Klausurvorbereitung G:
Euklidisches Skalarprodukt.

Erinnerung: $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

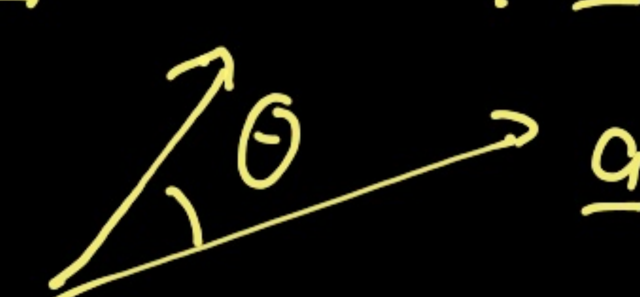
$$\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle = \underline{a}^t \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \quad \text{Skalarprodukt}$$

$$\| \underline{a} \| = \sqrt{\langle \underline{a} \mid \underline{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \quad \text{Norm.}$$

Berechne für $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowohl $\langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle$ als auch $\| \underline{a} \|$.

Dazu $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 6$

Bem: $\| \underline{a} \| =$ Länge von $\underline{a}$, $\quad \langle \underline{a} \mid \underline{b} \rangle = \| \underline{a} \| \cdot \| \underline{b} \| \cdot \cos \Theta$



$$\| \underline{a} \| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Erinnerung: Eine Menge $(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k)$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ heißt ein Orthonormalsystem, wenn gilt:

$$\|\underline{b}_1\| = \ldots = \|\underline{b}_k\| = 1$$

und $\langle \underline{b}_i \mid \underline{b}_j \rangle = 0$ für $i \neq j$

Satz Jedes Orthonormalsystem ist linear unabhängig.

Bildet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis?

Wenn nicht: Wie könnte man eine aus diesen drei Vektoren erhalten?

Dazu: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}, \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}, \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6}$$

Setze $\underline{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$: Orthonormalsystem!

Beachte $\|\underline{b}_1\| = \|\underline{b}_2\| = \|\underline{b}_3\| = 1$ und $\langle \underline{b}_1 \mid \underline{b}_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 = \langle \underline{b}_1 \mid \underline{b}_3 \rangle = \langle \underline{b}_2 \mid \underline{b}_3 \rangle$$

$B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Orthonormalbasis.

(a) Bestimme die Koordinaten des Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzgl. B.

(b) Bestimme die Transformationsmatrix $T = [id_{\mathbb{R}^3}]^B_E$

zu (a): $\underline{a} = r_1 \underline{b}_1 + r_2 \cdot \underline{b}_2 + r_3 \underline{b}_3$

Folgt: $\langle \underline{b}_1 | a \rangle = \langle \underline{b}_1 | r_1 \underline{b}_1 + r_2 \underline{b}_2 + r_3 \underline{b}_3 \rangle$ (bilinear)

$$= r_1 \underbrace{\langle \underline{b}_1 | \underline{b}_1 \rangle}_{\|\underline{b}_1\|^2 = 1} + r_2 \underbrace{\langle \underline{b}_1 | \underline{b}_2 \rangle}_{=0} + r_3 \underbrace{\langle \underline{b}_1 | b_3 \rangle}_{=0} = r_1$$

Also: $\underline{a} = \langle \underline{b}_1 | \underline{a} \rangle \cdot \underline{b}_1 + \langle \underline{b}_2 | \underline{a} \rangle \, b_2 + \langle \underline{b}_3 | \underline{a} \rangle \, \underline{b}_3$

FOURIER-Entwicklung von $\underline{a}$ bzgl. B.

$\overset{\text{hier}}{=} \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \underline{b}_1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \underline{b}_2 + 0 \cdot \underline{b}_3 = 2\sqrt{3} \cdot \underline{b}_1 + \sqrt{2} \cdot \underline{b}_2$

zu (b): $B \mid E \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} E \mid T$, d.h. $T = B^{-1}$

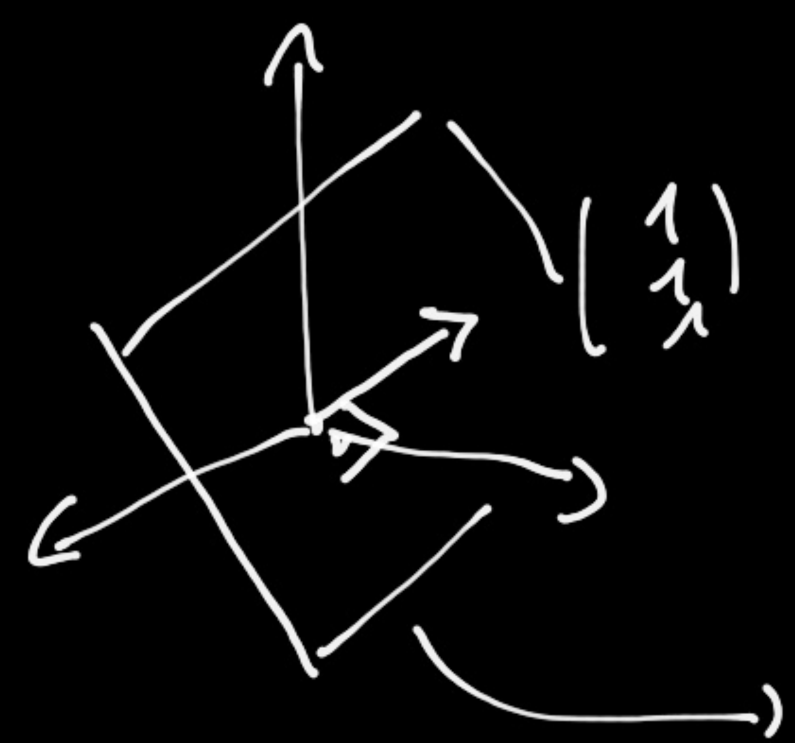
B ist Orthonormalbasis

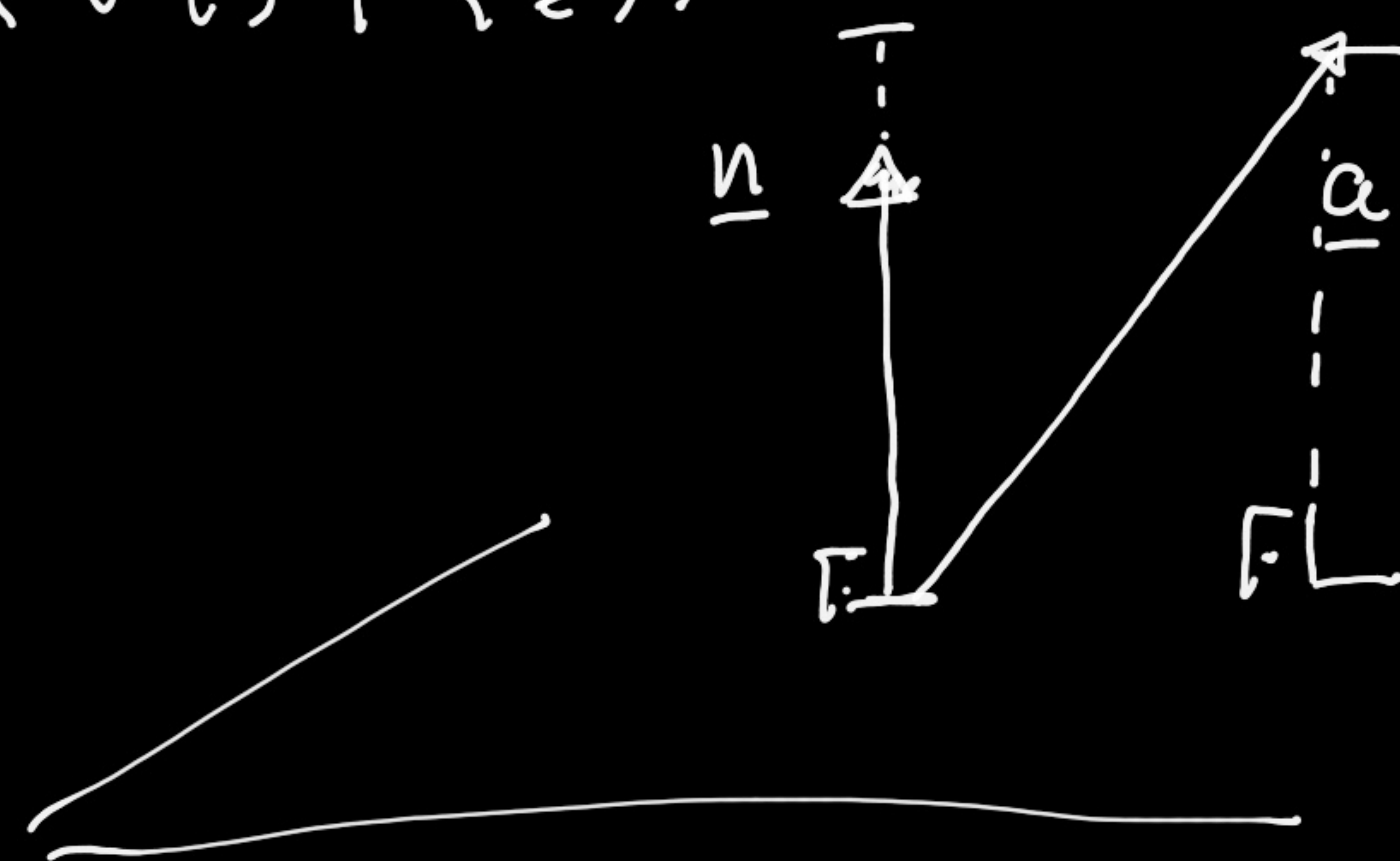
$$B^t \cdot B = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^t \\ \underline{b}_2^t \\ \underline{b}_3^t \end{pmatrix} \cdot (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3) = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^t \underline{b}_1 & \cdots \\ \underline{b}_2^t \underline{b}_1 & \cdots \\ \underline{b}_3^t \underline{b}_3 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

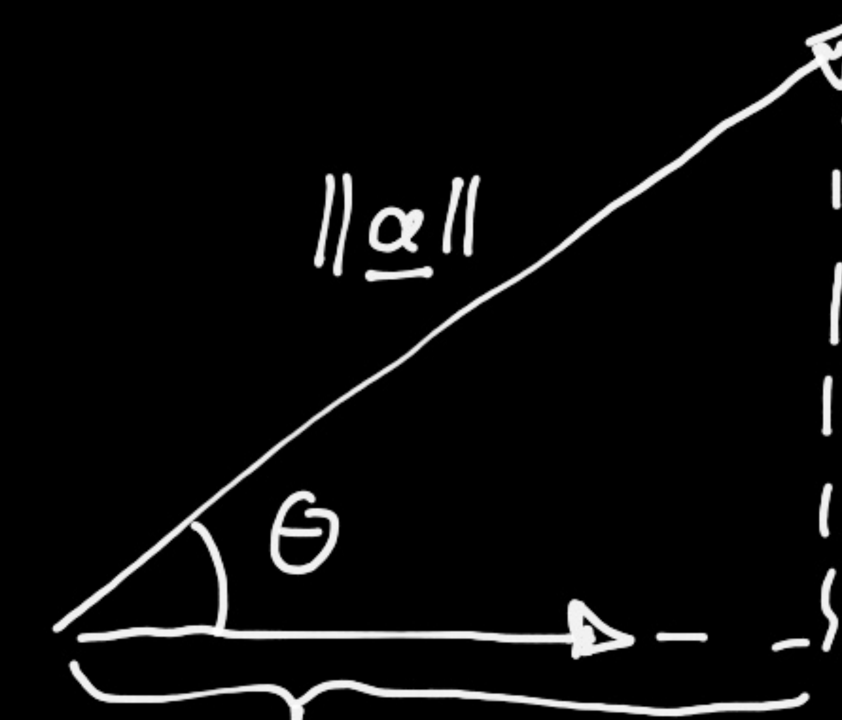
Also $B^{-1} = B^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = T.$

Bestimme den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ von der Ebene $x + y + z = 0$.

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle = 0$$ $\rightsquigarrow$ Menge der Vektoren, die auf $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ senkrecht stehen







$$\|\underline{a}\| \cdot \cos\theta = \frac{\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{n}\| \cdot \cos\theta}{\|\underline{n}\|} = \frac{\langle \underline{a} \mid \underline{n} \rangle}{\|\underline{n}\|}$$

Also: $$\text{Abstand} = \left| \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\|} \right| = \frac{1+2+3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Bestimme den Punkt der Ebene $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ mit minimalem Abstand zu $\underline{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren:

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Big/ \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\underline{b}}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = \tilde{\underline{b}}_2 / \|\tilde{\underline{b}}_2\| = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

Gesuchter Punkt: $\langle \underline{a} | \underline{b}_1 \rangle \cdot \underline{b}_1 + \langle \underline{a} | \underline{b}_2 \rangle \cdot \underline{b}_2$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\3/2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Bem. Abstand von $\underline{a}$ zur Ebene ist $\left\| \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}$.

Bestimme den Punkt der Ebene $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ mit minimalem Abstand zu $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bem: Abstand von $\underline{a}$ zur Ebene ist $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}$.

Proberechnung:

Normalenvektor $\underline{n}$ der Ebene:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \underline{n} \right\rangle = 0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \underline{n} \right\rangle, \text{ d.h. } \begin{aligned} n_1 + n_2 \phantom{{}+n_3} &= 0 \\ n_2 + n_3 &= 0 \end{aligned}$$

z.B. $\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

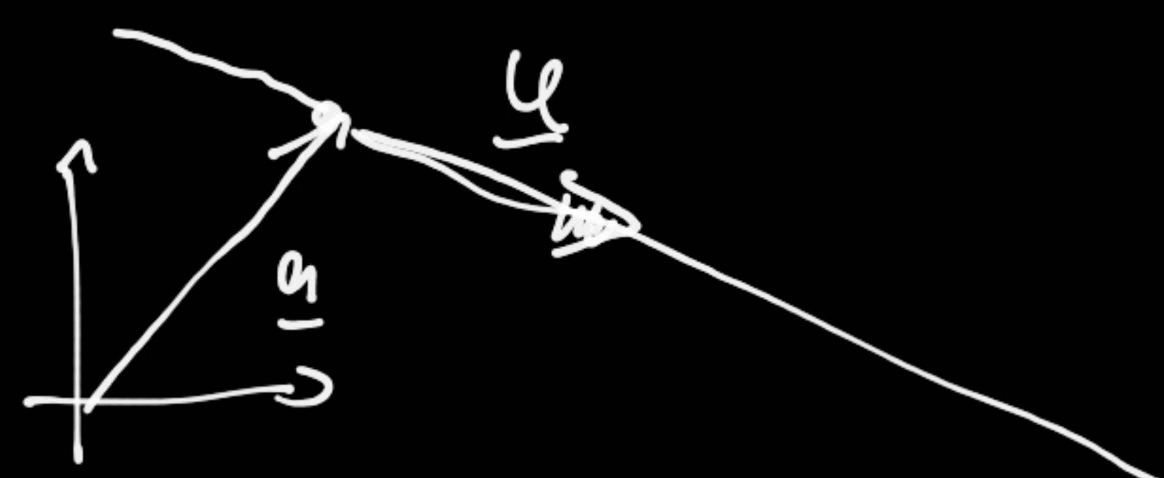
Abstand: $\langle \underline{a} | \underline{n} \rangle / \|\underline{n}\| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ✓

Etwas Geometrie:

Gerade im $\mathbb{R}^2$: $\alpha x + \beta y = \gamma$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

$$\left(\hat{=} \text{ Umformen: } \begin{array}{ll} x = \gamma/\alpha, & \text{falls } \beta = 0 \\ y = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\cdot x, & \text{falls } \beta \neq 0 \end{array} \right)$$

oder ("Parametrisierung"): $\underline{x} = \underset{\uparrow\ \text{Anker}}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\neq \binom{0}{0}}$ Richtungsvektor



"spezielle Lsg."

"allg. homogene Lsg."

Umrechnen: $\alpha x + \beta y = \gamma \rightsquigarrow \underline{x} = \underline{a} + t\,\underline{u}$

$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u}$ $\qquad t \cdot \underline{u} = \underline{x} - \underline{a}$

$\underline{n} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ senkrecht auf $\underline{u}$

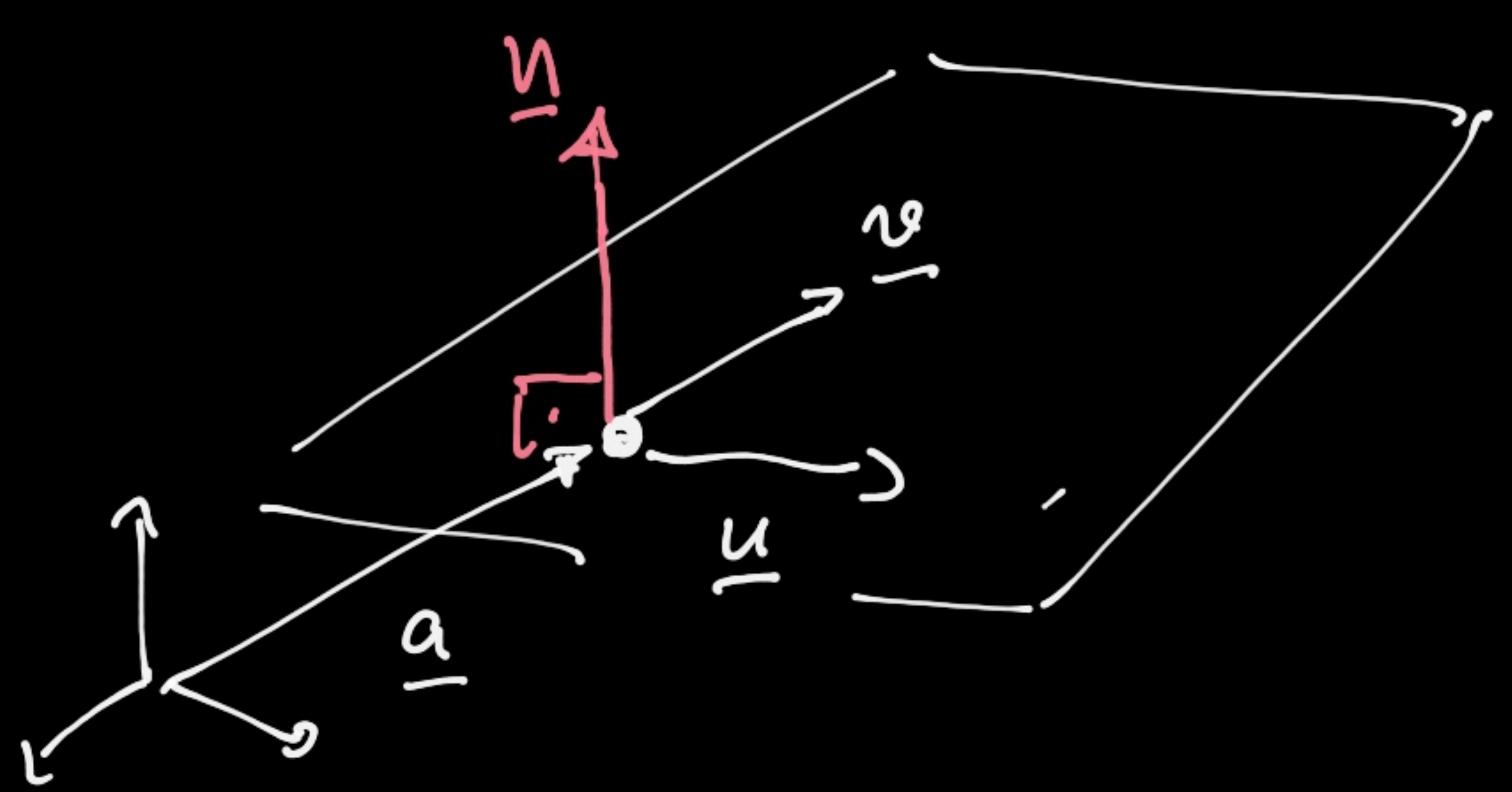
$\rightsquigarrow 0 = \langle \underline{n} \,|\, \underline{x} \rangle - \langle \underline{n} \,|\, \underline{a} \rangle$ bzw. $\langle \underline{n} \,|\, \underline{x} \rangle = \langle \underline{n} \,|\, \underline{a} \rangle$

Ebene in $\mathbb{R}^3$:

$\underline{x} = \underline{a} + r \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$, $r, s \in \mathbb{R}$

($\underline{u}, \underline{v}$ lin. unabh.)

oder $\langle \underline{n} \mid \underline{x} \rangle = \gamma$



Notiz:

$\langle \underline{n} \mid \underline{u} \rangle = 0$

$\langle \underline{u} \mid \underline{v} \rangle = 0$

$\langle \underline{n} \mid \underline{a} \rangle = \gamma$

1. Bsp

$$x + 2y - z = 8 \quad (*)$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 8$$

$\underline{u}, \underline{v}$ Basislösungen von $x + 2y - z = 0$

z.B. $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{a}$ spezielle Lösung, z.B. $\underline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{x} = \underline{a} + r \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$$

2. Bsp

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2u_1 + u_2 \quad &= 0 \\ u_2 - u_3 &= 0 \end{aligned}, \quad \text{z.B. } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{n}$$

$$\gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$$

$$x - y - z = -1$$

Schnitt der Ebenen aus den Bsp. per GLS

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 8 \\ x - y - z &= -1 \end{aligned}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Hausaufgabe LA 20 A:

(a) Vorgelegt ist die Ebene $\varepsilon: x - y + 2z = 0$ im $\mathbb{R}^3$ sowie der Punkt $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Bestimme den Fußpunkt des Lots von $\underline{a}$ auf ε sowie den Abstand von $\underline{a}$ zu ε.

(b) Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ an und berechne die Koordinaten von $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzgl. des so entstehenden Orthonormalbasis

(c) Die beiden Ebenen $x + 2y - z = 2$ und $3x + y + 2z = 4$ schneiden sich in der Geraden l. Stelle l in parametrisierter Form $\underline{x} = \underline{a} + t\,\underline{u}$ dar und bestimme den Schnittpunkt von l mit der Ebene $2x - 3z = 1$.