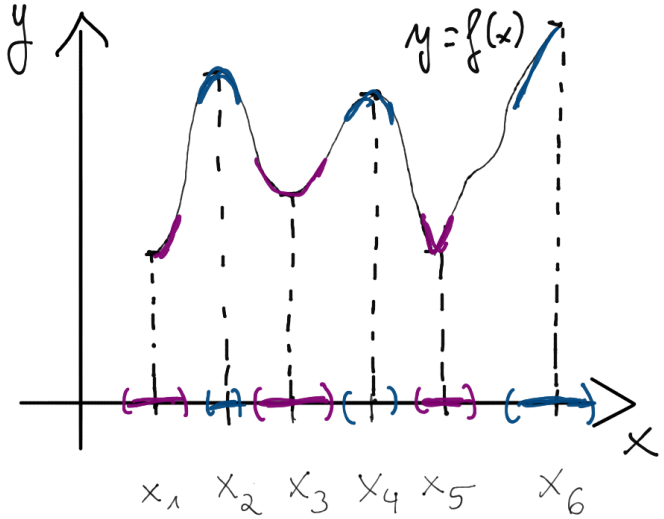
1.11 Maximum, Minimum, Supremum, Infimum



$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion

x_1 ist ein (globales) Minimum,
d.h. $f(x_1) \leq f(x)$ für alle $x \in D$.

Notiz: x_5 ist ebenfalls ein globales Minimum

x_6 ist ein (globales) Maximum
(also $f(x_6) \geq f(x)$ für alle $x \in D$.)

x_3 ist ein lokales Minimum,
d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass
$f(x_3) \leq f(x)$ für alle $x \in D \cap (x_3 - \delta, x_3 + \delta)$

Notiz: x_1 und x_5 ebenfalls lokale Minima

Genauso: x_2, x_4, x_6 sind lokale Maxima.

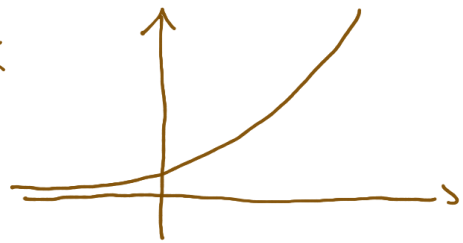
$M \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Menge

u heißt Maximum von M,
falls $\underline{u \in M}$ und $u \geq m$ für alle $m \in M$.

x_0 ist für f ein globales Maximum,
falls $f(x_0)$ das Maximum von $\{ f(x) \mid x \in D \}$ ist.

Analog mit "Minimum".

Bsp. $f(x) = 2^x$



$W = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = (0, \infty)$ hat weder Maximum noch Minimum

"0 ist das Infimum von W"

M nicht-leere Menge

$u_0 \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M, falls

- $u_0 \leq m$ für alle $m \in M$
- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in M$ mit $u_0 + \varepsilon > m$.

$M = (0, \infty)$

0 ist das Infimum von M

✓ $u_0 = 0 \leq m$ für alle $m \in (0,\infty)$

✓ $\varepsilon > 0$ vorgegeben

Setze $m = \frac{\varepsilon}{2} \in M = (0,\infty)$

Dann: $\varepsilon = 0 + \varepsilon > m = \frac{\varepsilon}{2}$

Ganz analog: v_0 heißt Supremum von M, falls

- $v_0 \geq m$ für alle $m \in M$
- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in M$ mit $m < u_0 - \varepsilon$

Bsp: $M = (0,1)$. $v_0 = 1$ ist das Supremum

Notizen

(1.) Ein Minimum ist auch ein Infimum.
–"– Maximum —— " —— Supremum

⚠ Umgekehrt gilt das nicht!

(2.) Minimum: $\min M$, z.B. $\min [3;42] = 3$
Maximum: $\max M$, z.B. $\max [3;42] = 42$
Infimum: $\inf M$, z.B. $\inf (3;42) = 3$
Supremum: $\sup M$, z.B. $\sup [3;42] = 42$

(3) Wir lassen $-\infty$ als Infimum (und ∞ als Supremum) zu.

z.B. $-\infty = \inf (-\infty;0)$
z.B. $+\infty = \sup (-3,\infty)$

(4.) Supremumsvollständigkeit der reellen Zahlen:

Jede nicht-leere Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Wo. 03 / S. 56

1.12 Satz vom Maximum und Minimum (M&M)

Vorgelegt ist eine stetige Funktion $f: [a;b] \to \mathbb{R}$

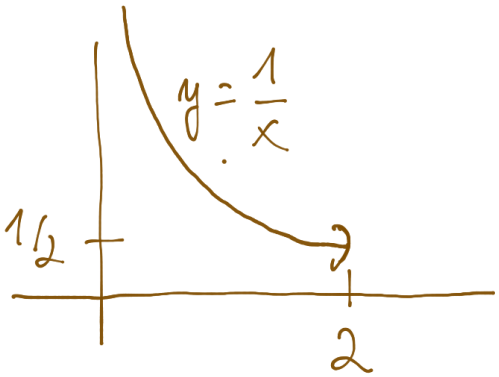
⚠ abgeschlossenes Intervall

Dann besitzt f ein Maximum und ein Minimum,

d.h. es gibt $u, v \in [a;b]$ (also $a \leq u, v \leq b$)

mit $f(u) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in [a;b]$

⚠ $f(x) = \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $(0;2)$ ist stetig



$\sup\{\frac{1}{x} \mid 0 < x < 2\} = \infty$: kein Maximum

$\inf\{\frac{1}{x} \mid 0 < x < 2\} = \frac{1}{2}$, kein Minimum

<u>Problem</u>. Bestimme den größten und den kleinsten Wert von $x^5 - 6x + 3$ für $0 \le x \le 2$.

Betrachte $f : [0;2] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^5 - 6x + 3$

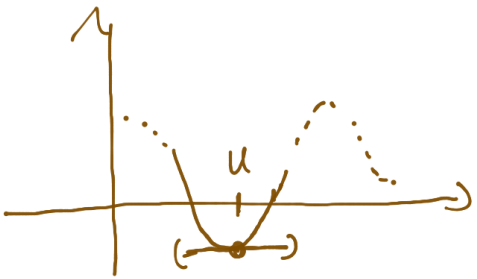
f ist stetig; $[0;2]$ ist ein abgeschlossenes Intervall.

Also (M&M): f nimmt Maximum und Minimum an.

Kandidaten:

- Randpunkte $x = 0$, $x = 2$
- $u \in (0;2)$ mit: u ist lokales Extremum

Minimum oder Maximum



u lokales Minimum,

d.h. $f(u+h) \ge f(u)$ für kleine h

bzw. $f(u+h) - f(u) \ge 0$ für kleine h.

Wo. 03/S. 58

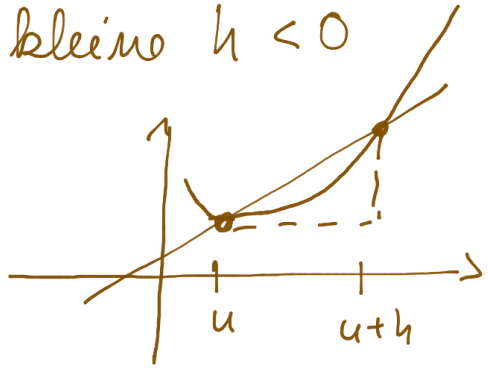
$f(x) = x^5 - 6x + 3$

Für ein lokales Minimum u gilt $f(u+h) - f(u) \geq 0$ f. kleine h.

Also: $\dfrac{f(u+h) - f(u)}{h} \geq 0$ für kleine $h > 0$

$\dfrac{f(u+h) - f(u)}{h} \leq 0$ für kleine $h < 0$

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h}}_{\text{"Tangentensteigung"}} = 0$$



$\dfrac{f(u+h) - f(u)}{h}$ Sekanten-steigung

$$\boxed{\text{Ist } u \text{ ein lokales Extremum, so gilt } [\, f'(u) = \,] \lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} = 0}$$

falls dieser Grenzwert existiert!

"Ableitung" von f in u

Wo. 03 / S. 59

Berechne $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(u+h) - f(u)}{h}$ $\quad (f(x) = x^5 - 6x + 3)$

$f(u) = u^5 - 6u + 3$

$f(u+h) = (u+h)^5 - 6 \cdot (u+h) + 3$

$= \underline{u^5} + 5u^4h + 10u^3h^2 + 10u^2h^3$
$\quad + 5uh^4 + h^5 \underline{- 6u} - 6h \underline{+ 3}$

$= f(u) + h \cdot (5u^4 + 10u^3h + 10u^2h^2$
$\quad + 5uh^3 + h^4 - 6)$

Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$(u+h)^5 = u^5 + 5u^4h + 10u^3h^2$
$\quad + 10u^2h^3 + 5uh^4 + h^5)$

Also: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(u+h) - f(u)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (5u^4 + 10u^3h + 10u^2h^2 + 5uh^3 + h^4 - 6)$

Polynom in h: stetig!

$= 5u^4 - 6$ (Grenzwert bilden durch Einsetzen von $h = 0$)

Zusammenfassung (bisher)

Ist $u \in (0;2)$ ein lokales Extremum von $f(x) = x^5 - 6x + 3$,

so gilt $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} = 5u^4 - 6 = 0$

bzw. $u^4 = 6/5$ bzw. $u = \sqrt[4]{6/5}$ oder $\underbrace{u = -\sqrt[4]{6/5}}_{\text{k.u.i.F.}\ :\ \notin (0;2)}$

Kandidaten für Maximum / Minimum:

- Randpunkte 0; 2
- "kritischer Punkt" $\sqrt[4]{6/5}$

$f(0) = 3$, $f(2) = 32 - 12 + 3 = 23$

$f(x) = x^5 - 6x + 3 = x \cdot (x^4 - 6) + 3$

$f(\sqrt[4]{6/5}) = \sqrt[4]{6/5} \cdot \left(\frac{6}{5} - 6\right) + 3 < 0$

$(f(1) = -2 < 0 \rightsquigarrow$ Minimalwert $< 0)$

Kandidaten $0,\ 2,\ \sqrt[4]{6/5}$

Werte: $3,\ 23,\ 3-\frac{24}{5}\sqrt[4]{6/5}$

$f(1)=-2$, also Minimalwert von f negativ: nur noch Kandidat $3-\frac{24}{5}\sqrt[4]{6/5}$ möglich

größter Wert unter den Kandidaten $\rightsquigarrow$ Maximum

<u>Fazit</u> $f(x)=x^5-6x+3$

besitzt in $x=2$ den Maximalwert $23=f(2)$

und in $x=\sqrt[4]{6/5}$ den Minimalwert $3-\frac{24}{5}\sqrt[4]{6/5}$

Also: $x=2$ globales Maximum

$x=\sqrt[4]{6/5}$ globales Minimum.

Hausaufgabe 03B:

Vorgelegt ist die Funktion $f: [0;5] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 1$$

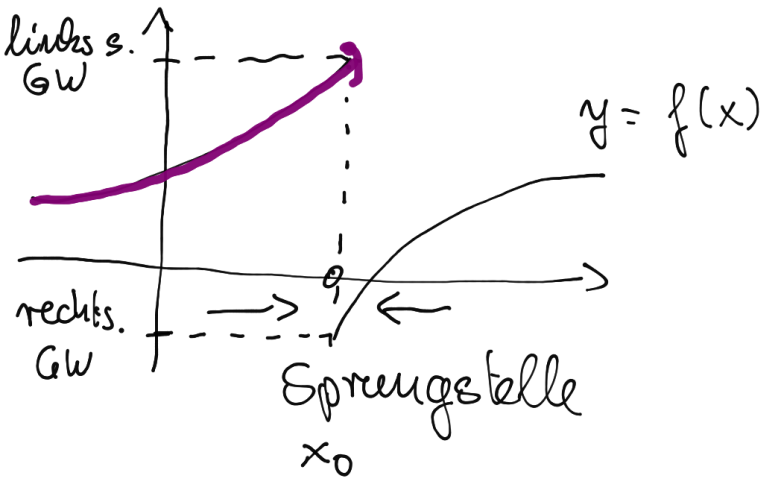
(a) Zeige, dass $f(x) = 0$ für mindestens ein $x \in [0;5]$ erfüllt ist.

(b) Gibt es Zahlen $x \in [0;5]$ mit $f(x) = 2$?

(c) Warum gibt es unter den Zahlen $x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ mit $0 \leq x \leq 5$ einen größten und einen kleinsten Wert?

Für welche $x \in [0;5]$ werden diese Werte angenommen?

1.13 Einseitige Grenzwerte



(a) Linksseitiger Grenzwert

Schreibe $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = L$,

falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit:

Für $x < x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) Rechtsseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0 +}$; geht völlig analog.

(c) x_0 heißt Sprungstelle von f, wenn sowohl $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ als auch $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ existieren, aber die beiden Werte verschieden sind.

(d) Aus $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = L = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ folgt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{|x+1|}$ (Defbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$)

Frage: Kann man $f(-1) = y_0$ so festlegen, dass die so "fortgesetzt" werden, dass diese neue Funktion wieder stetig ist?

Falls ja, so gilt $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = y_0$.

Dann gilt $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = y_0 = \lim\limits_{x \to -1+} f(x)$.

$$\lim_{x \to -1-} \frac{x^2 + x - 2}{|x+1|} \underset{\substack{\uparrow \\ x < -1 \rightsquigarrow x+1 < 0}}{=} \lim_{x \to -1-} \frac{(x+1)\cdot(x-2)}{-(x+1)} = \lim_{x \to -1-} -(x-2) = 3$$

$\}\neq$

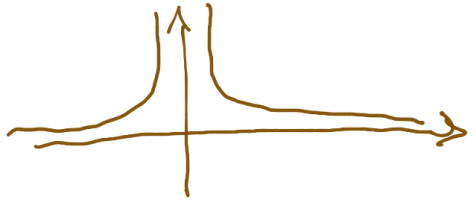
$$\lim_{x \to -1+} \frac{x^2 + x - 2}{|x+1|} = \lim_{x \to -1+} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \to -1+} x - 2 = -3$$

Es gibt also kein solches y_0 ↯

$x_0 = -1$ ist eine Sprungstelle von f.

1.14 Uneigentliche Grenzwerte und Verhalten bei $\pm\infty$.

Bsp $f(x) = \frac{1}{x^2}$



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Für eine Funktion f schreibe $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$,

falls: Zu jedem E gibt es ein $\delta > 0$ mit.

Ist $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, so folgt $f(x) > E$.

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$: Sei E vorgelegt (dabei darf $E>0$ annehmen)

Setze $\delta = 1/\sqrt{E}$

Betrachte $x \neq 0$, $|x - 0| < \delta$

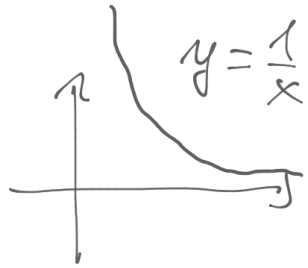
Dann gilt $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = E$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{E}} \geq \delta$

Ganz analog: $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \infty$, usw.

Schreibe $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L \ (\in \mathbb{R})$, falls:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es D mit:

Ist $x > D$, so gilt $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Ganz analog: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, etc.

<u>Bsp</u> $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Setze $D = 1/\sqrt{\varepsilon}$

Betrachte $x > D$.

$x^2 > D^2$; $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{D^2}$

Dann gilt:

$\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{D^2} = \varepsilon$ ✓

<u>Hausaufgabe 03C</u>: Berechne die folgenden Grenzwerte, falls diese existieren:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{1-x^2}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1}$

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x+1}$

(s. auch nächste Folie!)

(e*) $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$

1.15 Notiz

Sämtliche Grenzwertrechenregeln gelten auch für einseitige Grenzwerte, für $x \to \pm\infty$ und (mit etwas Vorsicht) für uneigentliche Grenzwerte.

Unsinnige Ausdrücke:

$\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, ...

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} (1+x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} (1+x) - x = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 - x = \infty$$

$$\text{"}\cancel{\infty - \infty = 1}\text{"}? \qquad \text{"}\cancel{\infty - \infty = \infty}\text{"}?$$

Also NICHT

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \frac{\lim_{x\to\infty} x^2}{\lim_{x\to\infty} x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{?}{=}$$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1}{3x^3 + 8x^2 + 10^{1000}}$

höchste Potenz im Zähler und Nenner ausklammern

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 \cdot \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(3 + \frac{8}{x} + \frac{10^{1000}}{x^3}\right)}$$

Kürzen

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{8}{x} + \frac{10^{1000}}{x^3}}$$

Grenzwertrechenregeln

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 + \frac{8}{x} + \frac{10^{1000}}{x^3}\right)}$$

etc.

$$= \frac{2 - 3 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 8 \cdot \left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)^2 + \left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)^3}{3 + 8 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 10^{1000} \left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)^3}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$= \frac{2}{3}$$

1.16 Verhalten rationaler Funktionen für $x \to \infty$

$$\boxed{a_n, b_m \neq 0}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} a_n / b_m & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } m > n \\ \infty & \text{für } n > m,\ \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{für } n < m,\ \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$$

$\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$ "rationale Funktion"

Bsp: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{10^{100} \cdot x + 10^{(10^{10})}}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5+8}{5x^5+9} = \frac{3}{5}$$