(F) Eigenwerte und Eigenvektoren

$f: V \to V$ linear.

$t \in K$ heißt Eigenwert von f, falls:

Es gibt $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, mit $f(\vec{v}) = t \cdot \vec{v}$

Solche Vektoren heißen Eigenvektoren von f zum Eigenwert t.

<u>Bsp:</u> $f: V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \} \to V$

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = x \cdot (a_1 + 2 a_2 x)$$

$f(x) = 1 \cdot x \quad \leadsto \quad x$ ist ein EV zum EW 1.

$f(1) = 0 \quad \leadsto \quad 1$ ist ein EV zum EW 0.

$f(x^2) = x \cdot (2x) = 2x^2 \quad \leadsto \quad x^2$ ist ein EV zum EW 2.

$B = (1, x, x^2)$ ist eine Basis von V

EV zu versch. EW, diese sind lin. unabh.

dim $V = 3$

f "diagonalisierbar"

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix, auf der Diagonalen stehen die Eigenwerte

Vorgelegt ist eine lineare Abbildung $f: V \to V$.
Gesucht sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

① Wähle Basis $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ von V
und bestimme $M = [f]_B^B$

$$f(\vec{v}) = t \cdot \vec{v} \iff \underbrace{M \cdot [\vec{v}]_B}_{[f(\vec{v})]_B} = t \cdot [\vec{v}]_B$$
$(\vec{v} \neq \vec{0})$

$$\iff \underbrace{(M - t \cdot E)}_{\in K^{n \times n}} \cdot \underbrace{[\vec{v}]_B}_{\neq \underline{0}} = \underline{0},$$

so etwas gibt es genau dann,
wenn $\underbrace{\det(M - t \cdot E)}_{\text{cha. Polynom (Variable } t)} = 0$

② Berechne $\det(M - t \cdot E)$ und bestimme alle Nullstellen t.

③ Für jede Nullstelle t bestimme alle Lösungen von
$(M - t \cdot E) \cdot \underline{v} = \underline{0}$ (lin. GLS !);
zu $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ ist $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + v_n \cdot \vec{b}_n$ ein EV von f
zum EW t, und alle Eigenvektoren entstehen so.

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 5 \\ 4 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

gemeint sind die EW, EV des Abb. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\underline{v}) = M \cdot \underline{v}$

d.h. $M = [f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$

Bestimme das char. Polynom:

$$\det(M - t \cdot E) = \det\begin{pmatrix} 7-t & -8 & 5 \\ 4 & -5-t & 4 \\ 2 & -4 & 4-t \end{pmatrix} \overset{SII + 2\cdot SI}{=} \det\begin{pmatrix} 7-t & 6-2t & 5 \\ 4 & 3-t & 4 \\ 2 & 0 & 4-t \end{pmatrix}$$

$$\overset{ZI - 2\cdot ZII}{=} \det\begin{pmatrix} -1-t & 0 & -3 \\ 4 & 3-t & 4 \\ 2 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = (3-t) \det\begin{pmatrix} -1-t & -3 \\ 2 & 4-t \end{pmatrix}$$

$$= (3-t)\left[(1+t)(t-4) + 6\right] = (3-t)\cdot(t^2 - 3t + 2)$$

$$(t-a)\cdot(t-b) = t^2 - \underline{(a+b)}\,t + ab$$

$$= (3-t)\cdot(t-1)\cdot(t-2)$$

Eigenwerte sind 1, 2, 3

$M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ hat 3 versch. EW $\rightsquigarrow$ M ist diagonalisierbar.

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 5 \\ 4 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte 1, 2, 3

Bemerkung: alle ER $E_t = \{ \underline{v} \mid (M - t\cdot E)\cdot \underline{v} = \underline{0} \}$ sind 1-dim.

$\underline{t=1}$ $M - 1\cdot E$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -8 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} - \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ - 2\cdot\mathrm{III} \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + 2\cdot\mathrm{II} \\ : 2 \\ \leftarrow \text{streichen} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

Basislösung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Basis des ER)

$\underline{t=2}$ $M - 2E$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{streichen (... geschummelt ...)} \\ - 2\cdot\mathrm{III} \\ : 2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Basislösung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{t=3}}$ $M - 3\cdot E$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -8 & 5 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

Basislösung $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

eine Lösung geraten,
$\dim E_3 = 1$: fertig

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 5 \\ 4 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte 1, 2, 3

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Basis des ER zum EW $t = 1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Basis des ER zum EW $t = 2$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Basis des ER zum EW $t = 3$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = B$$

Basis von $\mathbb{R}^3$

(automatisch lin. unabh., Anzahl stimmt).

Also ist M diagonalisierbar:

$$B^{-1} M B = D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Big(\quad M \cdot (\underline{b}_1 \; \underline{b}_2 \; \underline{b}_3) = (\underline{b}_1 \; \underline{b}_2 \; \underline{b}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$(M\underline{b}_1, M\underline{b}_2, M\underline{b}_3) = (1 \cdot \underline{b}_1, 2 \cdot \underline{b}_2, 3\underline{b}_3) \quad \Big)$$

Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -6 & 11 & -6 \\ -6 & 12 & -7 \end{pmatrix}$.

$$\det \begin{pmatrix} +4+t & 6 & +3 \\ +6 & 11-t & +6 \\ +6 & 12 & +7+t \end{pmatrix} \overset{Z_{II}-Z_{III}}{=} \det \begin{pmatrix} 4+t & 6 & 3 \\ 0 & -1-t & -1-t \\ 6 & 12 & 7+t \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_{III}-Z_{II}}{=} \det \begin{pmatrix} 4+t & 6 & -3 \\ \boxed{0 \quad -1-t \quad 0} \\ 6 & 12 & -5+t \end{pmatrix} = -(t+1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4+t & -3 \\ 6 & -5+t \end{pmatrix}$$

$$= -(t+1) \left[(4+t) \cdot (t-5) + 18 \right] = -(t+1) \cdot \left[t^2 - t - 2 \right]$$

$$= -(t+1)(t-2) \cdot (t+1) = -(t+1)^2 \cdot (t-2)$$

$t = -1$ ist ein EW mit algebraische Vielfachheit 2

$t = 2$ ——— " ——— 1

$$t = -1: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -3 & 0 \\ -6 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -6 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

freie Var.

Basislösungen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t = -1$ hat geometrische Vielfachheit 2

$t = 2$ " 1

$\} \to M$ diagonalisierbar

Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -6 & 11 & -6 \\ -6 & 12 & -7 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis des Eigenraums zum EW -1.

$\underline{t=2}$:

$$\begin{array}{ccc|c} -6 & 6 & -3 & 0 \\ -6 & 9 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -9 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \left\| \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \begin{array}{l} -2\cdot\mathrm{II} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow \text{streichen} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Basislösungen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Folgt: $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$

und $B^{-1} M B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

Insbesondere: B ist diagonalisierbar.

Bestimme die EW/EV von $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ist M diagonalisierbar?

$$\det(M - t\cdot E) = \det\begin{pmatrix} -1-t & 4 & -3 \\ -2 & 5-t & -2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \overset{Z\mathrm{II} - 2\cdot Z\mathrm{III}}{=} \det\begin{pmatrix} -1-t & 4 & -3 \\ 0 & 1-t & -4+2t \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$\overset{S\mathrm{II} + 2\,S\mathrm{I}}{=} \det\begin{pmatrix} +1+t & 2-2t & +3 \\ 0 & 1-t & +4-2t \\ +1 & 0 & -1+t \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach 1. Spalte

$$= (1+t)\det\begin{pmatrix} 1-t & 4-2t \\ 0 & -1+t \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2-2t & 3 \\ 1-t & 4-2t \end{pmatrix}$$

$$= (1+t)\cdot\left((1-t)\cdot(t-1)\right) + \left((2-2t)(4-2t) - (1-t)\cdot 3\right)$$

$$= (t+1)\cdot(-t^2+2t-1) + (8-12t+4t^2-3+3t)$$

$$= -t^3+2t^2-t-t^2+2t-1+4t^2-9t+5$$

$$= -t^3+5t^2-8t+4 = -(t^3-5t^2+8t-4) = 0$$

HORNER:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \underline{0} \end{array}$$

$$= -(t-1)\cdot(t^2-4t+4)$$

$$= -(t-1)\cdot(t-2)^2$$

Bestimme die EW/EV von $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ist M diagonalisierbar?

EW 1 hat algebraische Vielfachheit 1

EW 2 hat algebraische Vielfachheit 2.

$\underline{t=2}$: $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Basislösung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

EW 2 hat geometrische Vielf. 1 $\neq$ alg. Vielf.,

also ist M <u>nicht</u> diagonalisierbar.

$\underline{t=1}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} +2 & -4 & +3 & 0 \\ +2 & -4 & +2 & 0 \\ +1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Basislösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimme die EW/EV von $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(M - t \cdot E) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4$$

- $\det M = \det(M - 0 \cdot E) = 4 \neq 0$,
  also ist M invertierbar
- $$\det(M - t \cdot E) = \det \begin{pmatrix} -1-t & 4 & -3 \\ -2 & 5-t & -2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}$$
  $$= (-1-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-t & -2 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} + 2 \cdot \dots - 1 \cdot \dots$$
  $$= (-1-t) \cdot (5-t)(1-t) + \text{linearer Term in } t$$
  $$= -t^3 + t^2 \cdot \underbrace{(-1+5+1)}_{} + \text{linearer Term in } t$$
  $$= \text{Spur von } M = \text{Summe der Diagonalelemente}$$

Merke: Spur von M = Koeffizient vor t^2

$\uparrow$

(3×3) - Matrix

2. Beispiel: $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -6 & 11 & -6 \\ -6 & 12 & -7 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

Dann: $T^{-1} M T = D$.

Zusatzaufgabe: Bestimme M^5. $\leftarrow M \cdot M \cdot M \cdot M \cdot M$

1. Weg: $M = T D T^{-1}$

Also $M^5 = (T D T^{-1})^5 = T D \cancel{T^{-1} T} D \cancel{T^{-1} T} D \cancel{T^{-1} T} D \cancel{T^{-1} T} D T^{-1}$

$= T D^5 T^{-1}$

$$D^5 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} (-1)^5 & & \\ & (-1)^5 & \\ & & 2^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 32 \end{pmatrix}$$

d.h. $M^5 = T \cdot \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 32 \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$

Berechne T^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot II \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & -1 & +2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -II \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -III \\ -III \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow E \;\Bigg|\; \underbrace{\begin{array}{ccc} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}}_{= T^{-1}}$$

2. Beispiel: $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -6 & 11 & -6 \\ -6 & 12 & -7 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

Dann: $T^{-1} M T = D$.

Zusatzaufgabe: Bestimme M^5.

<u>1. Weg</u>: $\underline{M^5 = T D^5 T^{-1}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 32 \\ -1 & 0 & 32 \\ 0 & -1 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -66 & 33 \\ 33 & -67 & 33 \\ 66 & -132 & 65 \end{pmatrix}$$

<u>NR</u>:

FALK-Schema

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & 3 & -1 \\ & & & -2 & 4 & -1 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 32 & 32 & -66 & 33 \\ -1 & 0 & 32 & 33 & -67 & 33 \\ 0 & -1 & 64 & 66 & -132 & 65 \end{array}$$

2\. Beispiel: $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -6 & 11 & -6 \\ -6 & 12 & -7 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

Dann: $T^{-1} M T = D$.

Zusatzaufgabe: Bestimme M^5.

Satz von Cayley-Hamilton: Vorgelegt $M \in K^{n \times n}$ mit char. Polynom $\det(M - t \cdot E) = -(t^n + c_{n-1} t^{n-1} + c_{n-2} t^{n-2} + \dots + c_0)$

$c_{n-1} = -\operatorname{tr}(M)$ (Spur)

Dann gilt: $M^n + c_{n-1} \cdot M^{n-1} + \dots + c_1 \cdot M + c_0 \cdot E = 0$

Hier: $\det(M - t \cdot E) = -(t+1)^2 (t-2) = -(t^3 - 3t - 2)$

Cayley-Hamilton: $M^3 - 3M - 2E = 0$

Also: $M^3 = 3M + 2E$

$M^5 = 3 \cdot M^3 + 2M^2 = 2M^2 + 3(3M + 2E)$

$= 2M^2 + 9M + 6E = \dots$

und: $M^8 = 3M^6 + 2M^5 = 3M^3 \cdot M^3 + 2M^2 \cdot M^3$

$= 3 \cdot (3M + 2E)(3M + 2E) + 2 \cdot M^2 \cdot (3M + 2E)$

$= 27M^2 + 36M + 12E + 6(3M + 2E) + 4M^2$

$= 31M^2 + 54M + 24E$

Hausaufgabe Ing Ma 19 A

Vorgelegt ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -8 & 7 \\ -1 & -10 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von M

(b) Bestimme – wenn möglich – eine invertierbare Matrix T, für die $T^{-1} \cdot M \cdot T$ Diagonalgestalt hat.

(c) Berechne $\det(M)$. Ist M invertierbar?

(d) Berechne M^{10}.