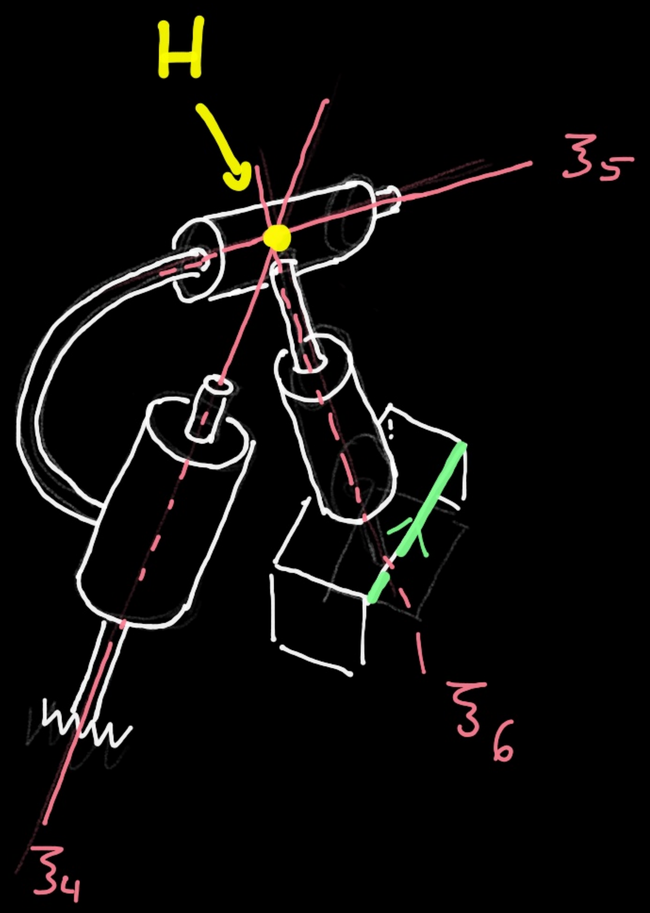
Inverse Kinematik der 3R-Hand



Voraussetzung: die drei Achsen schneiden sich in einem Punkt H

und: $\xi_4 \perp \xi_5$, $\xi_5 \perp \xi_6$

Weltsystem: Ursprung in H
y-Achse $= \xi_4$

Toolsystem: Ursprung in H
y-Achse $= \xi_6$
x-Achse parallel zur grünen Kante

VL 5: $[P]_S = Rot_y(\theta_4) \cdot Rot_x(\theta_5) \cdot Rot_y(\theta_6) \cdot [P]_J$

Ziel: Löse das inverse kinematische Problem für die Hand.

Also: $[P]_S = R \cdot [P]_J$ mit (geeigneter) Matrix R vorgelegt

Bestimme $\theta_4, \theta_5, \theta_6$, so dass $R = Rot_y(\theta_4) \cdot Rot_x(\theta_5) \cdot Rot_y(\theta_6)$

Mathematischer Kern des Problems:

Vorgelegt: Euklidische Systeme S und $\mathcal{J}$ mit gleichem Ursprung H; Transformation

$$[P]_S = R \cdot [P]_{\mathcal{J}}$$

Gesucht: ALLE Kombinationen von $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ mit

$$Rot_x(\theta_4) \cdot Rot_y(\theta_5) \cdot Rot_x(\theta_6) = R.$$

Offene Fragen:

- $Rot_x(\theta_4) \cdot Rot_y(\theta_5) \cdot Rot_x(\theta_6) = ?$
- Wann gibt es eine Lösung, wann gibt es mehr als eine?
- Welche Matrizen R sind hier "zulässig"?

Problem: Welche Matrizen

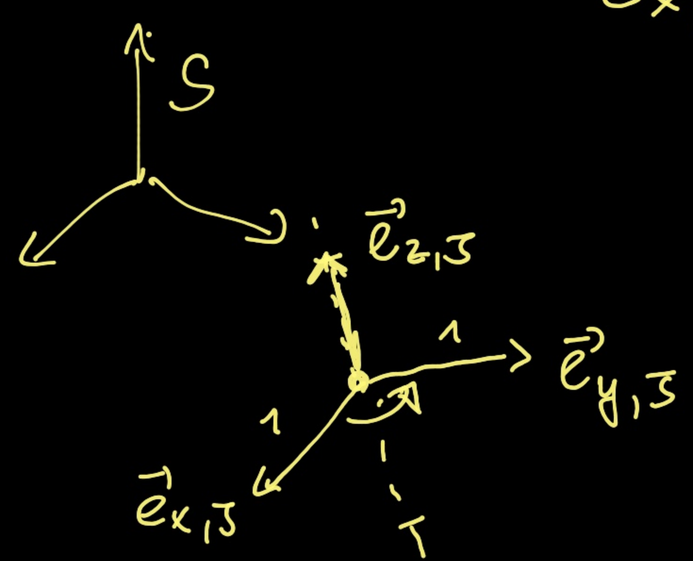
$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \qquad (r_{11}, \dots, r_{33} \text{ reelle Zahlen})$$

gehören zu einer Koordinatentransformation $[P]_S = R \cdot [P]_{\bar{S}} \quad (+\ \underline{v})$ zwischen Euklidischen Systemen S und $\bar{S}$?

Erinnerung $\quad [P]_S = R \cdot [P]_{\bar{S}} + \underline{v}$ Koord.-Trafo

Dann: $\quad R = \left([\vec{e}_{x,\bar{S}}]_S \quad [\vec{e}_{y,\bar{S}}]_S \quad [\vec{e}_{z,\bar{S}}]_S \right)$

$\vec{e}_{x,\bar{S}}$ hat Länge 1



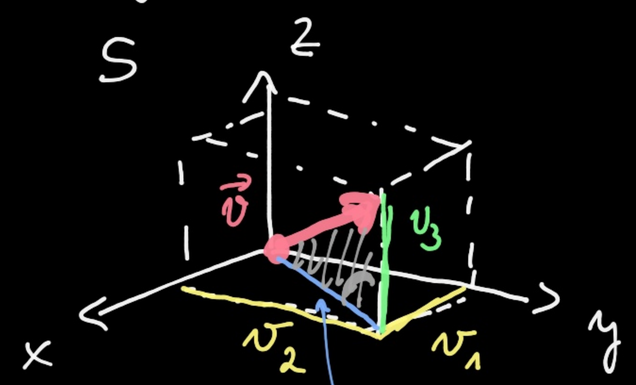
$\vec{e}_{y,\bar{S}}$ hat Länge 1 und steht senkrecht auf $\vec{e}_{x,\bar{S}}$

- Länge 1
- $\perp\ \vec{e}_{x,\bar{S}}, \vec{e}_{y,\bar{S}}$
- Rechtssystem

Durch durch $\vec{e}_{x,\bar{S}}$ und $\vec{e}_{y,\bar{S}}$ eindeutig fest gelegt.

Baustelle 1

Die Länge eines Vektors $\vec{v}$



$$[\vec{v}]_S = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

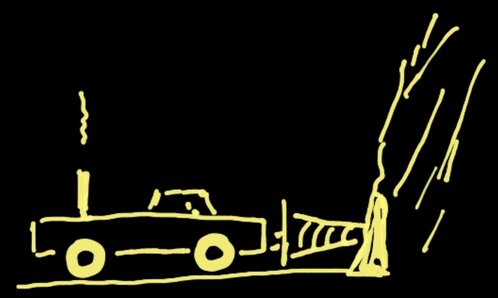
Länge ist $\ell = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Länge von $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\| = \|[\vec{v}]_S\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\ell^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

<u>Übung:</u> Wieso kommt $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ als "Trafo-Matrix" nicht in Frage?

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1^2 + 4^2 + 7^2 = 64 = 8^2, \text{ also } \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = 8 \neq 1$$

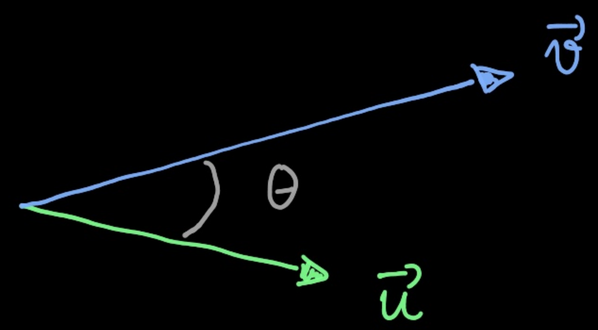


Baustelle 2

Wann stehen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ senkrecht aufeinander?

Das Skalarprodukt

Geometrische Definition



$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

Skalarprodukt

(Ungerichteter) Winkel θ zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$

$$\boxed{0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ}$$

Algebraisch (bzgl. System S)

$$[\vec{u}]_S = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_S = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

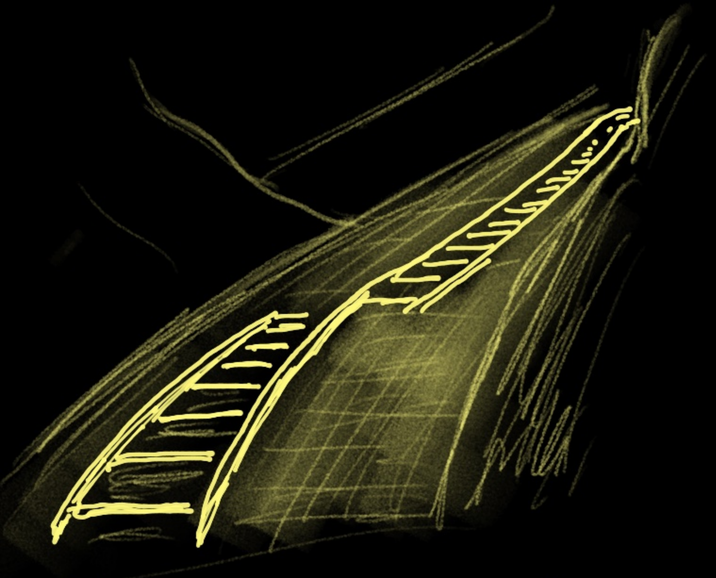
Man erhält:

transponiert

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_S^{t} \cdot [\vec{v}]_S = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= u_1 \cdot v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ transponiert liefert (1×3)-Matrix



ZWISCHENSTAND

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = (\underline{u} \;\; \underline{v} \;\; \underline{w})$$

kann nur dann die Matrix einer Trafo zwischen Euklidischen Systemen sein, wenn

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$$
$$r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1$$
$$r_{13}^2 + r_{23} + r_{33}^2 = 1$$

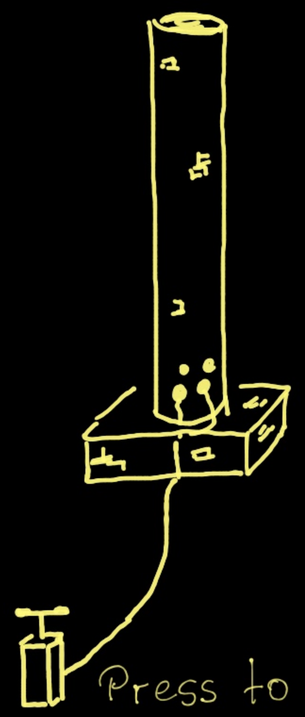
$$r_{11} r_{12} + r_{21} r_{22} + r_{31} r_{32} = 0$$
$$r_{11} r_{13} + r_{21} r_{23} + r_{31} r_{33} = 0$$
$$r_{12} r_{13} + r_{22} r_{23} + r_{32} r_{33} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \|\underline{u}\|^2 &= 1^2 \\ \|\underline{v}\|^2 &= 1^2 \\ \|\underline{w}\|^2 &= 1 \\ \underline{u}^t \cdot \underline{v} &= 0 \\ \underline{u}^t \cdot \underline{w} &= 0 \\ \underline{v}^t \cdot \underline{w} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{R "orthogonale" Matrix}$$

Reicht das? Nein! z.B.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt alles, aber keine Trafo-Matrix



Einschub:

$R = (\underline{u} \quad \underline{v} \quad \underline{w})$ orthogonale Matrix

$$\|\underline{u}\|^2 = 1 \qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle \qquad \text{bzw} \quad \|\underline{u}\|^2 = \underline{u}^t \cdot \underline{u}$$

Also: $\underline{u}^t \cdot \underline{u} = \underline{v}^t \cdot \underline{v} = \underline{w}^t \cdot \underline{w} = 1$

und $\underline{u}^t \cdot \underline{v} = \underline{u}^t \cdot \underline{w} = \underline{v}^t \cdot \underline{w} = 0$

bzw. $\underline{v}^t \cdot \underline{u} = \underline{w}^t \cdot \underline{u} = \underline{w}^t \cdot \underline{v} = 0$

Also:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{u}^t \\ \underline{v}^t \\ \underline{w}^t \end{pmatrix}}_{R^t} \cdot \underbrace{(\underline{u} \quad \underline{v} \quad \underline{w})}_{R} = \begin{pmatrix} \underline{u}^t\underline{u} & \underline{u}^t\underline{v} & \underline{u}^t\underline{w} \\ \underline{v}^t\underline{u} & \underline{v}^t\underline{v} & \underline{v}^t\underline{w} \\ \underline{w}^t\underline{u} & \underline{w}^t\underline{v} & \underline{w}^t\underline{w} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Einheitsmatrix } I}$$

(Spalten von R zeilenweise aufschreiben)

R^t "R transponiert"

Notiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & c_{23} \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

allgemeines Matrix-Produkt

3. Spalte Ergebnis $= \begin{pmatrix} * \\ c_{23} \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$

$$= b_{13} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + b_{23} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + b_{33} \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ b_{13}\, a_{21} + b_{23}\, a_{22} + b_{33}\, a_{23} \\ * \end{pmatrix}$$

Also $c_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33}$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Skalarprodukt}}$$

2. Zeile
3. Spalte

2. Zeile

3. Spalte

Kleines Zwischenfazit

Vorgelegt ist eine (3×3)-Matrix R:

Spalten von R haben Länge 1 und stehen aufeinander senkrecht

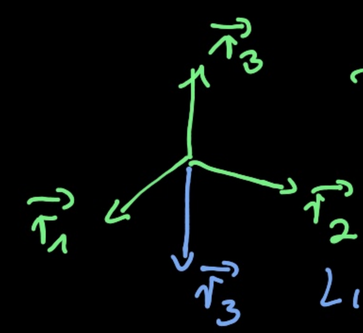
$$\boxed{R \text{ ist genau dann orthogonal, wenn } R^t \cdot R = I \text{ gilt.}}$$

"Transponierte"

schreibe die Spalten von R zeilenweise in eine Matrix

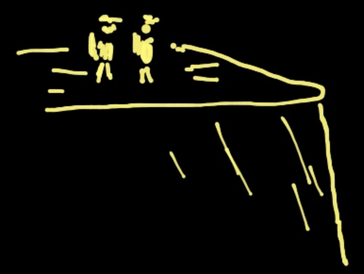
Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Rechtssystem

Linkssystem



Ausflug.

1. Anleihe aus der Linearen Algebra

A $(n \times \underline{m})$ - Matrix $\quad$ B $(\underline{m} \times p)$ - Matrix

gleiches m !

Dann $A \cdot B$ bildbar. $[(n \times p)$ - Matrix$]$

Es gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

R orthogonale Matrix ; $\underline{u}, \underline{v}$ Koordinatenvektoren

$$(R\underline{u})^t \cdot (R \cdot \underline{v}) = \underline{u}^t (R^t R) \underline{v} = \underline{u}^t \cdot \underbrace{I \cdot \underline{v}}_{= \underline{v}} = \underline{u}^t \cdot \underline{v}$$

d.h. "R erhält das Skalarprodukt"

Umgekehrt : $(R\underline{u})^t \cdot (R \cdot \underline{v}) = \underline{u}^t \cdot \underline{v}$ für alle $\underline{u}, \underline{v}$

Dann: $\underline{u}^t \cdot (R^t R) \cdot \underline{v} = \underline{u}^t \cdot \underline{v} \quad \rightsquigarrow \quad R^t \cdot R = I$

Also : Orthogonale Matrizen sind diejenigen Matrizen, die das Skalarprodukt und die Länge (d.h. Länge und Winkel) erhalten.

R orthogonale Matrix:

$R \cdot \underline{x} = \underline{u}$ hat einzige Lösung $\underline{x} = R^t \cdot \underline{u}$

$\underline{x} = I \cdot \underline{x} = R^t \cdot R \cdot x = R^T \cdot \underline{u}$

Das ist tatsächlich eine Lösung

$\underline{x} = R^t \cdot \underline{u}$ einsetzen: $R \cdot \underline{x} = \underbrace{R \cdot R^t}_{= I} \cdot \underline{u} \overset{!}{=} \underline{u}$ ✓

2. Anleihe aus der Linearen Algebra:

R quadratische Matrix (Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten)

R' Matrix mit $R' \cdot R = I$.

Dann gilt auch $R \cdot R' = I$. ‖

Schreibe dann $R' = R^{-1}$ "inverse Matrix"

Falls R orthogonal, so gilt $R^{-1} = R^t$.

Notiz: $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat keine Inverse, aber $R \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(sonst $R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R^{-1} R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ↯

Nutzen:

$$Rot_x(\theta_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 \\ 0 & \sin\theta_4 & \cos\theta_4 \end{pmatrix}$$

$$Rot_x(\theta_4)^{-1} = Rot_x(\theta_4)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_4 & \sin\theta_4 \\ 0 & -\sin\theta_4 & \cos\theta_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta_4) & -\sin(-\theta_4) \\ 0 & \sin(-\theta_4) & \cos(-\theta_4) \end{pmatrix} = Rot_x(-\theta_4)$$

Also: $Rot_x(-\theta_4) \cdot Rot_x(\theta_4) = I = Rot_x(\theta_4) \cdot Rot_x(-\theta_4)$

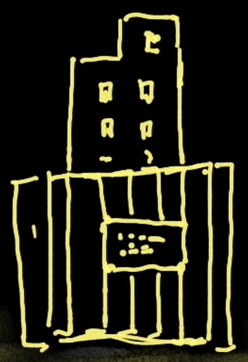
$$Rot_x(\theta_4) \cdot Rot_y(\theta_5) \cdot Rot_x(\theta_6) = R \qquad (\theta_4, \theta_5 \text{ gesucht})$$

θ_6 bekannt $\rightsquigarrow$ $Rot_x(\theta_4)\, Rot_y(\theta_5) = R \cdot Rot_x(\theta_6)^{-1}$

$$= \underbrace{R \cdot Rot_x(\theta_6)^t}_{\text{bekannt}}$$

Gleichung einfacher

Ausflugsende

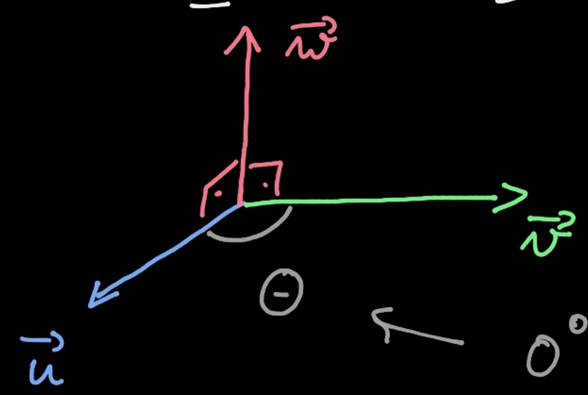


3. Baustelle

$R = (\underline{u} \ \underline{v} \ \underline{w})$ Matrix der Trafo von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{S}$.

Wie rechnet man $\underline{w}$ aus $\underline{u}$ und $\underline{v}$ aus?

$\Downarrow$ Aufsicht

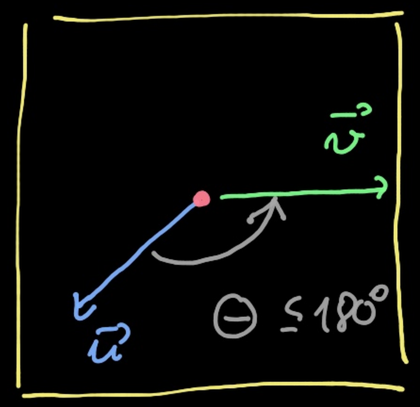


$0° \leq \Theta \leq 180°$

Das Vektorprodukt

Zu Pfeilen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gibt es genau einen weiteren Pfeil $\vec{w}$ mit

- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \Theta$
- $\vec{w}$ steht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht
- $\vec{w} = \vec{0}$ oder $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem



(orientierter Winkel)

Notizen: $\Theta = 0°$: $\vec{u}, \vec{v}$ "parallel"
$\Theta = 180°$: $\vec{u}, \vec{v}$ "antiparallel"

$\vec{w}$ wird mit $\vec{u} \times \vec{v}$ bezeichnet: Vektorprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Vorgelegt: $\underline{u} = [\vec{u}]_S = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{v} = [\vec{v}]_S = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Dann gilt $[\vec{u} \times \vec{v}]_S \overset{\text{Beh.}}{=} \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \underline{w} \overset{\text{Def.}}{=} \underline{u} \times \underline{v}$

Also: $[\vec{u} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom.}}}{\times} \vec{v}]_S = [\vec{u}]_S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alg.}}}{\times} [\vec{v}]_S$

Betrachte dazu $\vec{w}$ mit $[\vec{w}]_S = \underline{w}$.

Zeige: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

Dazu: (1.) $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \underbrace{\sin^2\theta}_{\geq 0} = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta)$

$= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \cos^2\theta$

$= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2$

Nebenbei erhalte: $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle^2 + \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Per Rechnung prüfe nach: $\|\underline{w}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 \cdot \|\underline{v}\|^2 - \underline{u}^t \cdot \underline{v}$

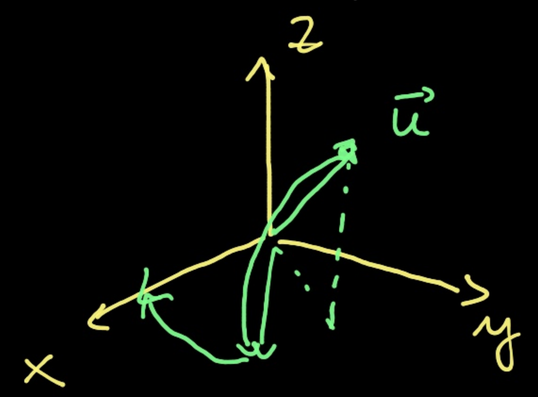
(2) $\vec{w}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$, d.h. $\langle \vec{u} | \vec{w} \rangle = 0 = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$

Rechne nach: $\underline{u}^t \cdot \underline{w} = 0 = \underline{v}^t \cdot \underline{w}$

(3.) Falls $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ und $\vec{u}, \vec{v}$ weder parallel noch antiparallel,

d.h. $\underline{v}$ ist kein Vielfaches von $\underline{u}$ und umgekehrt.

Fehlt: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bilden Rechtssystem



Es gibt θ_a, θ_b mit:

$$\mathrm{Rot}_y(\theta_a) \cdot \underline{u} = \underline{u}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}_z(\theta_b) \cdot \underline{u}' = \underline{u}'' = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 > 0$$

Setze: $\underline{v}' = \mathrm{Rot}_y(\theta_a) \cdot \underline{v}$

$\underline{v}'' = \mathrm{Rot}_z(\theta_b) \cdot \underline{v}'$

Es gibt θ_c mit

$$\underline{u}''' = \mathrm{Rot}_x(\theta_c) \cdot \underline{u}'' = \underline{u}''$$

und $\underline{v}''' = \mathrm{Rot}_x(\theta_c) \cdot \underline{v}'' = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 > 0$

Rechne für jede der Matrizen $M = Rot_x(\theta), Rot_y(\theta), Rot_z(\theta)$ und bel. $\underline{u}, \underline{v}$ nach: $(M\underline{u}) \times (M\underline{v}) = M\cdot(\underline{u} \times \underline{v})$.

Folglich gilt auch für $R = Rot_x(\theta_c)\, Rot_z(\theta_b)\, Rot_y(\theta_c)$

$$(R\underline{u}) \times (R\underline{v}) = R\cdot(\underline{u} \times \underline{v}) = R\cdot\underline{w}$$

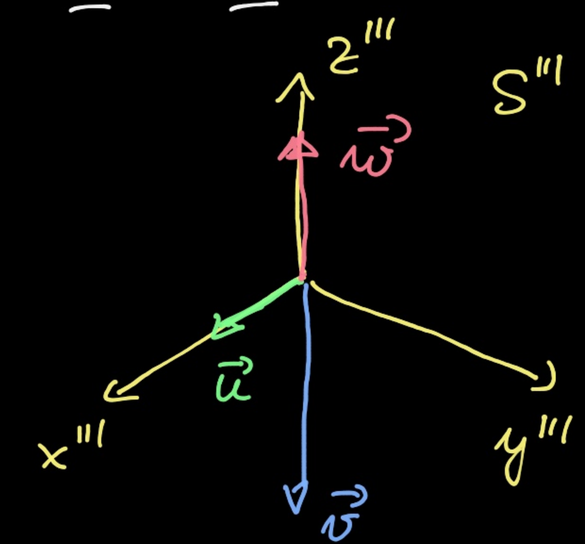
R beschreibt eine Koordinatentrafo. vom System S in S'''

$$R\underline{u} = [\vec{u}]_{S'''}, \quad R\underline{v} = [\vec{v}]_{S'''}, \quad R\underline{w} = [\vec{w}]_{S'''}$$

$$\underline{u}''' = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}''' = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{u}''' \times \underline{v}'''$$

$s_1 > 0$ $\qquad t_2 > 0$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_1 t_2 \end{pmatrix}, \quad s_1 t_2 > 0$$



Profis nutzen hier die "Determinante".

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind ein Rechtssystem

Jetzt: $[\vec{u} \times \vec{v}]_S = [\vec{u}]_S \times [\vec{v}]_S$

Zusammenfassung:

Die Matrix $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ beschreibt genau dann eine Koordinatentransformation zwischen Euklidschen Systemen, wenn: (1.) Die erste Spalte $\underline{u} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix}$ hat Länge 1, also

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$$

(2.) Die zweite Spalte $\underline{v} = \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix}$ hat Länge 1 und steht senkrecht auf $\underline{u}$, also

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1$$

$$r_{11} r_{12} + r_{21} r_{22} + r_{31} r_{32} = 0$$

(3.) Die dritte Spalte $\underline{w}$ ist das Vektorprodukt $\underline{u} \times \underline{v}$, also

$$r_{21} r_{32} - r_{31} r_{22} = r_{13}$$

$$r_{12} r_{31} - r_{11} r_{32} = r_{23}$$

$$r_{11} r_{22} - r_{21} r_{12} = r_{33}$$

Notiz: $\|\underline{w}\| = \underbrace{\|\underline{u}\|}_{1} \cdot \underbrace{\|\underline{v}\|}_{1} \sin \underbrace{\measuredangle(\underline{u}, \underline{v})}_{90^\circ} = 1$

Hausaufgabe Robtik 6

(1.) Zeige, das $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ für jedes α die Länge 1 besitzt.

(2.) Vorgelegt sind Einheitsvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (also $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$), die paarweise aufeinander senkrecht stehen (also $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \vec{0}$). Zeige, dass genau die Vektoren $\vec{g}_\gamma = \cos\gamma\, \vec{u} + \sin\gamma\, \vec{v}$ (mit bel. γ) diejenigen Einheitsvektoren sind, die auf $\vec{w}$ senkrecht stehen.

(3.) Zeige, dass sowohl $\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

Notiz: (1.), (2.), (3.) beantworten fast schon die folgende Frage

(4.) Vorgelegt sind die Euklidischen Systeme S und $\mathcal{J}$; die zugehörige Koordinatentransformation sei $[P]_S = R \cdot [P]_{\mathcal{J}} + \underline{m}$. Der Richtungsvektor $\vec{e}_{x,\mathcal{J}}$ des $\mathcal{J}$-Systems möge in der x-y-Ebene von S liegen.

(a) Zeige, dass $[\vec{e}_{x,\mathcal{J}}]_S = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ für ein passendes α gilt. Welche geometrische Bedeutung hat α?

(b) Gebe alle möglichen Vektoren an, die für die <u>zweite</u> Spalte von R in Betracht kommen. Diese hängen von α und einem weiteren Winkel β ab. Welche geometrische Bedeutung hat β?

(c) Gib die Matrix R in Abhängigkeit von α und β an.

(d) Finde sämtliche (3×3)-Matrizen X mit $\mathrm{Rot}_z(\alpha) \cdot X = R$. Welche geometrische Interpretation ziehst Du aus Deinem Ergebnis?