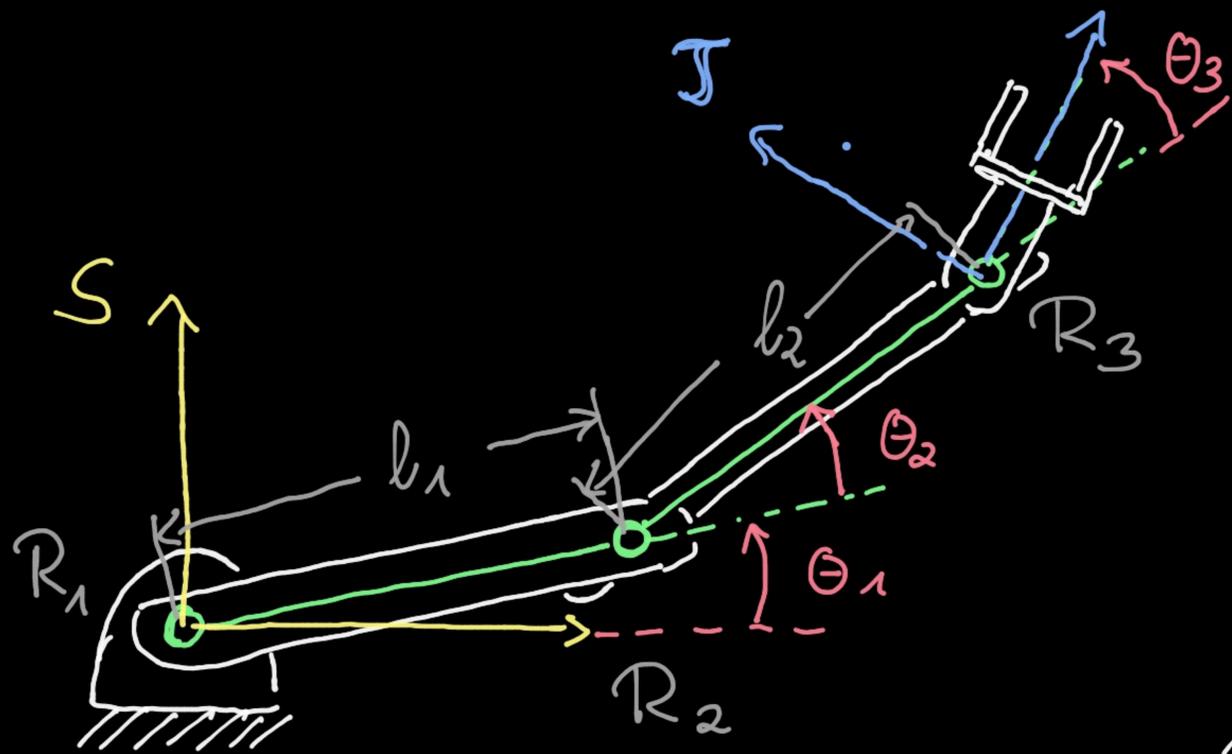
$$d = \text{dist}(R_3, O)$$

$$\gamma = \angle(x\text{-Achse von } S; \overrightarrow{OR_3})$$

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \text{ bekannt}$$

$$d = f(\theta_2)$$

Inverse Kinematik des ebenen 3R-Arms



Gegeben: Koordinatentransformation

$$[P]_S = M \cdot [P]_J + \underline{v}$$

mit $M = \text{Rot}(\theta)$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [R_3]_S$

Gesucht: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ mit

$$M = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\text{und } \underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechne d auf zwei Weisen ∇

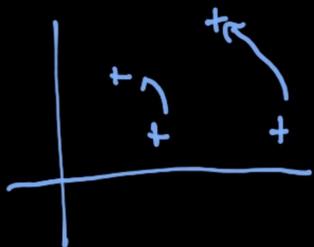
"Soll" : $\text{dist} \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = d$

"Ist" : $\text{dist} \left(\text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\text{Rot}(\theta_1 + \theta_2)}_{\text{Rot}(\theta_1) \cdot \text{Rot}(\theta_2)} \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 \quad \left(\stackrel{\nabla}{=} d^2 = v_1^2 + v_2^2 \right)$

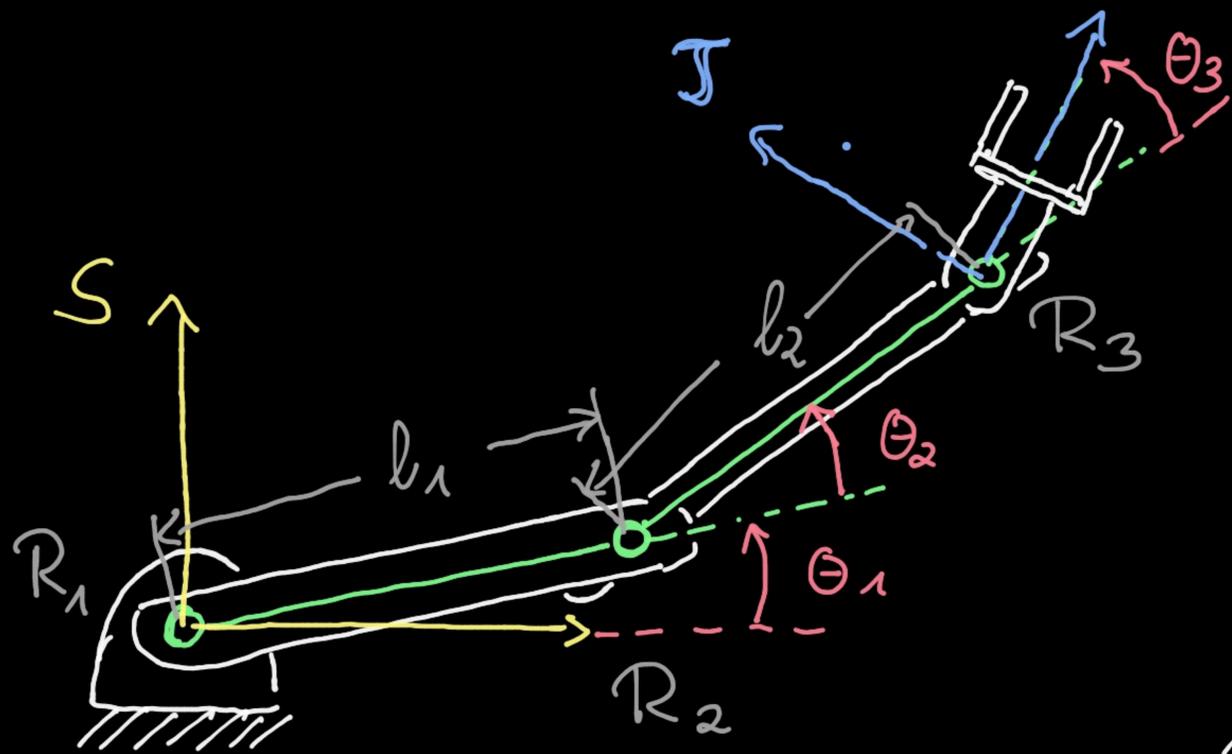
$$= \text{dist} \left(\text{Rot}(\theta_1) \cdot \left(\begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2$$

$$= \text{dist} \left(\begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2$$

$$= \text{dist} \left(\begin{pmatrix} l_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \left\| \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \right\|^2$$



Inverse Kinematik des ebenen 3R-Arms



Gegeben: Koordinatentransformation

$$[P]_S = M \cdot [P]_J + \underline{v}$$

mit $M = \text{Rot}(\theta)$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [R_3]_S$

Gesucht: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ mit

$$M = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\text{und } \underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Löse: $\checkmark \checkmark v_1^2 + v_2^2 = d^2 = \left\| \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \right\|^2$

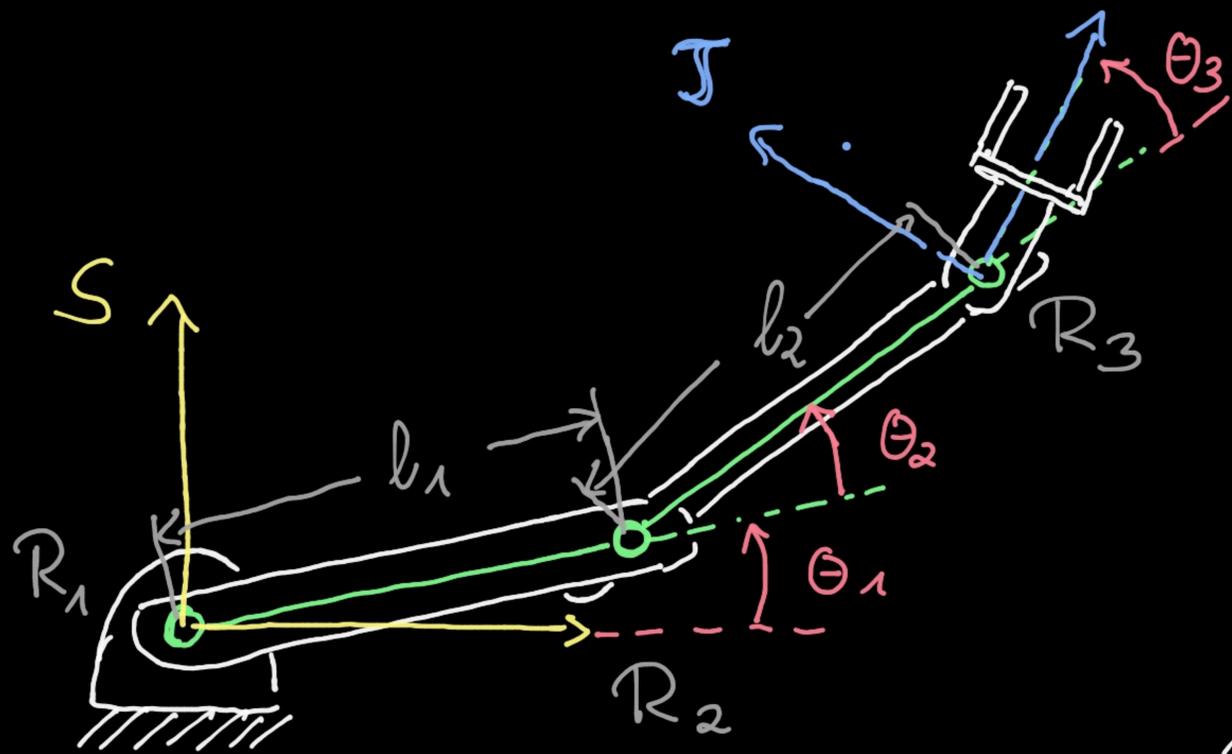
$$= (l_1 + l_2 \cos \theta_2)^2 + (l_2 \sin \theta_2)^2$$

$$= l_1^2 + 2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 + l_2^2 \sin^2 \theta_2$$

$$= l_1^2 + 2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_2^2 \cdot \overbrace{(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)}^{= 1}$$

$$= \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark \underline{l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos \theta_2}$$

Inverse Kinematik des ebenen 3R-Arms



Gegeben: Koordinatentransformation

$$[P]_S = M \cdot [P]_J + \underline{v}$$

mit $M = \text{Rot}(\Theta)$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [R_3]_S$

Gesucht: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ mit

$$M = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\text{und } \underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Löse $v_1^2 + v_2^2 = d^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos \theta_2$ nach $\cos \theta_2$ auf:

$$\cos \theta_2 = \frac{d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$$

lösbar, falls rechte Seite zwischen -1 und 1

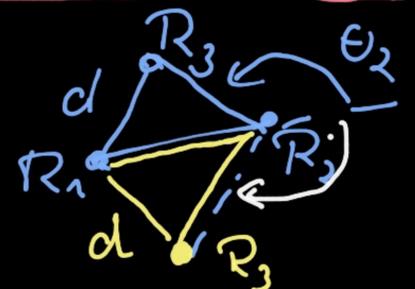
$$d \leq l_1 + l_2$$

$$d \geq |l_1 - l_2|$$

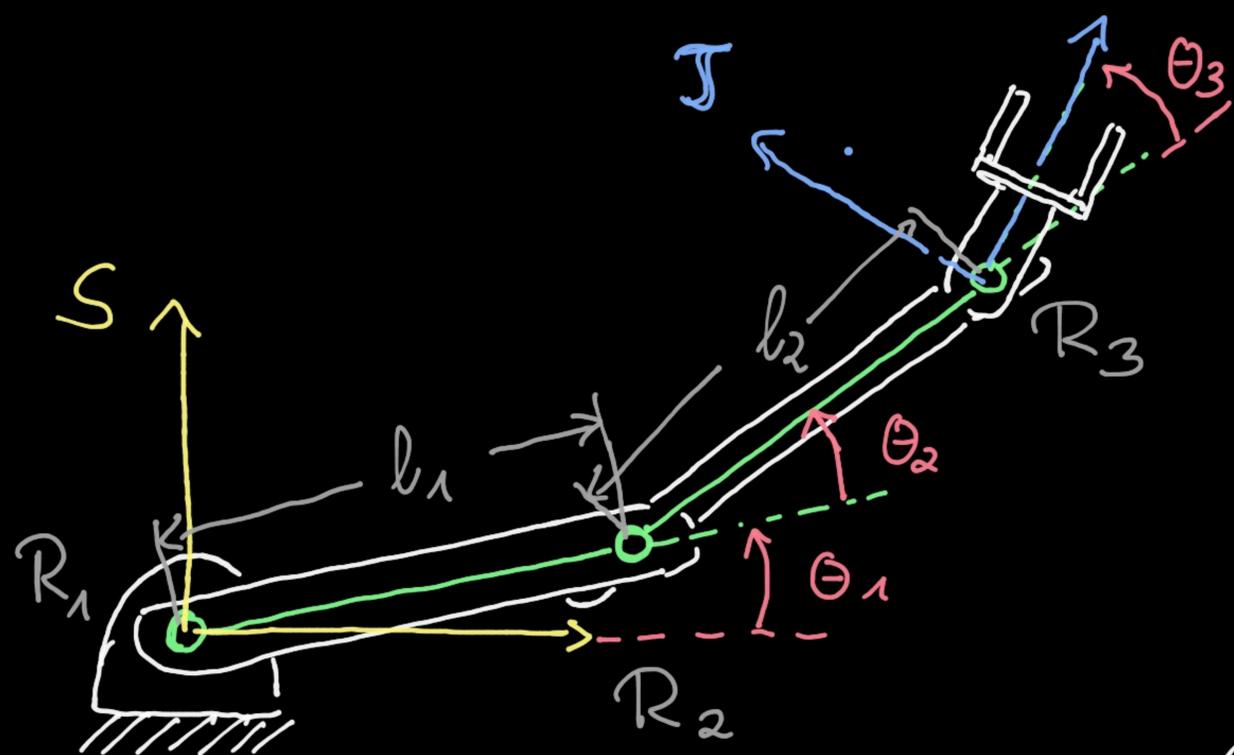
Nur lösbar, wenn

$$|l_1 - l_2| \leq d = v_1^2 + v_2^2 \leq l_1 + l_2$$

Dann $\theta_2 = \pm \arccos \frac{d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$



Inverse Kinematik des ebenen 3R-Arms



Gegeben: Koordinatentransformation

$$[P]_S = M \cdot [P]_J + \underline{v}$$

mit $M = \text{Rot}(\theta)$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [R_3]_S$

Gesucht: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ mit

$$M = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\text{und } \underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn $|l_1 - l_2| \leq d = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, dann $\theta_2 = \pm \arccos \frac{d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$, sonst **NOTHAFT**

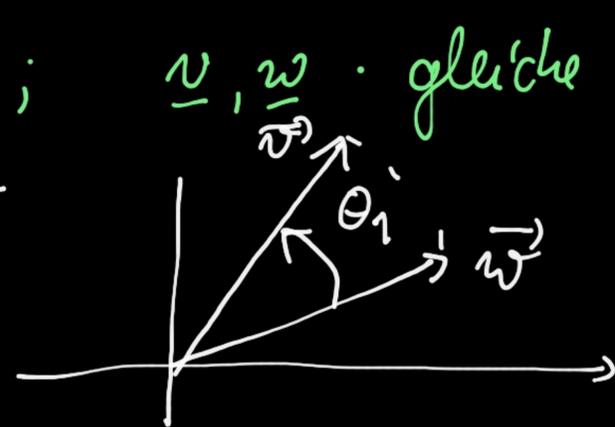
$$\underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1) \cdot \text{Rot}(\theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beugen wir

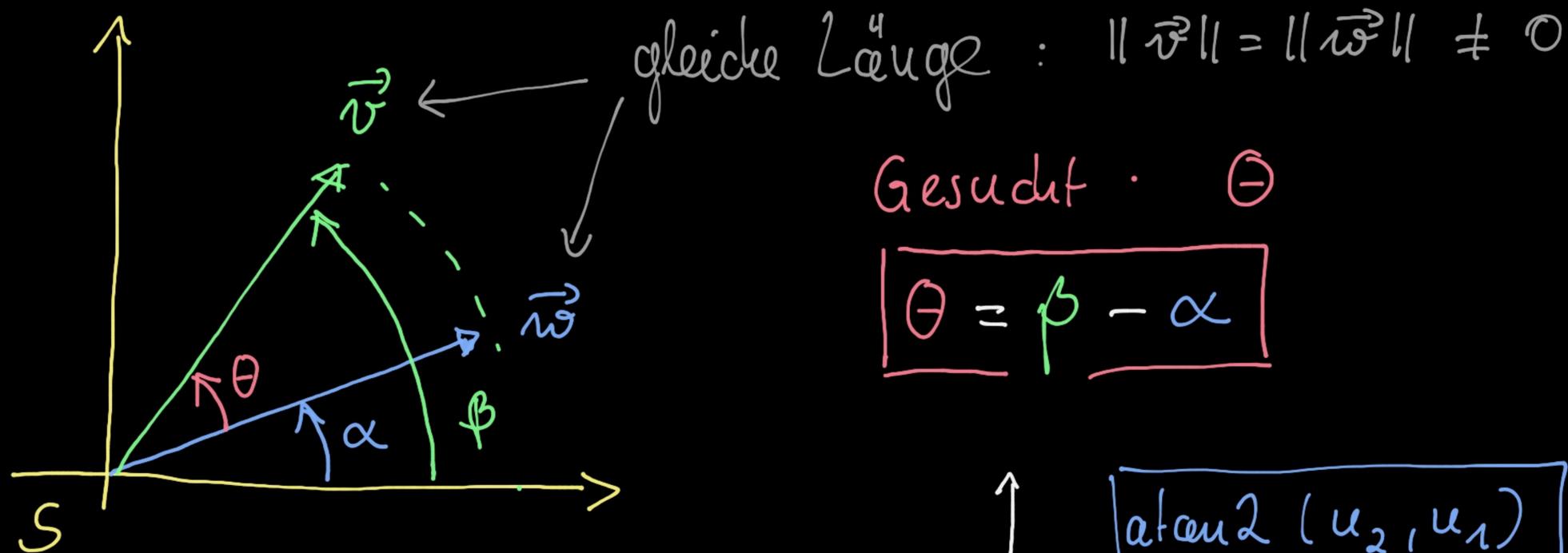
$$= \text{Rot}(\theta_1) \cdot \left(\begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$= \underline{w}$: beugen wir \underline{v} ; $\underline{v}, \underline{w}$: gleiche Länge

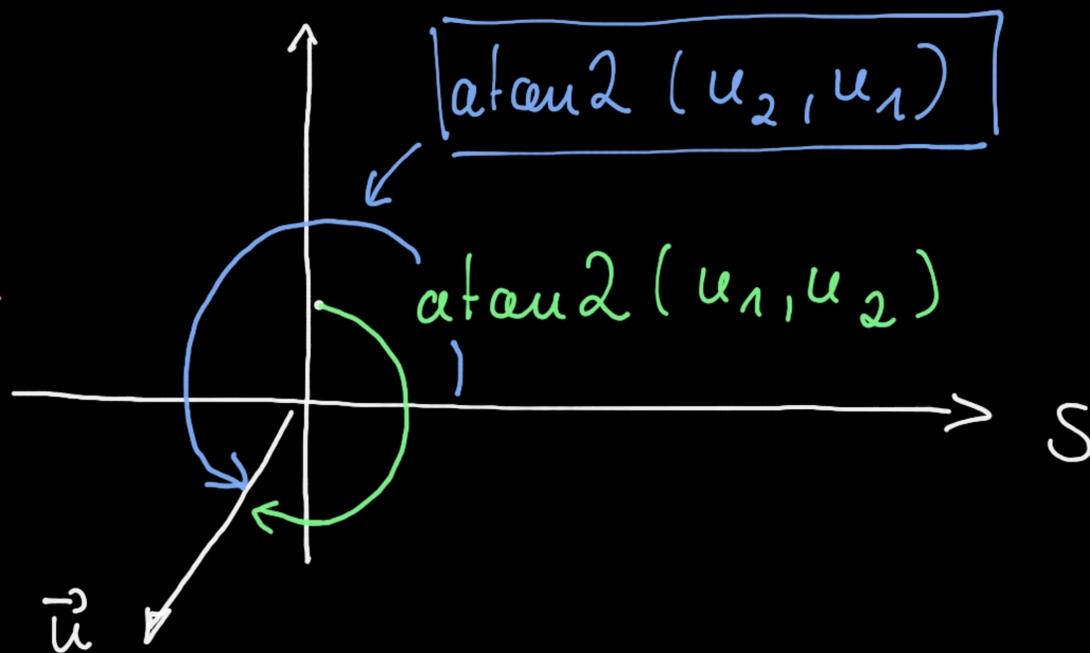
$$\underline{w} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \underline{v} \quad : \quad \text{drehe } \underline{w} \text{ auf } \underline{v}$$



Der intelligente Arkustangens :



intelligente
Arkustangens



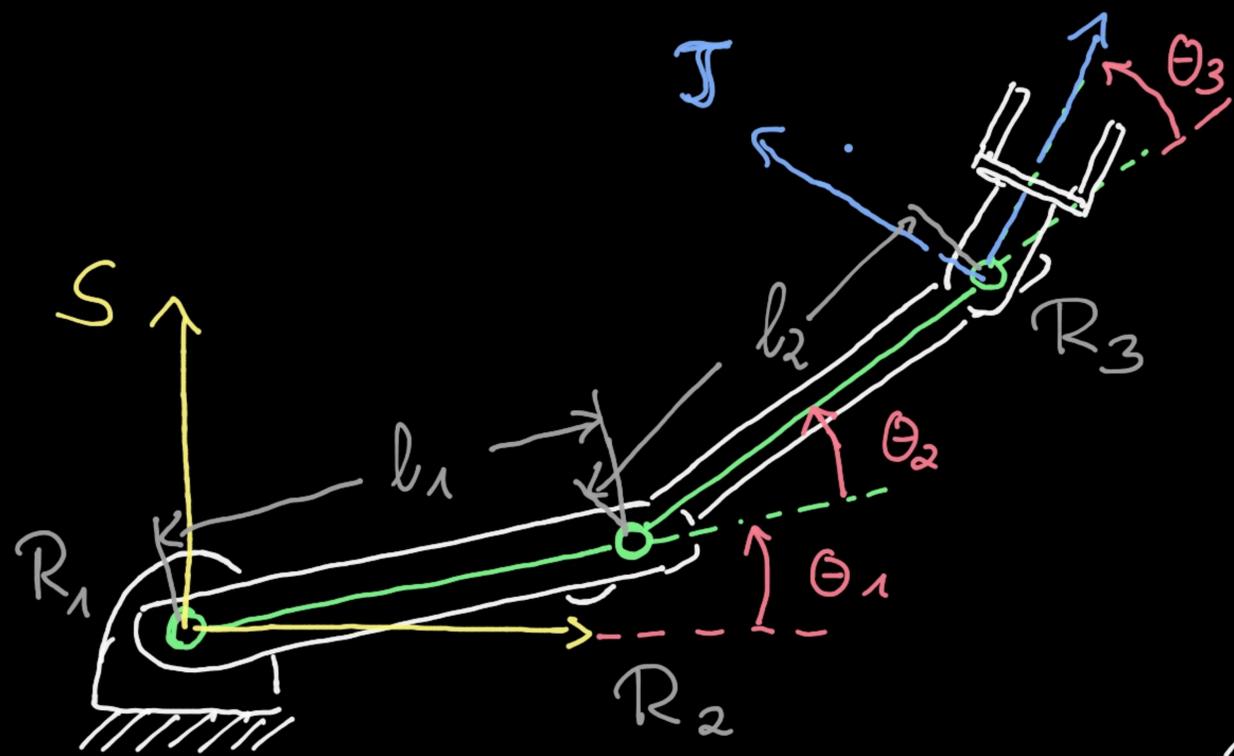
$$[\vec{u}]_S = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Vekt.}$$

Lösung des Problems : $[\vec{v}]_S = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, [\vec{w}]_S = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$\beta = \text{atan2}(v_2, v_1), \alpha = \text{atan2}(w_2, w_1)$

$\Theta = \text{atan2}(v_2, v_1) - \text{atan2}(w_2, w_1)$

Inverse Kinematik des ebenen 3R-Arms



Gegeben: Koordinatentransformation

$$[P]_S = M \cdot [P]_J + \underline{v}$$

mit $M = \text{Rot}(\theta)$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [R_3]_S$

Gesucht: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ mit

$$M = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\text{und } \underline{v} = \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn $|l_1 - l_2| \leq d = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, dann $\theta_2 = \pm \arccos \frac{d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$, sonst **NOTHAFT**

Drehe $\underline{w} = \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}$ auf $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$; dabei ist $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$

1. Fall: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: jedes θ_1 ist Lösung

2. Fall: $\underline{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann $\theta_1 = \arctan 2(v_2, v_1) - \arctan 2(l_2 \sin \theta_2, l_1 + l_2 \cos \theta_2)$

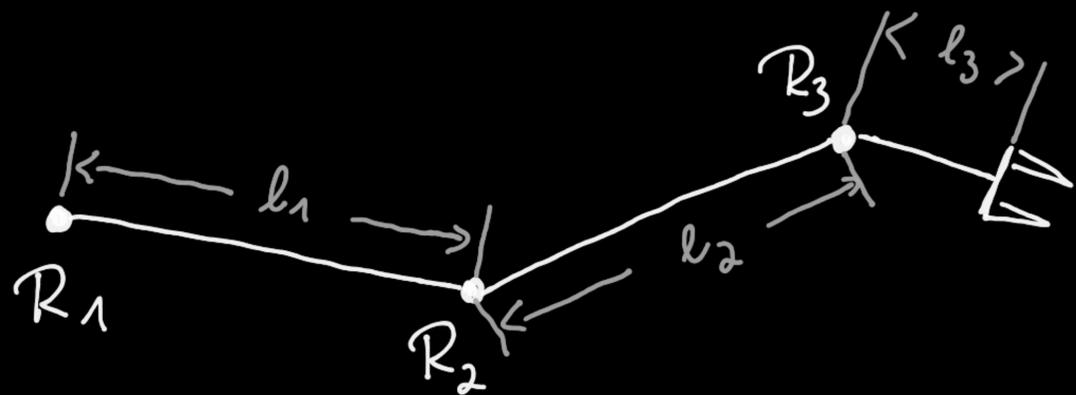
θ_1, θ_2 bekannt. Bestimme θ_3 so, dass $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

Lösung: $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ bzw. $\theta_3 = \theta - \theta_1 - \theta_2$

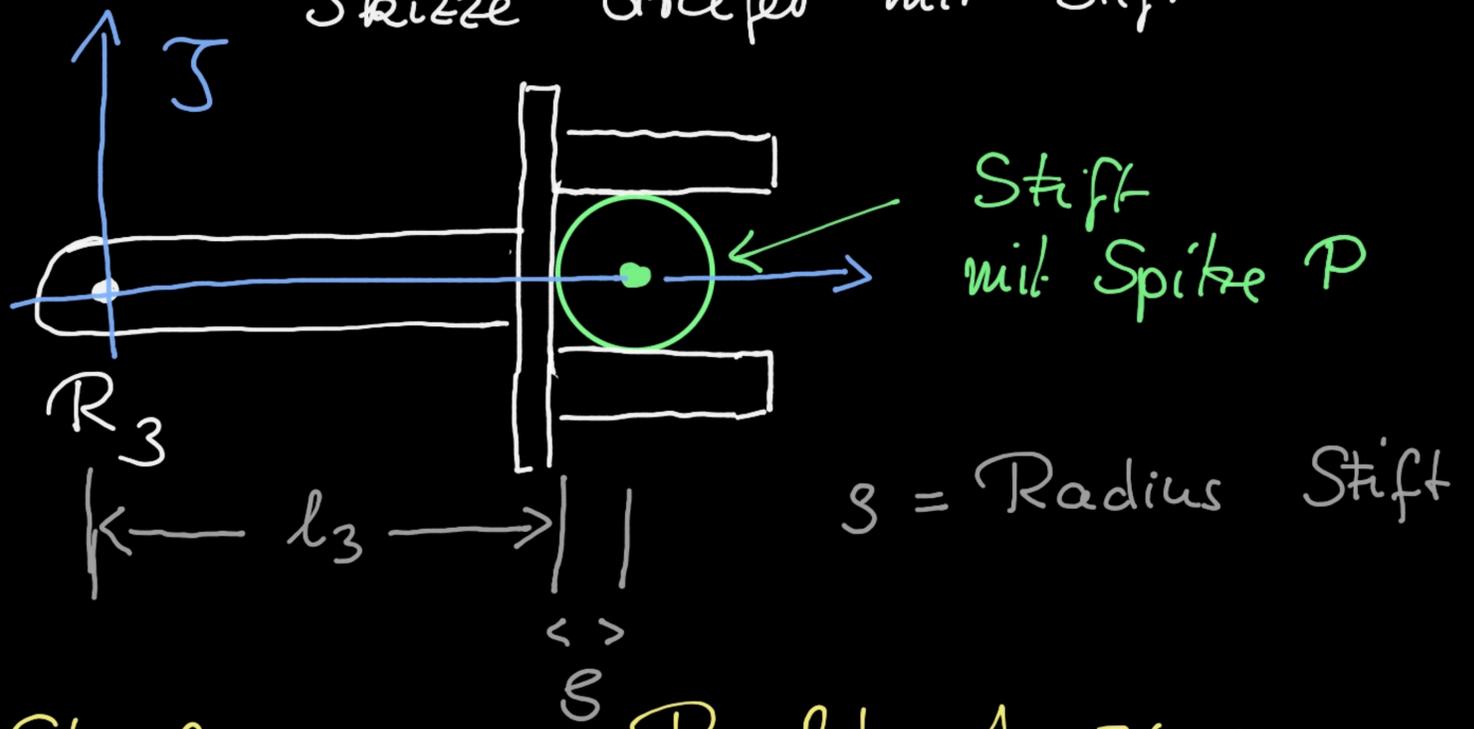
(Evtl. durch $\theta_3 \pm 360^\circ$ ersetzen)

Anwendung: Zeichnen von Strecken

Skizze Arm



Skizze Greifer mit Stift



Aufgabe: Zeichne eine Strecke vom Punkt A zum Punkt B.

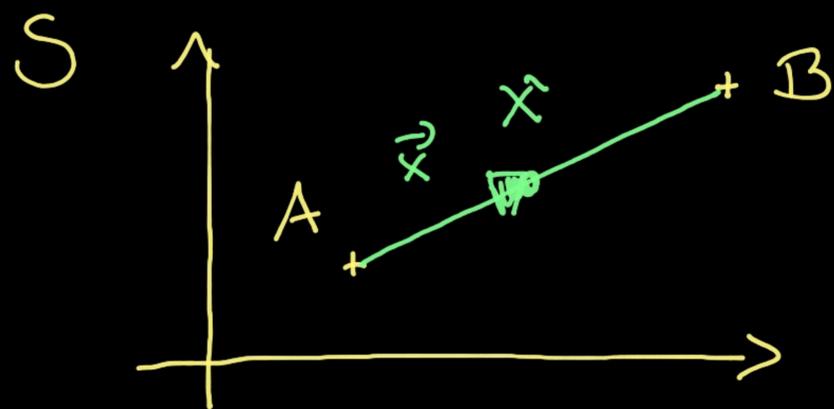
Bekannt: $[A]_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $[B]_S = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Keune: $[P]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 + s \\ 0 \end{pmatrix}$

Also: $[P]_S = \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \cdot \begin{pmatrix} l_3 + s \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(\theta_1) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (l_3 + s) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1 \\ (l_3 + s) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung von Strecken



Vorgelegt $[A]_S = \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$[B]_S = \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$X = A + \overrightarrow{AX} = A + \vec{x} \quad \text{mit } \vec{x} = \overrightarrow{AX}$$

$$\overrightarrow{AX} \parallel \overrightarrow{AB}, \text{ d.h. } \overrightarrow{AX} = s \cdot \overrightarrow{AB}$$

Dabei: $0 \leq s \leq 1$.

D.h. $X(s) = A + s \cdot \overrightarrow{AB}$, $0 \leq s \leq 1$, beschreibt die Punkte der Strecke \overline{AB} in Abh. von dem Parameter s .

In Koordinaten: $[\overrightarrow{AB}]_S = [B]_S - [A]_S = \underline{b} - \underline{a}$

$$\underline{x}(s) = [X(s)]_S = [A]_S + s \cdot [\overrightarrow{AB}]_S$$

$$= \underline{a} + s(\underline{b} - \underline{a}) = (1-s) \cdot \underline{a} + s \cdot \underline{b}$$

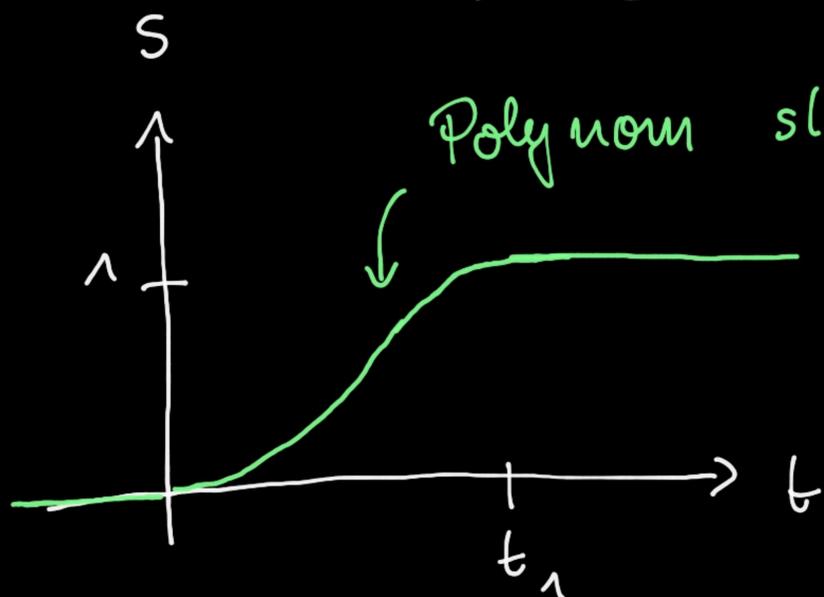
beschreibt die Koordinaten des Punkte auf \overline{AB} bzgl. S .

Umsetzung:

Problembeschreibung: Zum Zeitpunkt t soll sich die
Stiftspitze P im Punkt $X(s)$ der Strecke \overline{AB}
(mit Koordinaten $[X(s)]_S = (1-s) \cdot \underline{a} + s \cdot \underline{b}$)
befinden.

Berechne die hierzu notwendigen Gelenkwinkel $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$.

- (a) Gesucht ist eine Funktion $s = s(t)$ mit
- $s(t) = 0$ für $t \leq 0$ (bis $t=0$: P in A)
 - $s(t) = 1$ für $t \geq t_1$ (ab $t=t_1$: P in B)
 - $s(t)$ ist auf $[0, t_1]$ (streng) monoton wachsend



mit: $s(0) = 0$, $s(t_1) = 1$

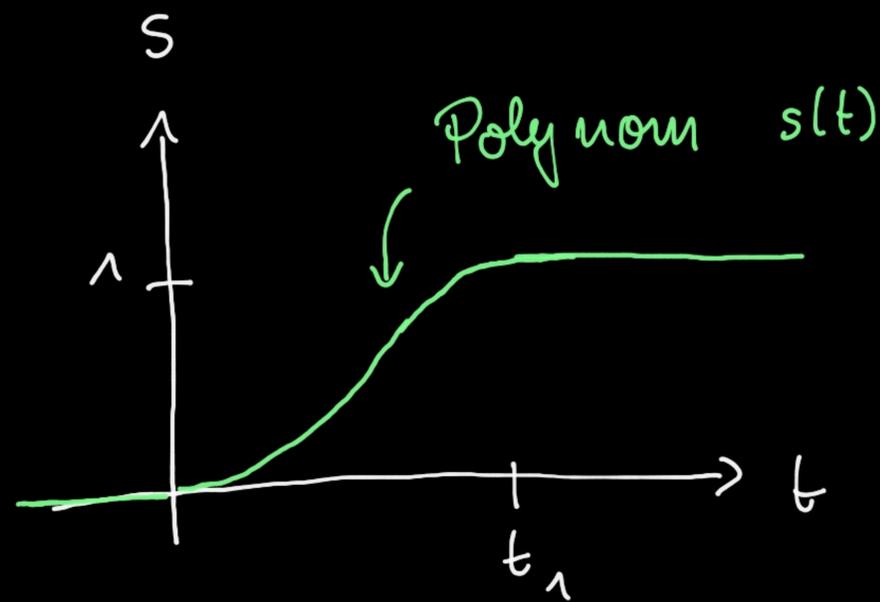
$$\dot{s}(0) = \dot{s}(t_1) = 0$$

$$\ddot{s}(0) = \ddot{s}(t_1) = 0$$

$\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ beschränkt

$$s(t) = c_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 + \dots + c_n \cdot t^n$$

auf $[0, t_1]$



mit : $s(0) = 0$ ✓, $s(t_1) = 1$
 $\dot{s}(0) = \dot{s}(t_1) = 0$
 $\ddot{s}(0) = \ddot{s}(t_1) = 0$

$\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ beschränkt

$$s(t) = c_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 + \dots + c_n \cdot t^n$$

auf $[0, t_1]$

Zunächst $t_1 = 1$



Diese und die nächste Folie können Spuren von Differentialrechnung enthalten...

$$s(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n$$

$$\dot{s}(t) = c_1 + 2c_2 t + \dots + n c_n t^{n-1}$$

$$\ddot{s}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + \dots + n \cdot (n-1) c_n t^{n-2}$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$\dot{s}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\ddot{s}(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$n=5$

$$\left. \begin{aligned} s(t) &= c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 \\ \dot{s}(t) &= 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3 \end{aligned} \right\} t=1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_3 + c_4 + c_5 = 1 \\ 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 = 0 \\ 6c_3 + 12c_4 + 20c_5 = 0 \end{cases}$$

↓
Lsg. gleich

$$\begin{aligned} c_3 + c_4 + c_5 &= 1 \\ 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 &= 0 \\ 6c_3 + 12c_4 + 20c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung $c_3 = 10, c_4 = -15, c_5 = 6$

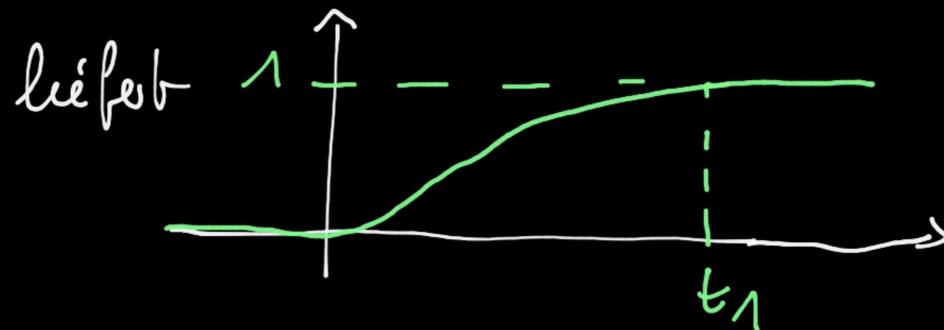
Also: $s(t) = 10t^3 - 15t^4 + 6t^5$ erfüllt
 $s(0) = 0 = \dot{s}(0) = \ddot{s}(0) = \dot{s}(1) = \ddot{s}(1)$ und $s(1) = 1$.

• $s(t)$ streng monoton auf $[0, 1]$; hierzu überprüfe $\dot{s}(t) > 0$
 für $0 < t < 1$: $\dot{s}(t) = 30t^2 - 60t^3 + 30t^4 = 30t^2(t-1)^2$ ✓

• $\dot{s}(t) = 60t - 180t^2 + 120t^3 = 60t \cdot (1 - 3t + 2t^2)$
 Nullstellen auf $(0, 1)$: $t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} = 0$, $t = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}} = 1 \parallel \frac{1}{2}$
 Max von \dot{s} bei $t = \frac{1}{2}$; $\dot{s}(\frac{1}{2}) = \frac{30}{16} < 2$

• $\ddot{s}(t) = 60 - 360t + 180t^2 = 0 \quad | : 180$
 $t^2 - 2t + \frac{1}{3} = 0$ $t = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$
 Mögliches Max/Min auf $[0, 1]$: $t = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$

Notfalls $s_{\text{neu}}(t) = s\left(\frac{t}{t_1}\right)$
 $\dot{s}_{\text{neu}}(t) = \frac{1}{t_1} \dot{s}\left(\frac{t}{t_1}\right)$



Problembeschreibung (neu)

$$s(t) = 10 \left(\frac{t}{t_1}\right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_1}\right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_1}\right)^5 \quad \text{für } 0 \leq t \leq t_1$$

$$s(t) = 0 \quad \text{für } t \leq 0; \quad s(t) = 1 \quad \text{für } t \geq t_1$$

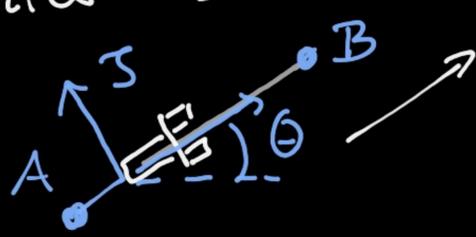
Zum Zeitpunkt t soll sich die Stiftspitze P im Punkt mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1-s(t)) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s(t) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

befinden. Berechne die hierzu notwendigen Gelenkwinkel $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$.

(b) Entscheide über die Richtung der x-Achse von \mathcal{I} .

Richtungsvektor soll \vec{AB} sein.

Also:



Winkel $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ von \mathcal{I}

konstant gleich $\arctan 2(b_2 - a_2, b_1 - a_1)$

Richtungsvektor der x-Achse von \mathcal{I} ist $\frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
mit $n = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

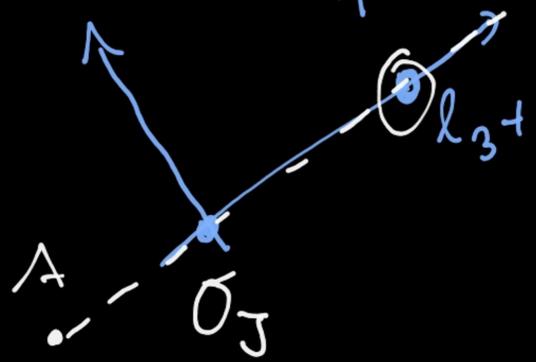
\mathcal{I}

$l_3 + s$

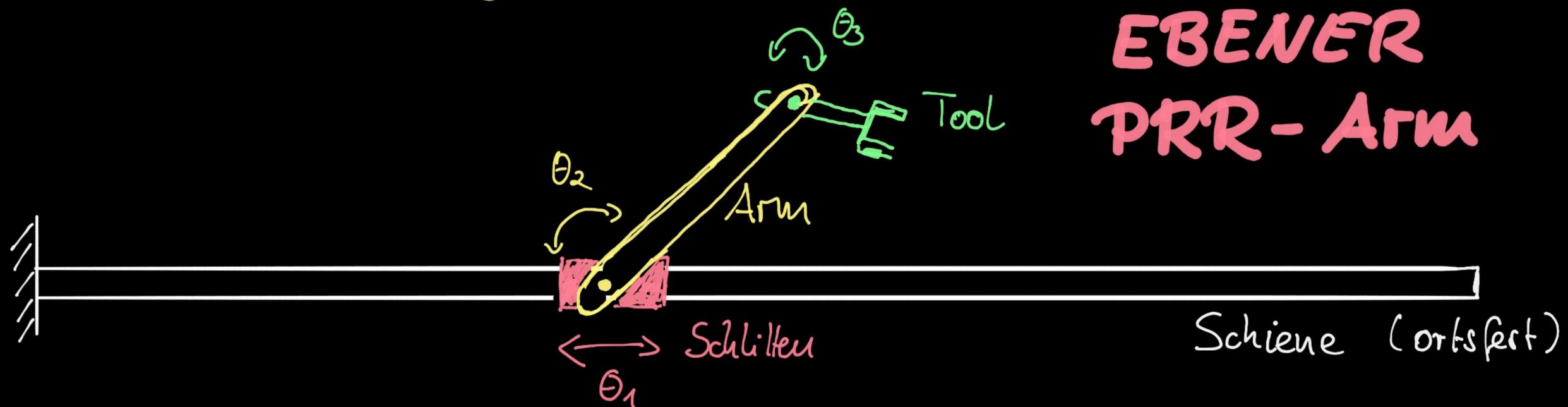
Also $[\sigma_{\mathcal{I}}]_S = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \frac{l_3 + s}{n} \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

Inverse Kinematik liefert $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ (s.o. ∇)

$\theta_3(t) = \arctan 2(b_2 - a_2, b_1 - a_1) - \theta_1(t) - \theta_2(t)$: Fertig ∇



Hausaufgabe Robotik 04



**EBENER
PRR-Arm**

- Führe geeignete Koordinatensysteme S und \mathcal{T} ein
- Löse das direkte und das inverse kinematische Problem mit den erarbeiteten Methoden