

Ingenieurmathematik I / Woche 1:

Wo 01 / S. 01

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen.

Beispiel:

- $M = \{1, a, u\}$ ist die Menge, die aus den Elementen 1, a und u besteht.

{ } : Mengenklammern

Schreibe $1 \in M$, lies "1 ist ein Element von M"
 $x \notin M$, lies "x ist kein Element von M"

- $\{2, 3, 5, 7, \dots\} = \{p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\} = P$
lies: "die Menge aller p für die gilt:
 $p \text{ ist eine Primzahl}"$
 $2 \in P, 7 \in P, 9 \notin P, 2,375 \notin P, \pi^2/6 \notin P$

Wichtige Beispiele:

Wo 01 | S.02

- $\mathbb{N} = \text{Menge der natürlichen Zahlen} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \text{Menge der ganzen Zahlen} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0 \right\}$
Menge der理或有理数.

Differenz von zwei Mengen M und N :

$$M \setminus N = \{m \mid m \in M \text{ und } m \notin N\}$$

" M ohne N " ($= \{m \in M \mid m \notin N\}$)

z.B. $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\}$

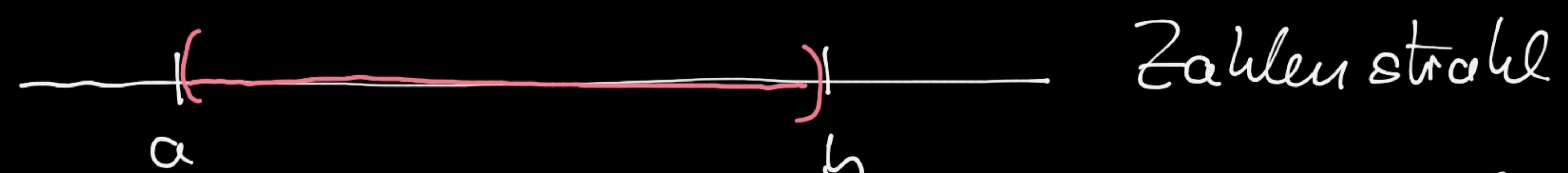
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

- $\mathbb{R} = \text{Menge der reellen Zahlen}$ (Dezimalzahlen)

- "Leere Menge" $\emptyset = \{\}$
enthält keine Elemente.
- Wichtig für Analysis : Intervalle

$$a, b \in \mathbb{R}$$

offenes Intervall : $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



abgeschlossenes Intervall : $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

halboffene Intervalle : $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
 $(a; b]$ analog

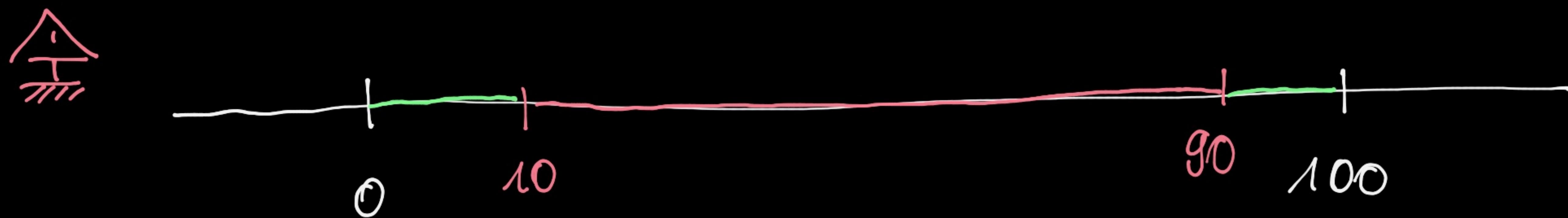
unbeschränktes Intervall : $[a; \infty)$, $(a; \infty)$; $(-\infty; b]$,
 $(-\infty; b)$, $(-\infty, \infty)$

z.B. $[a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Hausaufgabe 01 A :

$[0; 10] \setminus [5; 500]$ ist wieder ein Intervall.

Welches?



$[0, 100] \setminus [10, 90]$ ist kein Intervall.

Abbildungen:

Vorgelegt sind zwei Mengen D und W .

Eine Abbildung f von D in W ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y = f(x) \in W$ zu.

D : Definitionsbereich von f

W : Bildbereich / Wertemenge

$f(x)$: lies: f von x .

Schreibe . $f: D \rightarrow W$

meint: f ist eine Abbildung von D in W .

Beispiel:

- $q : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$; $q(x) = x^2$
 \uparrow Def. Bereich Wertemenge Functions declaration
 Funktionsname

$$q(5) = 5^2 = 25, \quad q(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 2, \dots$$

Python:

```
def q(x):
    return x^2
```

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

$$f(2) = 1; \quad f(\pi^2/6) = 1, \quad f(42) = 1, \\ f(-3589) = -1, \quad f(0) = 1.$$

"Funktionen" sind Abbildungen, deren Werte reelle Zahlen sind.

§ 1 : Grenzwerte von Funktionen

und Stetigkeit

- (i) Was ist ein Grenzwert?
- (ii) Wozu brauchen wir das später?
- (iii) Formale Definition
- (iv) Vereinfachungen und Erläuterungen

"limes" / Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = L \in \mathbb{R} : \text{Grenzwert von } f(x) = x^2 \text{ für } x \text{ gegen 2}$$

↓

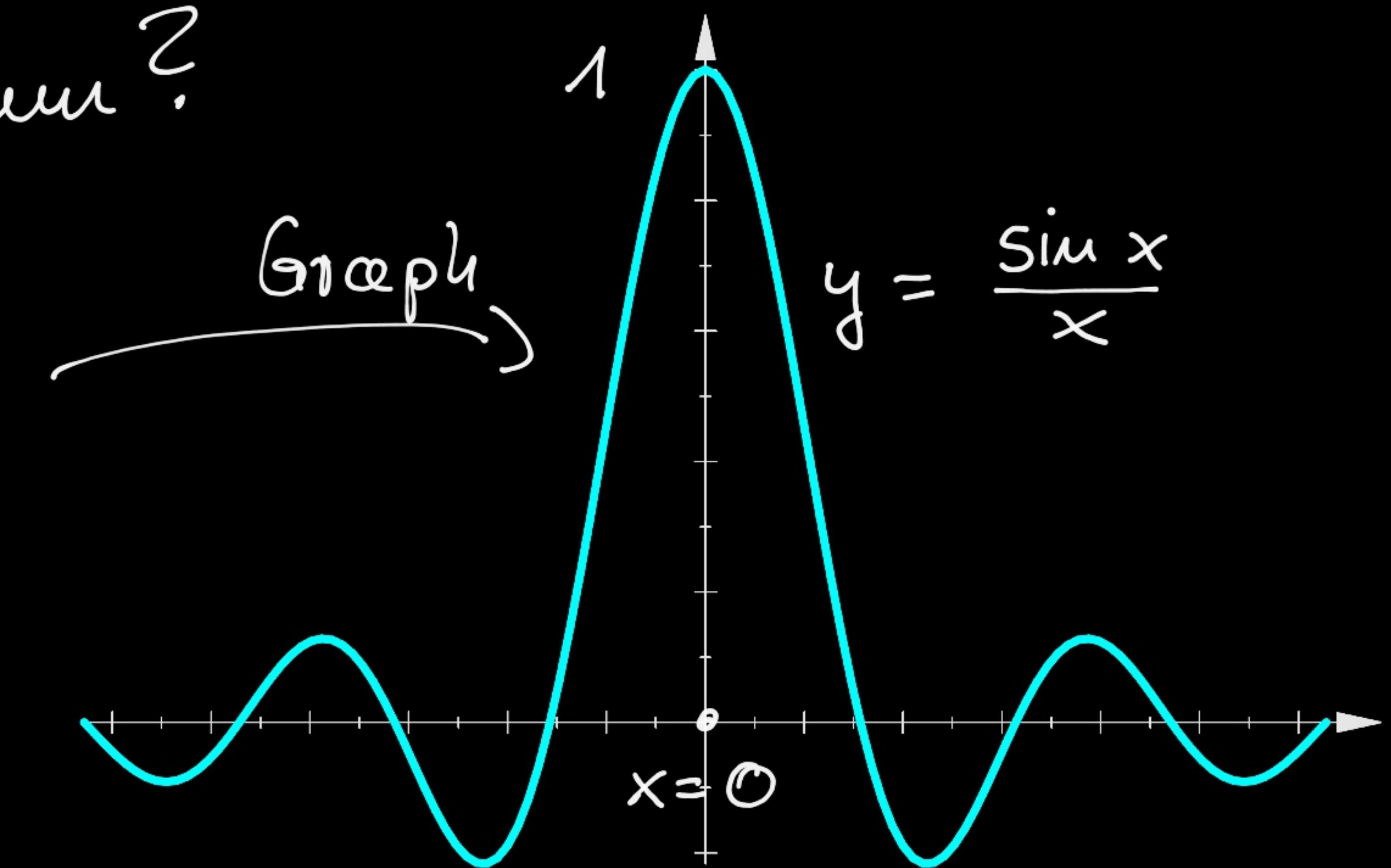
" x gegen 2" Funktion $f(x) = x^2$

Bedeutung: x^2 ist umgekehrt gleich 4, } $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$
wenn x dicht genug bei 2 liegt

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ aber warum?}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$



Einschub: $\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}}_{\text{Differenzenquotient}} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$

Kleine Übungen zwischen den Lernschritten:

Wo. 01/ 509

a. $\lim_{x \rightarrow 5} (2x - 9) = 1$

b. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$
 $= x$

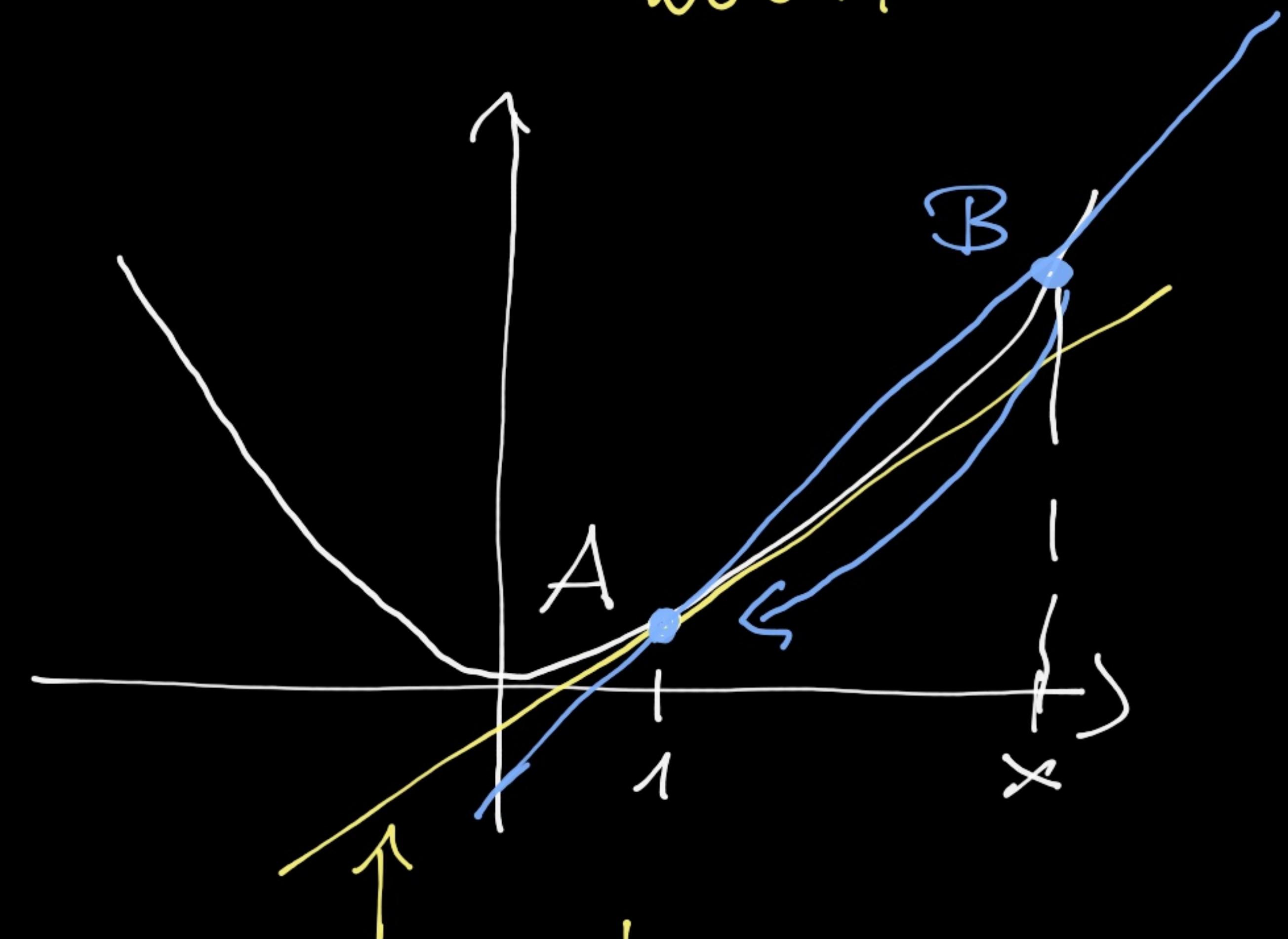
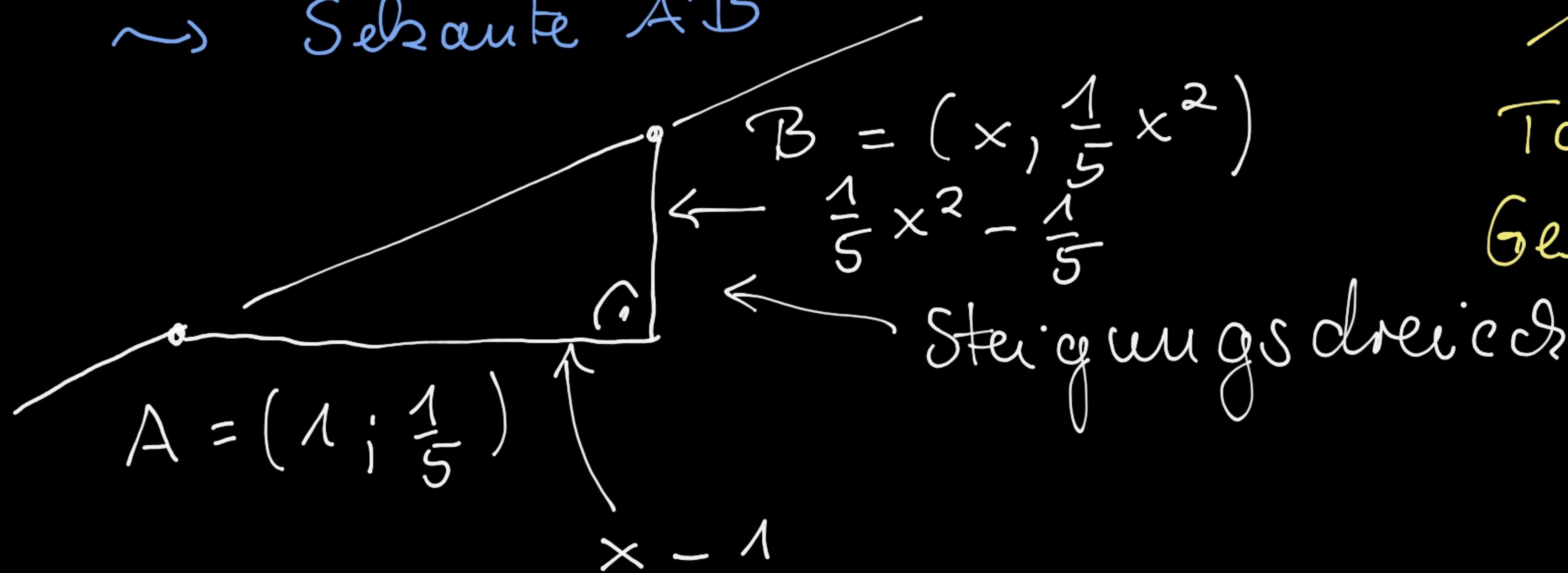
Wozu die Mühe?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{1}{5}x^2$$

$$A: (1; \frac{1}{5})$$

$$B = (x; \frac{1}{5}x^2); \quad x \neq 1$$

→ Sekante AB



Tangentensteigung

Gesucht: Tangentensteigung

Sekantensteigung:

$$\frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}}{x - 1}$$

Tangentensteigung:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{5}(x+1) = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Teilmenge N einer Menge M :

Wo 11 S.11

Jedes Element von N liegt auch im M .

Schreibe: $N \subseteq M$

ε : "epsilon"

δ : "delta"

1.1 Definition (Grenzwert)

Vorgelegt sind Teilmengen $D, W \subseteq \mathbb{R}$

sowie ein Funktion $f: D \rightarrow W$.

Außerdem sei x_0 eine reelle Zahl. $\leftarrow x_0$ muss beim Element von D

Dann heißt f Konvergent für x gegen x_0 , \leftarrow sieh \square

wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gilt mit:

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn $x \in D, x \neq x_0$, die Ungleichung $|x - x_0| < \delta$

erfüllt, dann gilt auch $|f(x) - L| < \varepsilon$.

In diesem Fall heißt L der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 ; schreibe: $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Diese Definition wollen wir verstehen

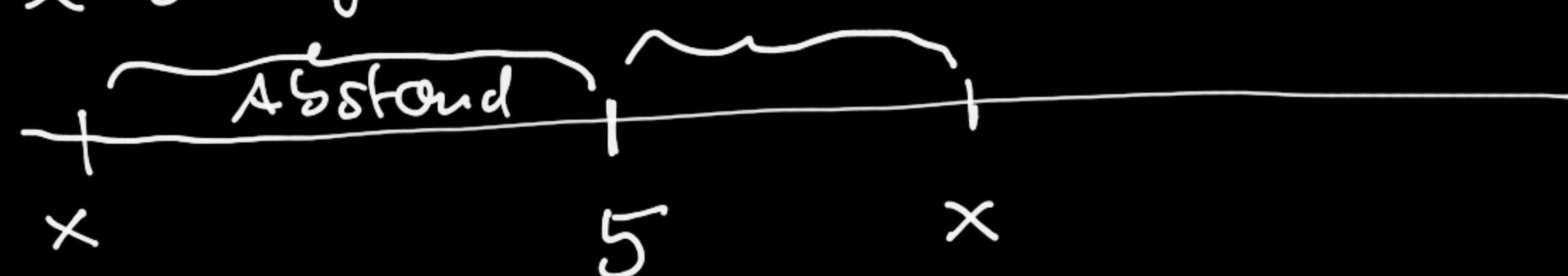
W01/S.12

- $|x - x_0| < \delta$

Bilde für $x_0 = 5$ und $\delta = \frac{1}{2}$ die Menge

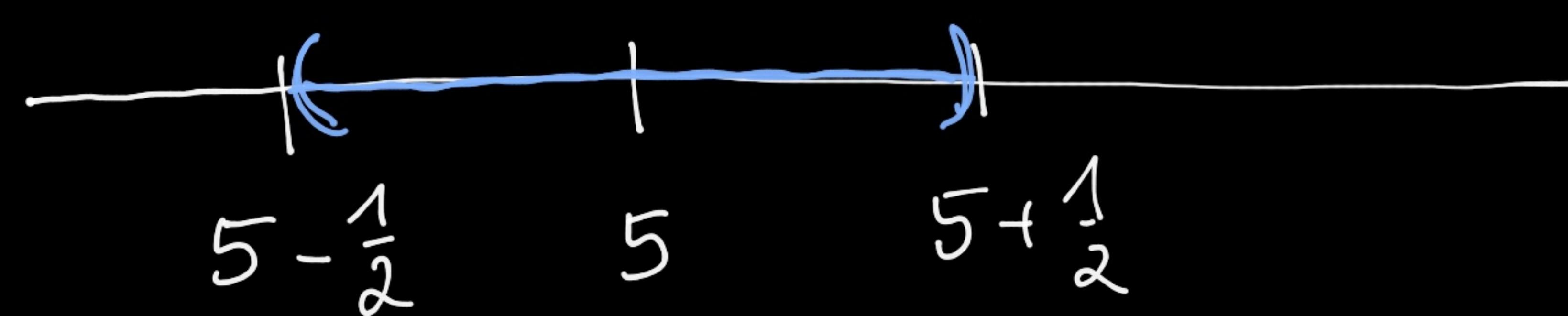
$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < \frac{1}{2}\}$$

$x - 5$ negativer Abstand



$|x - 5| = \text{Abstand von } x \text{ zu } 5$

$|x - 5| < \frac{1}{2}$ bedeutet: Der Abstand von x zu $x_0 = 5$ beträgt weniger als $\delta = \frac{1}{2}$



$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < \frac{1}{2}\} \\ = \left(5 - \frac{1}{2}; 5 + \frac{1}{2}\right) = (4.5; 5.5) \end{aligned}$$

Allgemein: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

Beispiel : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x_0=5}} \underbrace{(2x-9)}_{f(x)=2x-9} = \underline{1}$

Wo O1 | S. 13

Was sind $f(x)$, x_0 , L aus der Definition ??

Definition (1.1)

Zu jedem $\varepsilon > 0$
gibt es ein $\delta > 0$

mit:

ist $x \in D$, $x \neq x_0$,
 $|x - x_0| < \delta$,

so gilt

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Hier :

zu jedem $\varepsilon > 0$

gibt es ein $\delta > 0$ ←

mit :

ist $x \neq 5$,
 $|x - 5| < \delta$

so gilt

$$|(2x-9) - 1| < \varepsilon$$

bzw.

$$|2x - 10| < \varepsilon$$

Vorgegebener Maximal-
abstand für $|f(x) - L|$

Zu findende Fehler-
schwelle für x .

} Betrachte nur x ; $x \neq 5$,
die "ausreichend nahe"
an $x_0 = 5$ liegen

} Für solche x gilt
automatisch
 $|f(x) - L| < \varepsilon$, d.h.,
 $f(x)$ heißt "sehr nahe"
an Grenzwert L .

Beispiel : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x_0=5}} \underbrace{f(x)}_{f(x) = 2x - 9} = \underline{1}$

Wo 011 S. 14

Was sind $f(x)$, x_0 , L aus der Definition ??

Definition (1.1)

Zu jedem $\varepsilon > 0$
gibt es ein $\delta > 0$
mit:

ist $x \in D$, $x \neq x_0$,

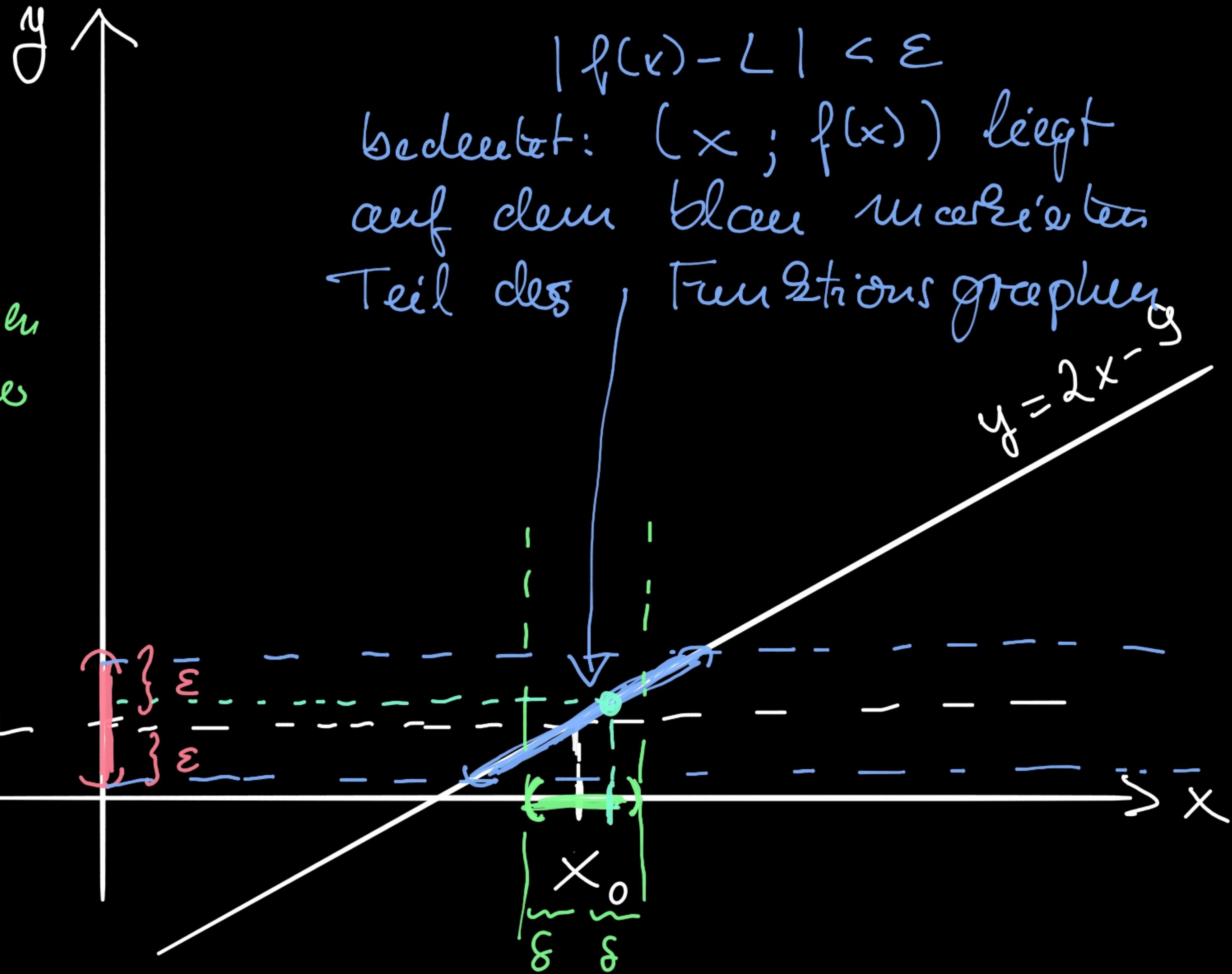
$$|x - x_0| < \delta,$$

so gilt

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$f(x)$ liegt
im roten Bereich

Graphisch



Beispiel : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x_0=5}} \underbrace{(2x - 9)}_{f(x) = 2x - 9} = \underline{1}$ Wo O1/S.15

Was sind $f(x)$, x_0 , L aus der Definition ??

Definition (1.1)

Zu jedem $\varepsilon > 0$
gibt es ein $\delta > 0$

mit:

ist $x \in D$, $x \neq x_0$,
 $|x - x_0| < \delta$,

so gilt

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Hier :

Zu jedem $\varepsilon > 0$
gibt es ein $\delta > 0$
mit :

ist $x \neq 5$,
 $|x - 5| < \delta$

so gilt

$$|(2x - 9) - 1| < \varepsilon$$

bzw.

$$|2x - 10| < \varepsilon$$

Zu tun :

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

$$\text{Setze } \delta = \varepsilon/2$$

Betrachte ein $x \neq x_0 = 5$
mit $|x - 5| < \delta$.

Dann gilt :

$$|f(x) - L| = |(2x - 9) - 1|$$

$$= |2x - 10| = 2 \cdot |x - 5|$$

$$< 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Von,

Hausaufgabe 01B:

Rate den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2} |3x + 4|$.

Weise dann nach, dass dies tatsächlich der richtige Grenzwert ist.

Verwende hierzu (ausschließlich) Definition 1.1 D

Welches δ muss man für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ wählen?

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}, f(x) = x^2, \\ x_0 = 2, L = 4$$

Wo 01/ S. 17

Def. 1.1

Zu jedem $\varepsilon > 0$

gibt es ein $\delta > 0$

mit:

Ist $x \in \mathcal{D}, x \neq x_0,$

$$|x - x_0| < \delta,$$

so gilt

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Setze $\delta = \dots$

Betrachte $x \neq 2, |x - 2| < \delta.$

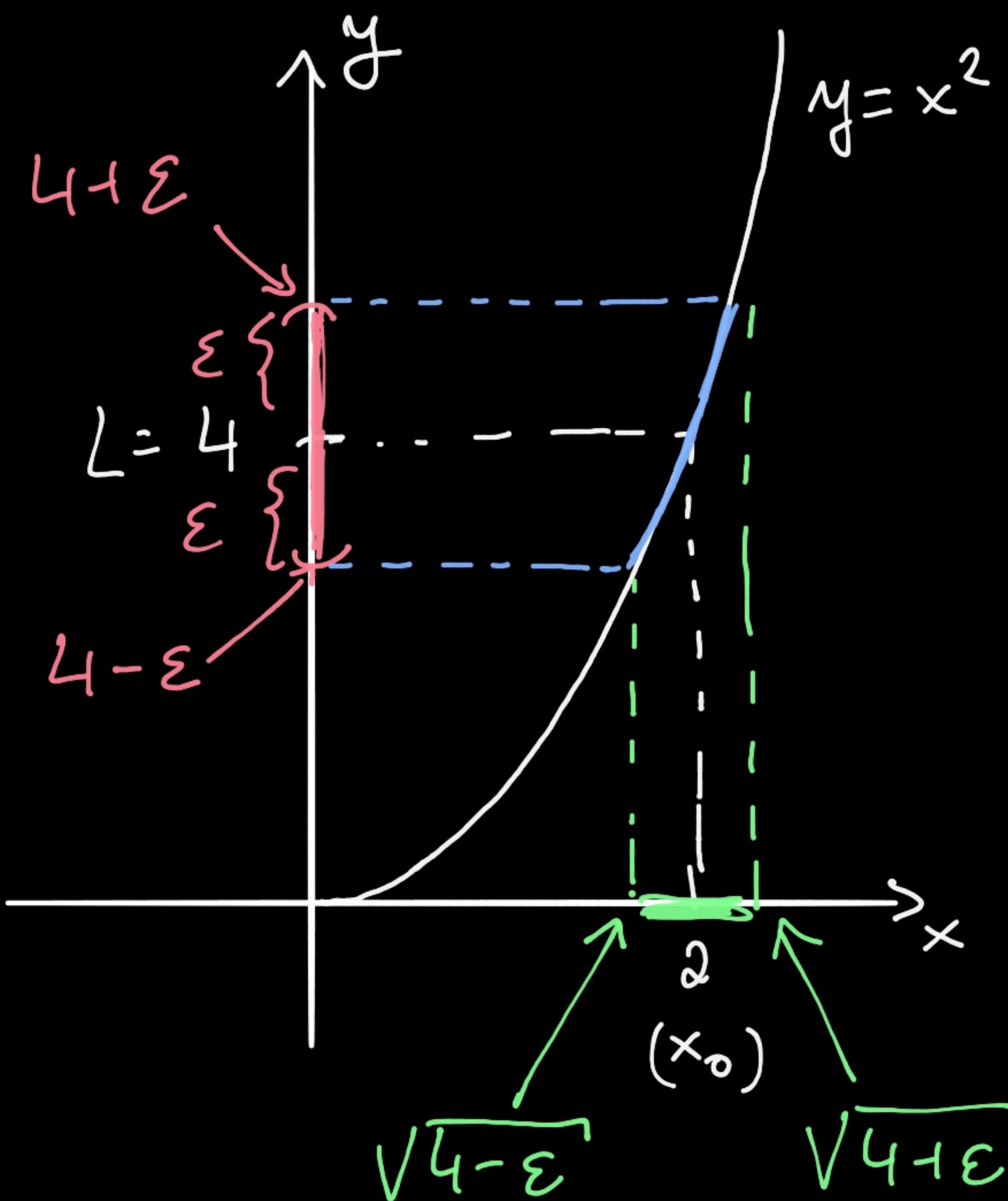
Dann gilt

$$|x^2 - 4| \leq \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

("graphisches" Verfahren)

Wo. 01 | S. 18



$$\boxed{\varepsilon \leq 4}$$

Sei x aus dem grünen Bereich.
Dann liegt $(x; f(x))$ auf dem
blauen Bereich des Funktionsgraphen.

Dann ist $f(x)$ aus dem roten Bereich,
d.h. $|f(x) - 4| < \varepsilon$

Grüner Bereich: $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$

$$\delta = \min \left\{ \sqrt{4-\varepsilon} - 2, 2 - \sqrt{4-\varepsilon} \right\}$$

A horizontal number line with points $\sqrt{4-\varepsilon}$, 2 , and $\sqrt{4+\varepsilon}$ marked. The distance from $\sqrt{4-\varepsilon}$ to 2 is labeled δ . The distance from 2 to $\sqrt{4+\varepsilon}$ is also labeled δ .

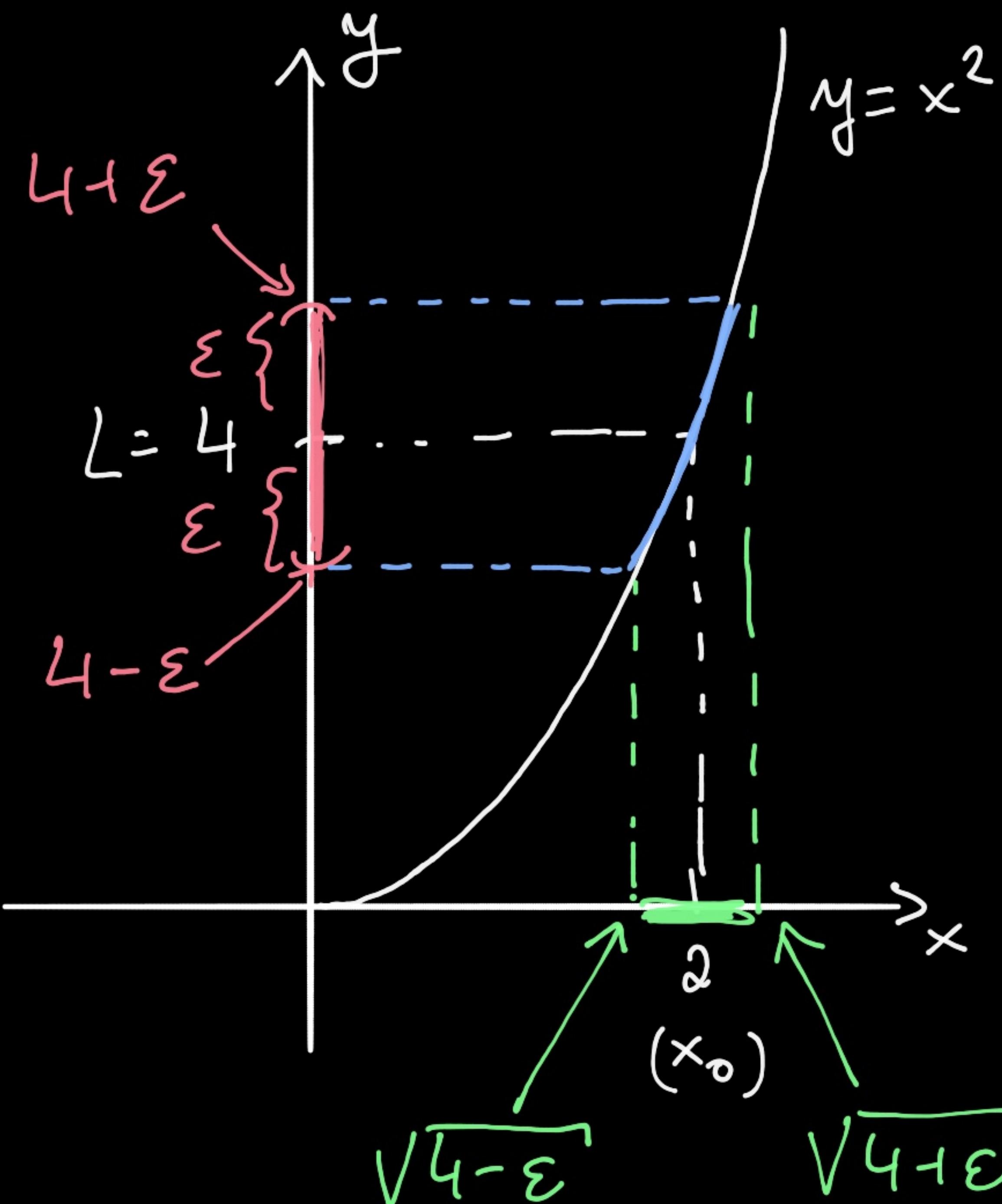
$(2-\delta, 2+\delta)$ liegt ganz im grünen Bereich.

Also: $|x-2| < \delta$ bedeutet: x aus dem grünen Bereich,
d.h. $f(x) = x^2$ aus dem roten Bereich, d.h. $|x^2-4| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

("graphisches" Verfahren)

Wo. 01 | S. 19



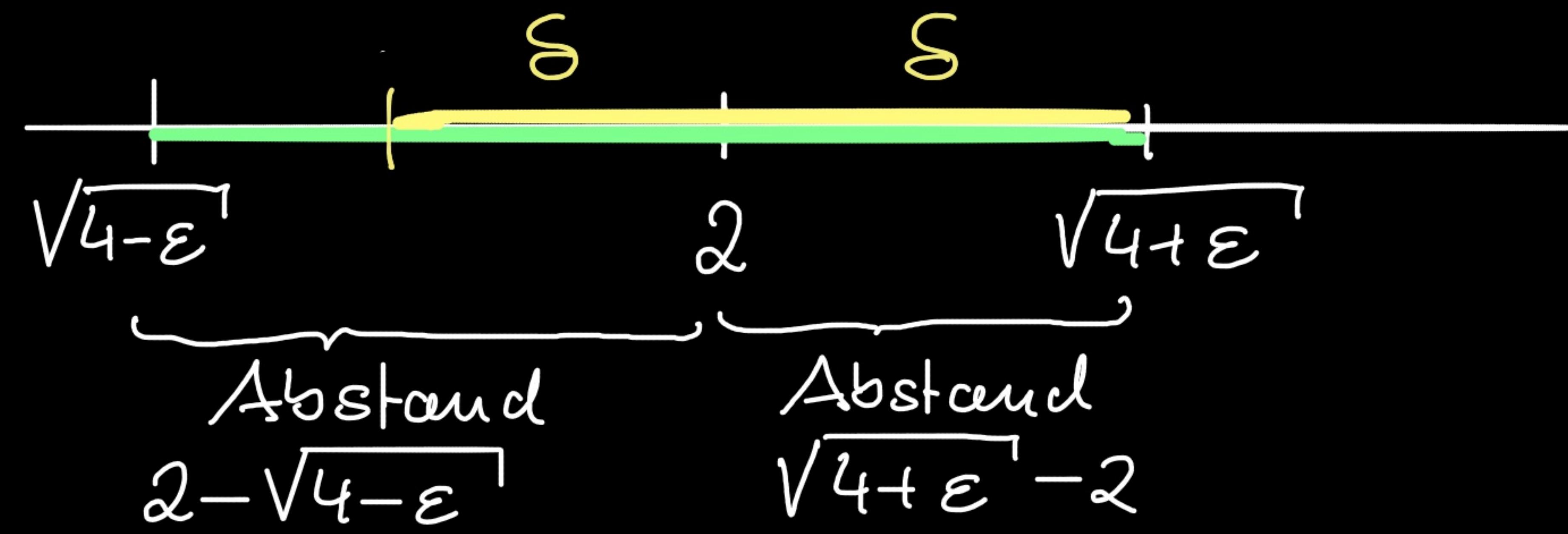
$$\boxed{\varepsilon \leq 4}$$



Lösung dieses Problems:

Ist $|x - 2| < \delta$, so gilt $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Gilt $|x^2 - 4| < \varepsilon = 2$ für alle x , $|x-2| < \delta$, so gilt $|x^2 - 4| < \varepsilon$ für alle x , $|x-2| < \delta$ erst recht für alle $\varepsilon \geq 2$



$$\delta = \min \left\{ \sqrt{4+\varepsilon} - 2 ; 2 - \sqrt{4-\varepsilon} \right\}$$

Jedes gelbe x ist grün
und liefert ein rotes $f(x)$,
d.h.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}, f(x) = x^2, \\ x_0 = 2, L = 4$$

Wo 01/ S. 20

Def. 1.1

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

Ist $x \in \mathcal{D}$, $x \neq x_0$,

$$|x - x_0| < \delta,$$

so gilt
 $|f(x) - L| < \varepsilon.$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Wir dürfen $\varepsilon \leq 4$ voraussetzen.

$$\text{Setze } \delta = \min \left\{ \sqrt{4+\varepsilon} - 2, 2 - \sqrt{4-\varepsilon} \right\} > 0$$

Betrachte $x \neq 2$, $|x - 2| < \delta$.

Dann gilt:

$$\underbrace{2 - (2 - \sqrt{4-\varepsilon})}_{\sqrt{4-\varepsilon}} \leq 2 - \delta < x < 2 + \delta \leq \underbrace{2 + \sqrt{4+\varepsilon} - 2}_{= \sqrt{4+\varepsilon}}$$

$$\text{Aus } 0 \leq \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$$

folgt durch Quadrieren (monoton wachsend auf $[0, \infty)$)

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$$

$$\text{d.h. } |x^2 - 4| < \varepsilon$$

1.2 Notizen:

Wo. 01/5.21

(a) Im Nachweis für $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ darf man $\varepsilon \leq S$ für eine (gewählte) Schranke $S > 0$ voraussetzen.

Schreibe: Wir dürfen $\varepsilon \leq S$ voraussetzen.

(b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ gilt genau dann, wenn:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Zahlen $a < x_0 < b$

mit: Ist $x \in D$, $x \neq x_0$, $x \in (a; b)$,

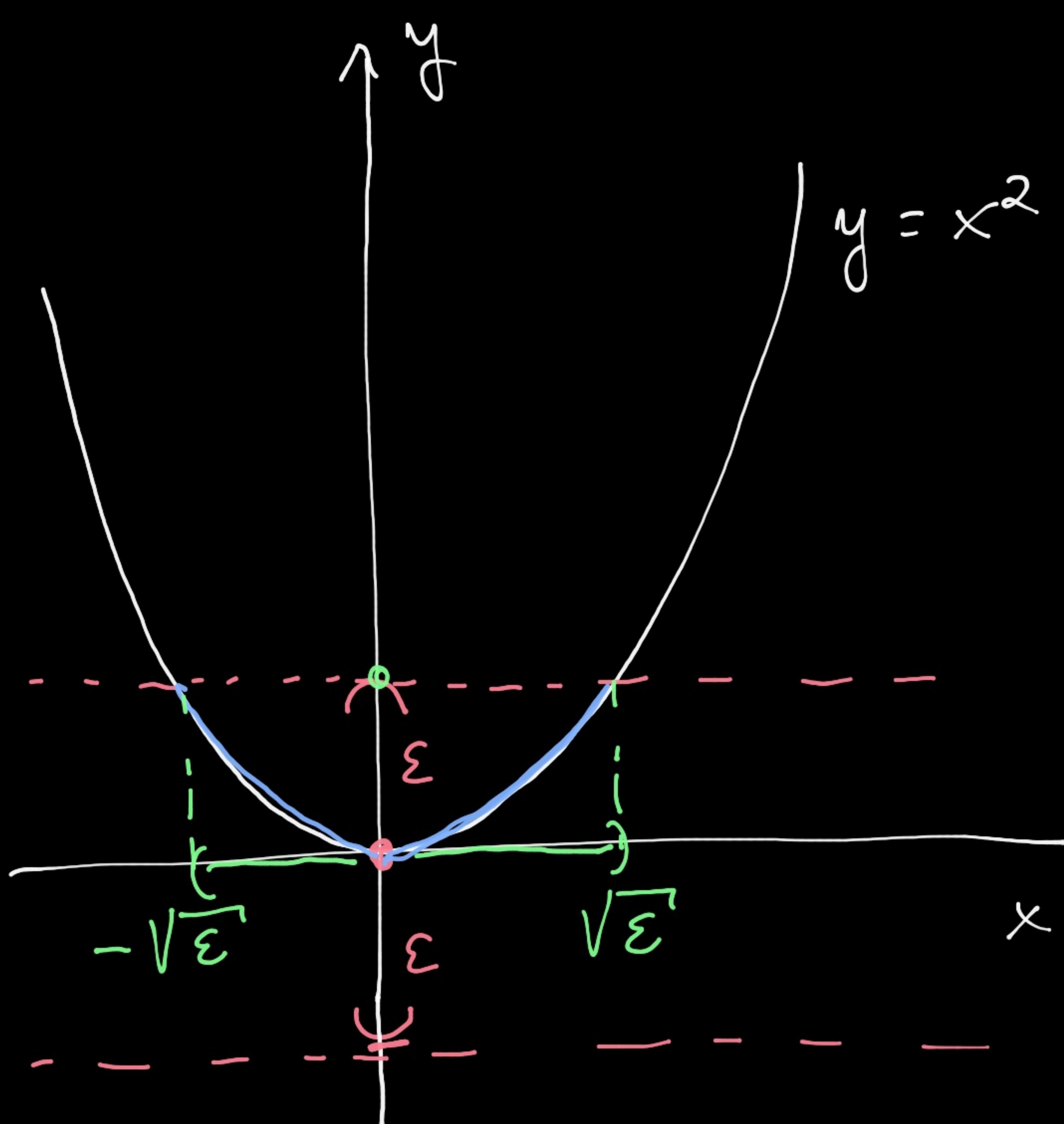
so gilt $|f(x) - L| < \varepsilon$. ↑

in der Originaldef.

$$a = x_0 - \delta, \quad b = x_0 + \delta$$

Beispiel : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Wo 01 | S. 22



Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben.

Setze $\delta = \sqrt{\epsilon}$

Betrachte $x \neq 0$, $|x - 0| < \delta$.

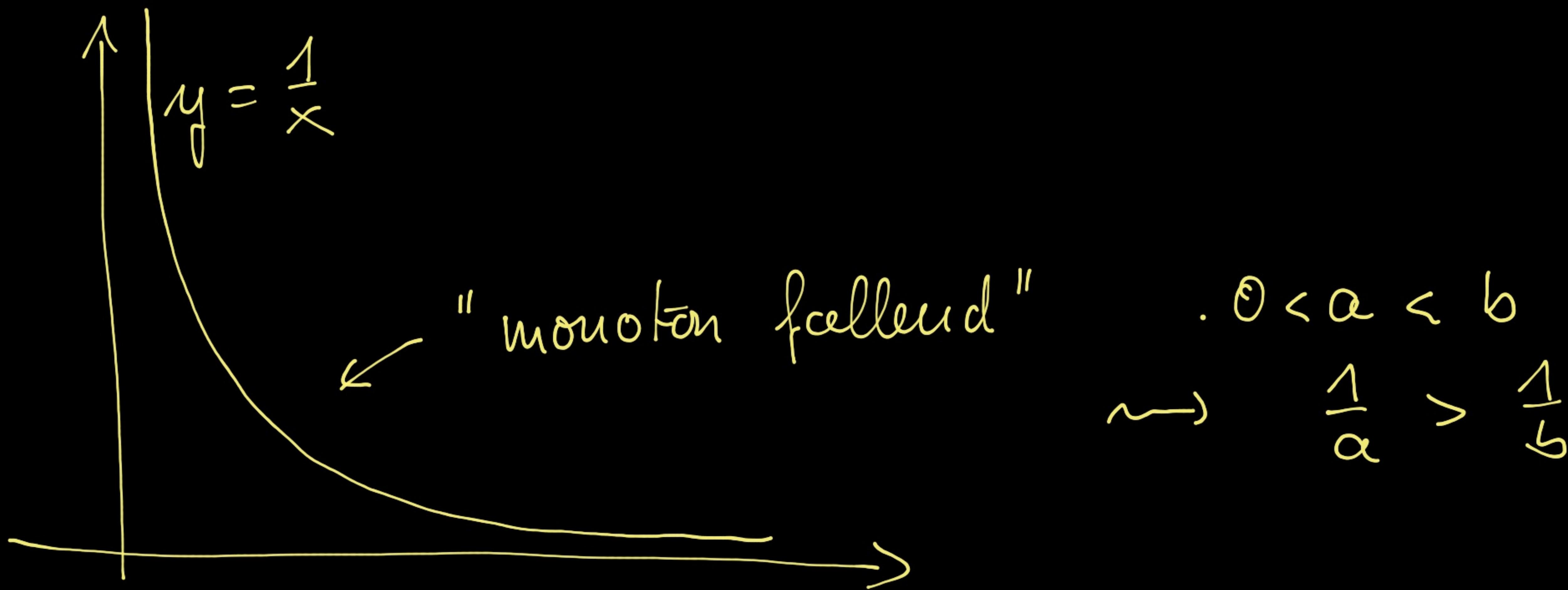
Dann gilt:

$$|x^2 - 0| = x^2 < \delta^2 = \epsilon.$$

Hausaufgabe 01 C:

Rate den Wert von $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x}$

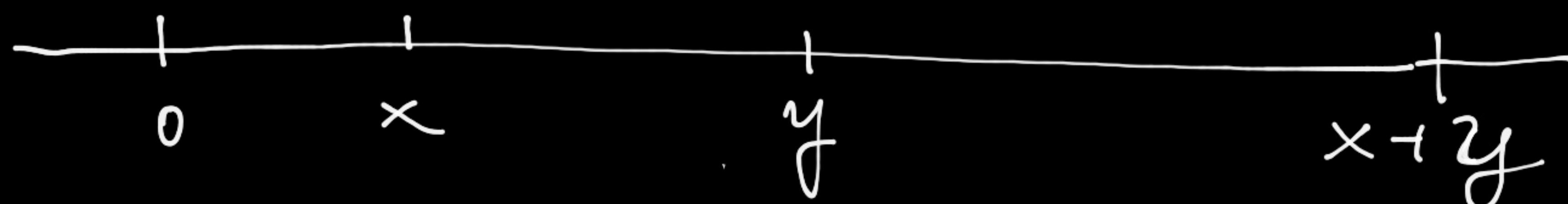
und weise nach, dass dies der richtige Wert ist.



1.3 Die Dreiecksungleichung

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Demo:



$$\begin{aligned} |x+y| &= x+y \\ &= |x| + |y| \quad \checkmark \end{aligned}$$

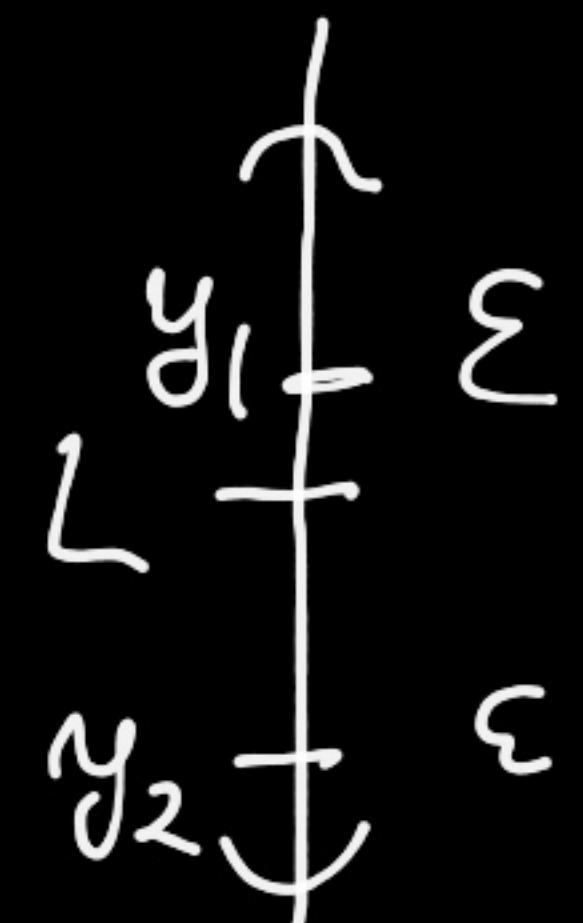
$$\begin{array}{ccccccccc} \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ x & 0 & x+y & |x| & y = |y| & |x+y| & |x+y| & = x+y \\ & & & & & & & \leq |x| + |y| & \end{array}$$

⋮

✓

1.4 Folgerung:

Gilt $|y_1 - L| < \varepsilon$ und $|y_2 - L| < \varepsilon$,



so gilt $|y_1 - y_2| \leq |y_1 - L + L - y_2|$

$$\leq |y_1 - L| + |L - y_2| = |y_1 - L| + |y_2 - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

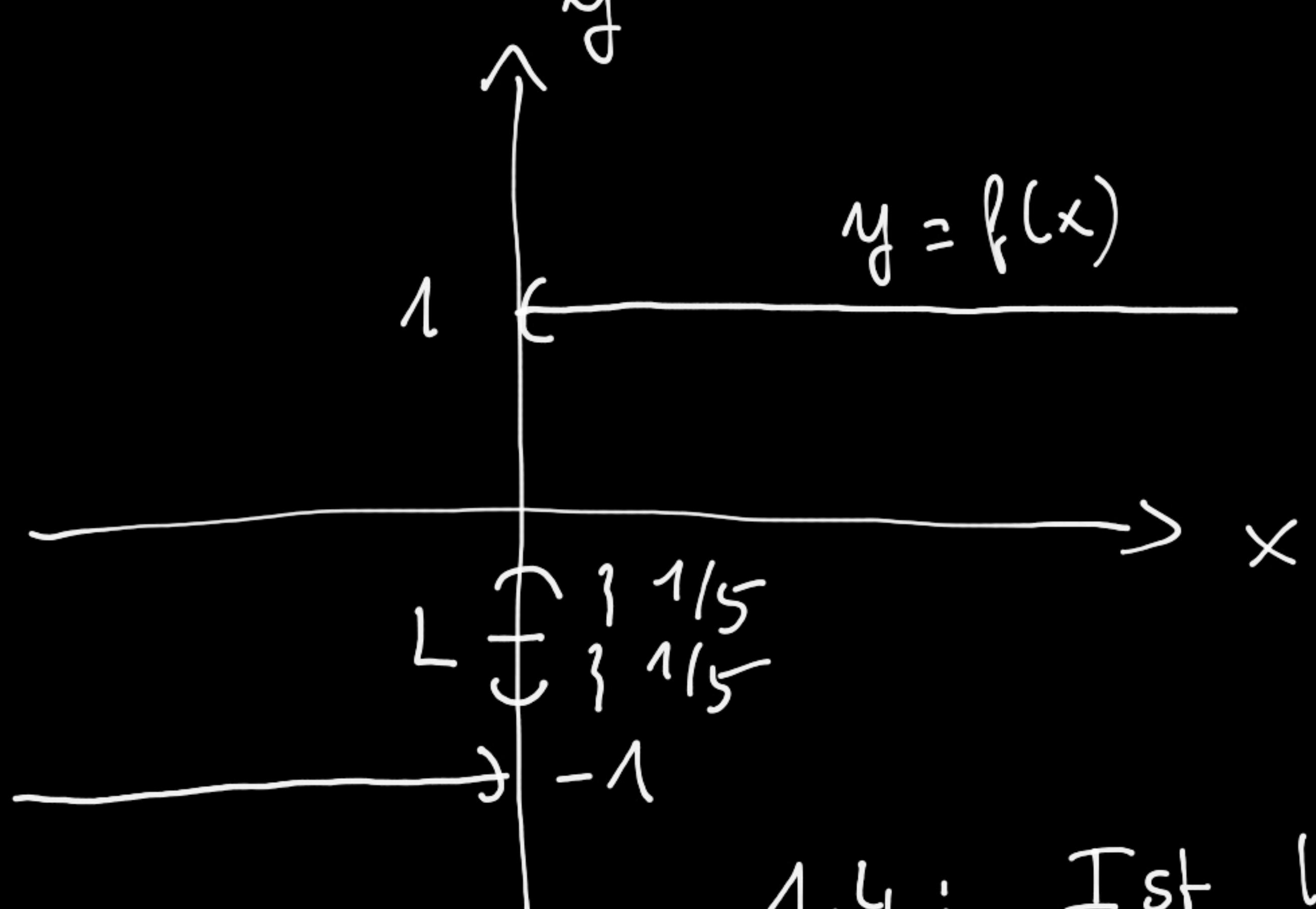
Beispiel: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{|x|}{x}$

W001/S.25

Bek.: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ gilt es nicht,

d.h.: f ist für $x \rightarrow 0$ nicht konvergent
synonym: divergent

Dazu: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{f. } x > 0 \\ -1 & \text{f. } x < 0 \end{cases}$



Wäre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$,

so gäbe es zu $\varepsilon = \frac{1}{5}$
ein $\delta > 0$ mit:

Ist $x \neq 0$, $|x-0| < \delta$,
so gilt $|f(x) - L| < \varepsilon = \frac{1}{5}$

1.4: Ist $|x_1|, |x_2| < \delta$, so gilt $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{2}{5}$

Aber: $x_1 = \frac{\delta}{2}, x_2 = -\frac{\delta}{2}$ erfüllen die Voraussetzung,

aber $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$ und $|f(x_1) - f(x_2)| = 2 \not< \frac{2}{5}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{umgekehrt gleich}$$

bedeutet: Ist $x \neq 0$, $x \approx 0$, so ist $\frac{\sin x}{x} \approx 1$

genauer: Zu vorgebener Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ (für y-Werte) gibt es eine Fehlerschranke $\delta > 0$ (für x-Werte)

mit:

Ist $x \neq 0$, $|x - 0| < \delta$ (Spez. von " $x \approx 0$ ")

so gilt $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$ (Spez. von " $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ ")

S. 27 entfällt...

Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Ist $x \approx x_0$, so ist $f(x) \approx L$.

Genauer: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

Ist $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, so ist $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bsp: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$

Denn, Sei $\varepsilon > 0$ vor. Setze $\delta = \varepsilon/2$

Betrachte $x \neq 1$, $|x - 1| < \delta$.

$$\text{Dann gilt: } |(2x + 3) - 5| = |2x - 2| = 2 \cdot |x - 1|$$

$$\stackrel{\text{Vor.}}{<} 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \checkmark$$

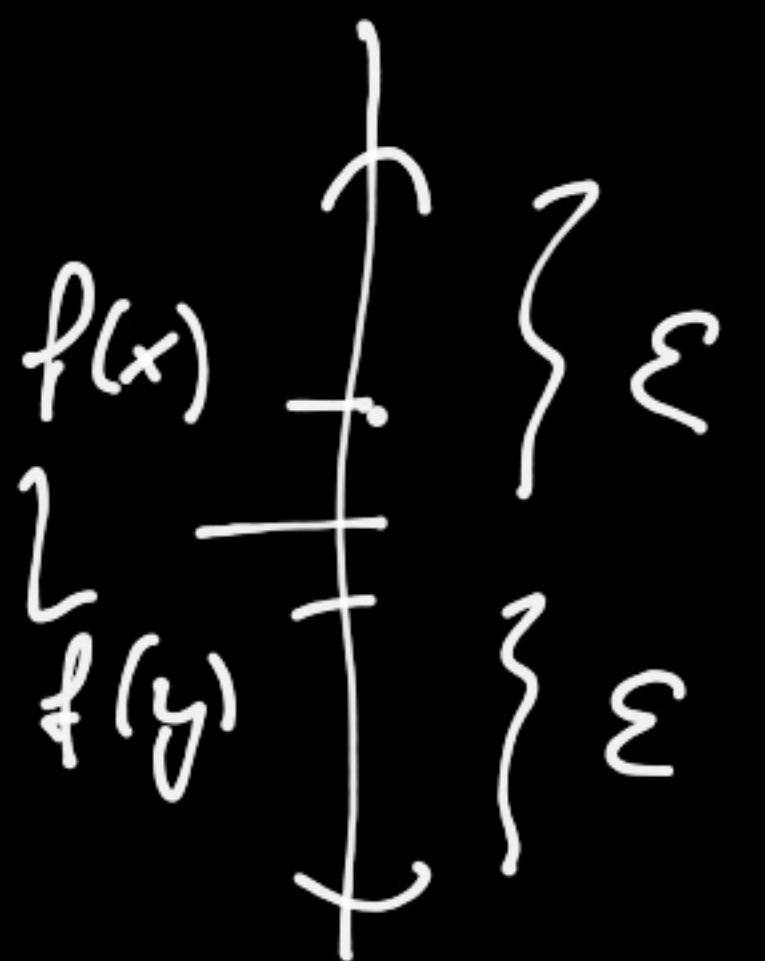
Bsp: $f(x) = \begin{cases} 42 & \text{für } x \geq 4 \\ 5 & \text{für } x < 4 \end{cases}$. Dann gibt es $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ nicht.

Nutze (1.4): Wäre $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, dann gäbe zu $\varepsilon = 5$

ein $\delta > 0$ mit: Ist $x \neq 4$, $|x - 4| < \delta$, so ist $|f(x) - L| < \varepsilon$

1.4: Ist $x, y \neq 4$, $|x - 4|, |y - 4| < \delta$, so gilt $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon = 10$.

Aber für $x = 4 - \frac{\delta}{2}$, $y = 4 + \frac{\delta}{2}$ ist $|f(x) - f(y)| = |5 - 42| = 37 \not< 2\varepsilon = 10$



1.5 Definition (Stetigkeit)

Vorgelegt: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

Dann heißt f stetig in x_0 , falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

d.h. \nearrow der Grenzwert existiert
und stimmt $f(x_0)$ überein

f heißt stetig (auf D), falls f in jedem $x_0 \in D$
stetig ist.

Notiz: Stetigkeit / Unstetigkeit ist nur im Sinne von
 x_0 aus dem Definitionsbereich sinnvoll.

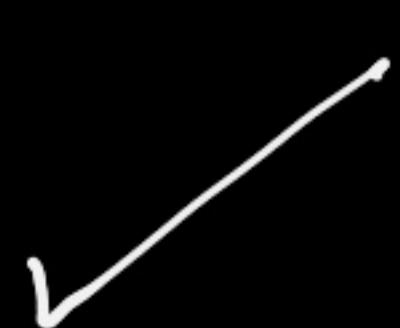
Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ ist stetig (auf \mathbb{R}),

denn: für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} (2x) = 2x_0$,

denn: Ist $\varepsilon > 0$ vorgelegt ist, so setze $\delta = \varepsilon/2$

und betrachte $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x - 2x_0| = 2 \cdot |x - x_0| < 2\delta = \varepsilon.$$



1.6 Satz Ist f im x_0 stetig, so gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

für alle $x, y \in D$, $|x - x_0|, |y - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Begründung: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert, also wende 1.4 an. ✓

$$\text{Bsp } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 4 \\ x^3 & \text{für } x < 4 \end{cases}$$

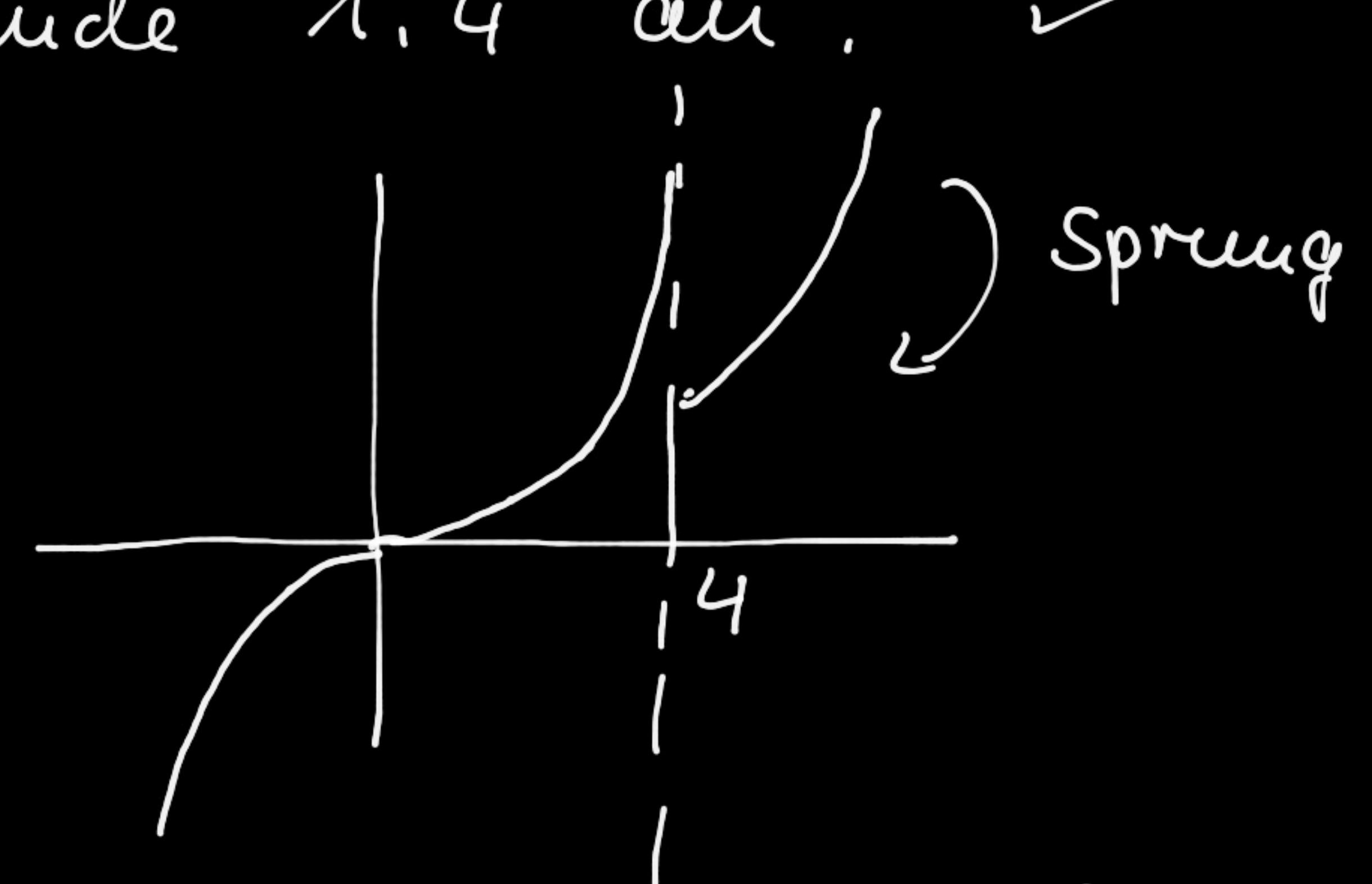
f ist im $x_0 = 4$ unstetig.

$$4^3 = 64 ; 4^2 = 16$$

Wähle $\varepsilon = 1$. Ist $\delta > 0$ setze $x = 4 - \frac{\delta}{2}; y = 4 + \frac{\delta}{2}$

$(|x - 4|, |y - 4| = \frac{\delta}{2} < \delta)$. Dann:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(4 - \frac{\delta}{2}) - f(4 + \frac{\delta}{2})| = |(4 - \frac{\delta}{2})^3 - (4 + \frac{\delta}{2})^2| \\ &= |64 - 16 + \text{weitere Terme}| \leq |64 - 16| + |\text{weitere Terme}| \\ &= 48 + |\text{weitere Terme}| \geq 48 > \varepsilon = 1. \text{ Jetzt 1.6 anwenden.} \end{aligned}$$



Beispiel: Die Dirichlet-Funktion.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

x rational bedeutet: x ist ein Bruch

$x = p/q$ mit ganzzähligen p, q

"irrational" bedeutet "nicht rational"

Im jedem Intervall $(a; b)$ ($a < b$)

gibt es sowohl rationale als auch
irrationale Zahlen.

Also: f nimmt auf $(a; b)$ sowohl den Wert 0 als auch
den Wert 1 an.

Dies bedeutet: Für jedes x_0 und für jedes $\delta > 0$ gibt
es im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Zahlen x, y mit
 $f(x) = 0, f(y) = 1$ und folglich $|f(x) - f(y)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}$.
1.6 (mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$) zeigt: f ist in x_0 nicht stetig.



Übung: Wie kann man nachweisen, dass die Funktion
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$, auf ganz \mathbb{R} stetig ist.

Hinweis: f ist "streng monoton wachsend", d.h.
für $x < y$ gilt stets $x^5 < y^5$.

Lösung: Betrachte ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und zeige $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^5}{f(x)} = \frac{x_0^5}{f(x_0)}$

Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Setze $a = \sqrt[5]{x_0^5 - \varepsilon}$ und

$$b = \sqrt[5]{x_0^5 + \varepsilon}. \quad \text{Es gilt } a < x_0 = \sqrt[5]{x_0^5} < b.$$

Für $x \in (a, b)$ gilt

$$a = \sqrt[5]{x_0^5 - \varepsilon} < x < b = \sqrt[5]{x_0^5 + \varepsilon}$$

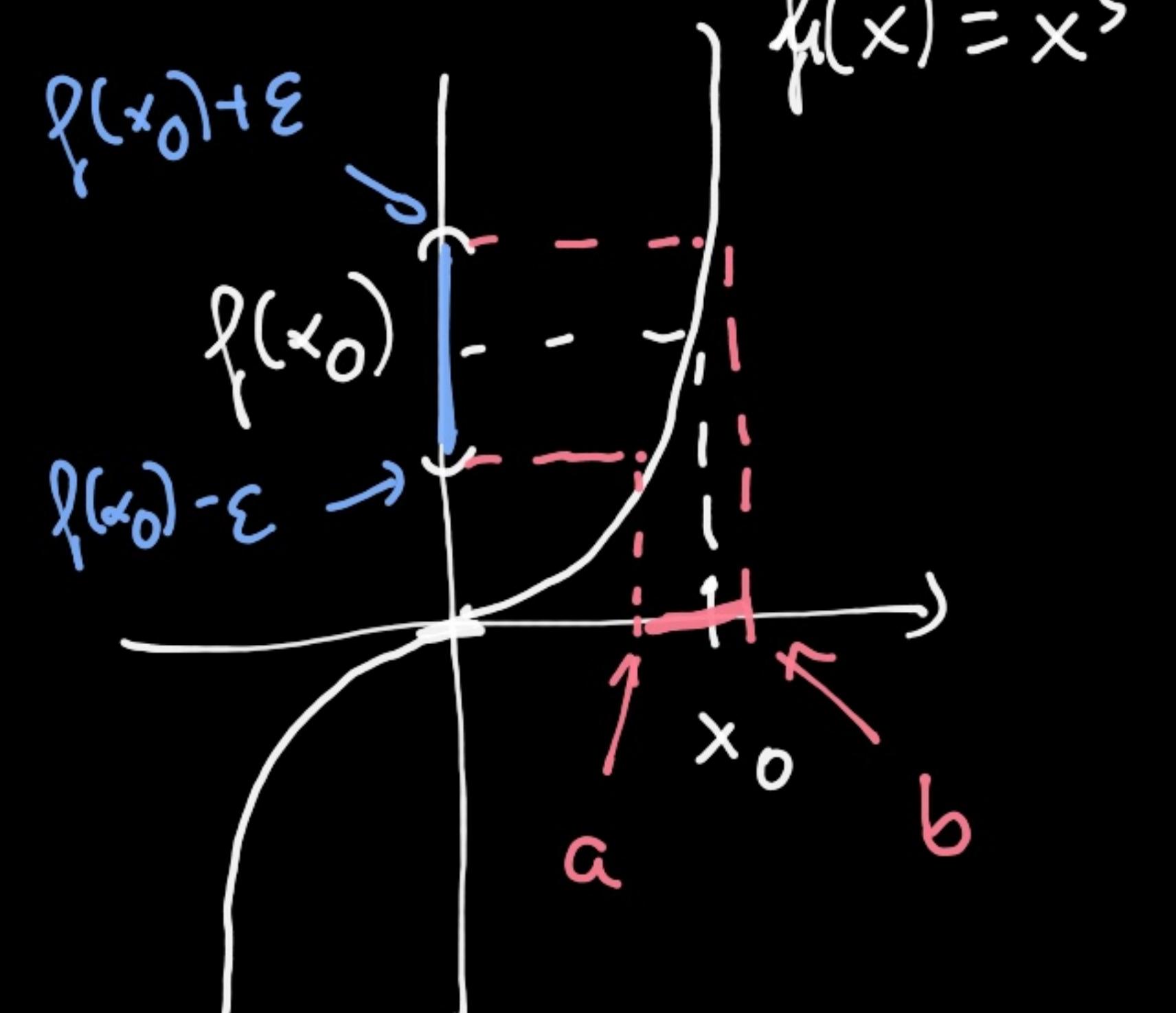
und (da $f(x) = x^5$ streng monoton wachsend)

$$\text{damit } a^5 = \underline{x_0^5 - \varepsilon} < x^5 < \overline{b^5 = x_0^5 + \varepsilon},$$

$$\text{d.h. } f(x) = x^5 \in (x_0^5 - \varepsilon, x_0^5 + \varepsilon)$$

$$\text{bzw. } |x^5 - x_0^5| < \varepsilon.$$

✓



1.7 Die Grenzwertrechenregeln

Vorgelegt sind zwei Funktionen f und g .

Wir setzen voraus: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren.

$$(LR1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

(lies: die linke Seite existiert und es gilt " $=$ ")

$$(LR2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

(LR3) Ist $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

$$(LR4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c \text{ Konst.})$$

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 3x^2 + 8x + 5}{x^2 + x + 42} \stackrel{(LR3)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^5 - 3x^2 + 8x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 42)}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{(LR1)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^5 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 8x + \lim_{x \rightarrow 2} 5}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 42} \\
 & = \frac{2^5 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 5}{2^2 + 2 + 42} = \frac{32 + 12 - 12}{48} = \frac{41}{48} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{lim } x^2 \quad \text{lim } x^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 = 2^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = 2
 \end{aligned}$$

Begründung der Rechenregeln

Wo. 02 | S. 35

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad G = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Bedeutet: Ist $x \approx x_0$, so ist $f(x) \approx L$ und $g(x) \approx G$,
also ist auch $f(x) + g(x) \approx L + G$

Restl. Regeln: ganz analog.

Genauer: Zeige $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + G$

$$\text{Dazu: } |f(x) + g(x) - (L + G)| = |f(x) - L + g(x) - G| \\ \leq |f(x) - L| + |g(x) - G|$$

"Offizielles Beweis"
Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wähle $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit:

Ist $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_1$, so gilt $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ist $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_2$, so gilt $|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$. Für $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$

gilt dann: $|f(x) - g(x) - (L + G)| \underset{\delta_0.}{\leq} |f(x) - L| + |g(x) - G|$
 $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$



Hausaufgabe 02 A :

Berechne mit den Grenzwertrechenregeln:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 7}{x^2 + 3x + 1} .$$

Notz : $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$, $\lim_{x \rightarrow x_0} x^3 = x_0^3$ darf
verwendet werden.

Einschub:

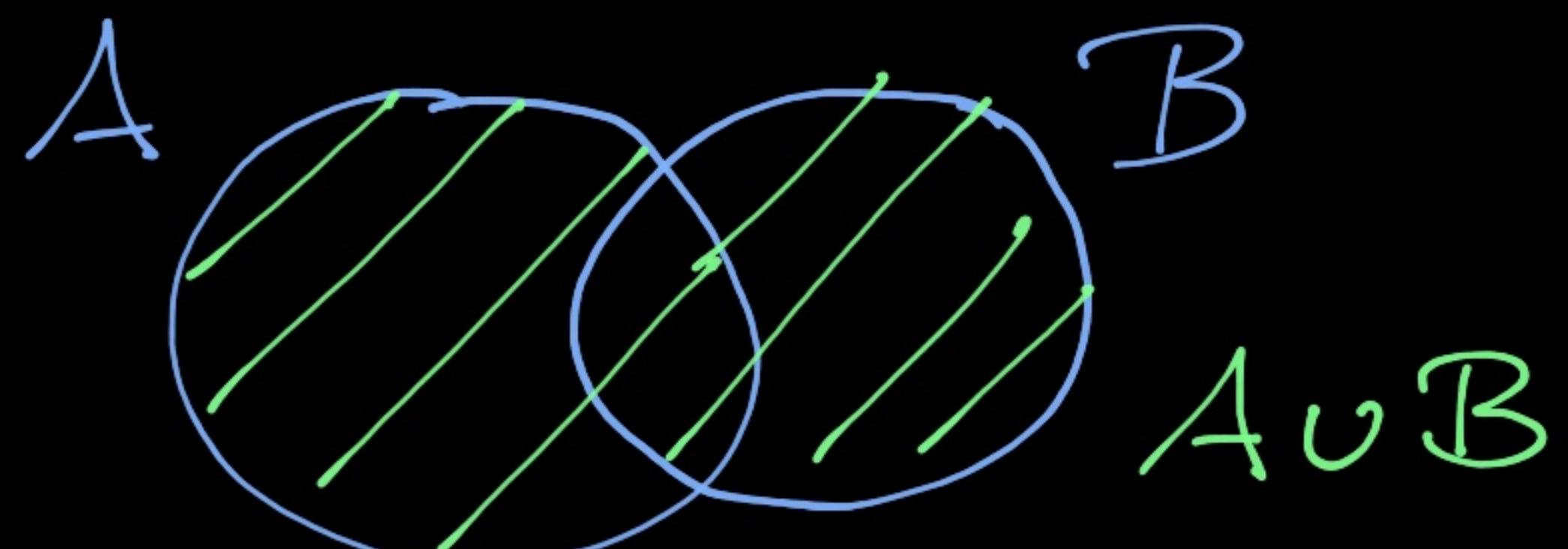
A, B Mengen

Vereinigungsmenge

"vereinigt"

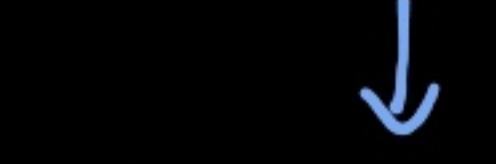


$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

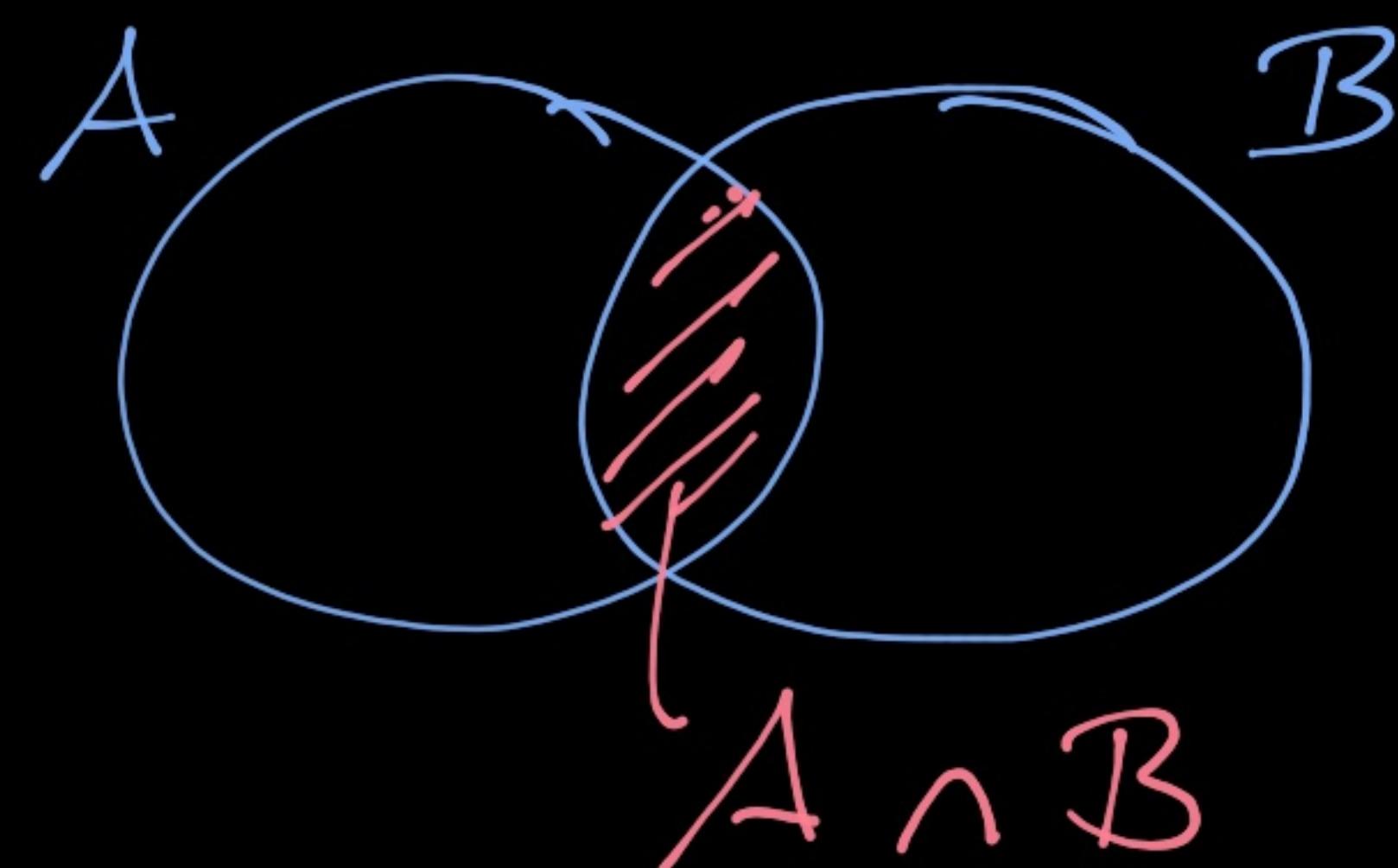


Schnittmenge

"geschnitten"



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

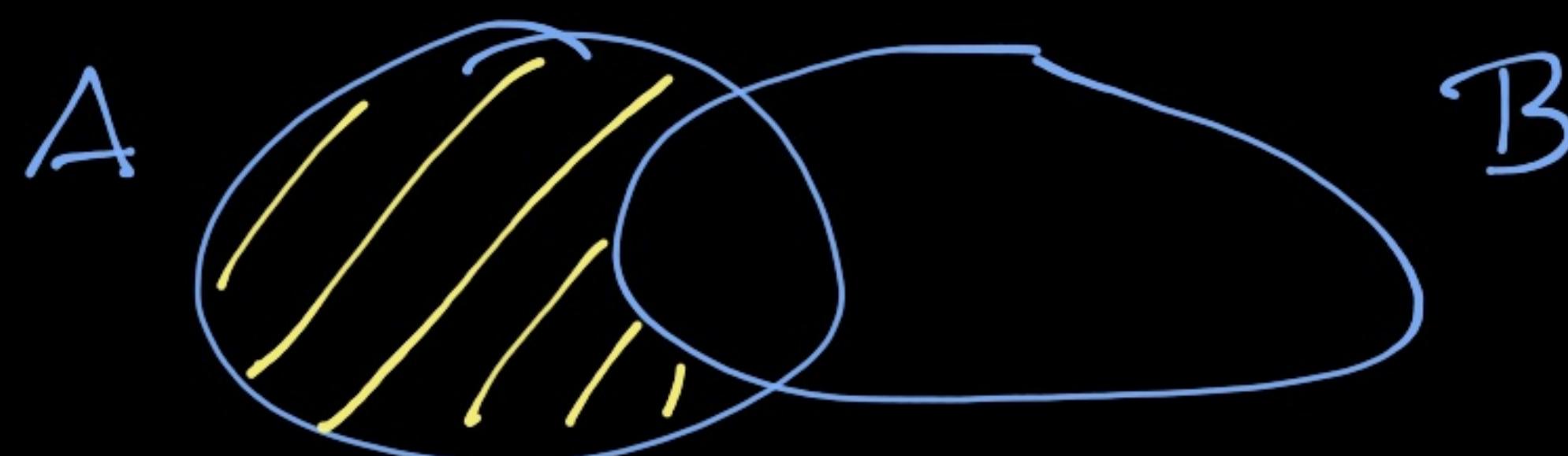


Differenzmenge

"ohne"



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



Konstruktion neuer Funktionen aus bereits bekannten

Vorgelegt: $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, $c \in \mathbb{R}$.

Dann bilden neue Funktionen

- $f+g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

z.B.: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 \rightsquigarrow (f+g)(x) = x^2 + x^3$

- $f-g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

- $f \cdot g: D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

- $c \cdot f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$

- $\frac{f}{g}: (D_f \cap D_g) \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

z.B. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \text{ ganze Zahl} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

1.8 Satz: $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen

f und g seien stetig in $x_0 \in D_f \cap D_g$.

Dann sind auch folgende Funktionen in x_0 stetig

- $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$
- für $c \in \mathbb{R}$ auch $c \cdot f$

Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.

$$\begin{aligned} \text{Dazu: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \uparrow}} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit}}}{=} f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Grenzwertrechenregeln

(Rest völlig analog).

Beispiele:

(a) $f(x) = x$ und $f(x) = c$ sind stetige Funktionen

(b) Damit ist auch $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n-\text{mal}}$ stetig,

also auch $g(x) = c \cdot x^n$

(c) Folglich sind Polynome $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$

auf ganz \mathbb{R} stetig,

z.B. $p(x) = x^{10} - 3x^5 + 6x^2 - 42$ ist stetig,

also $\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = p(2) = 2^{10} - 3 \cdot 2^5 + 6 \cdot 2^2 - 42$

$$= 1024 - 96 + 24 - 42 = 910$$

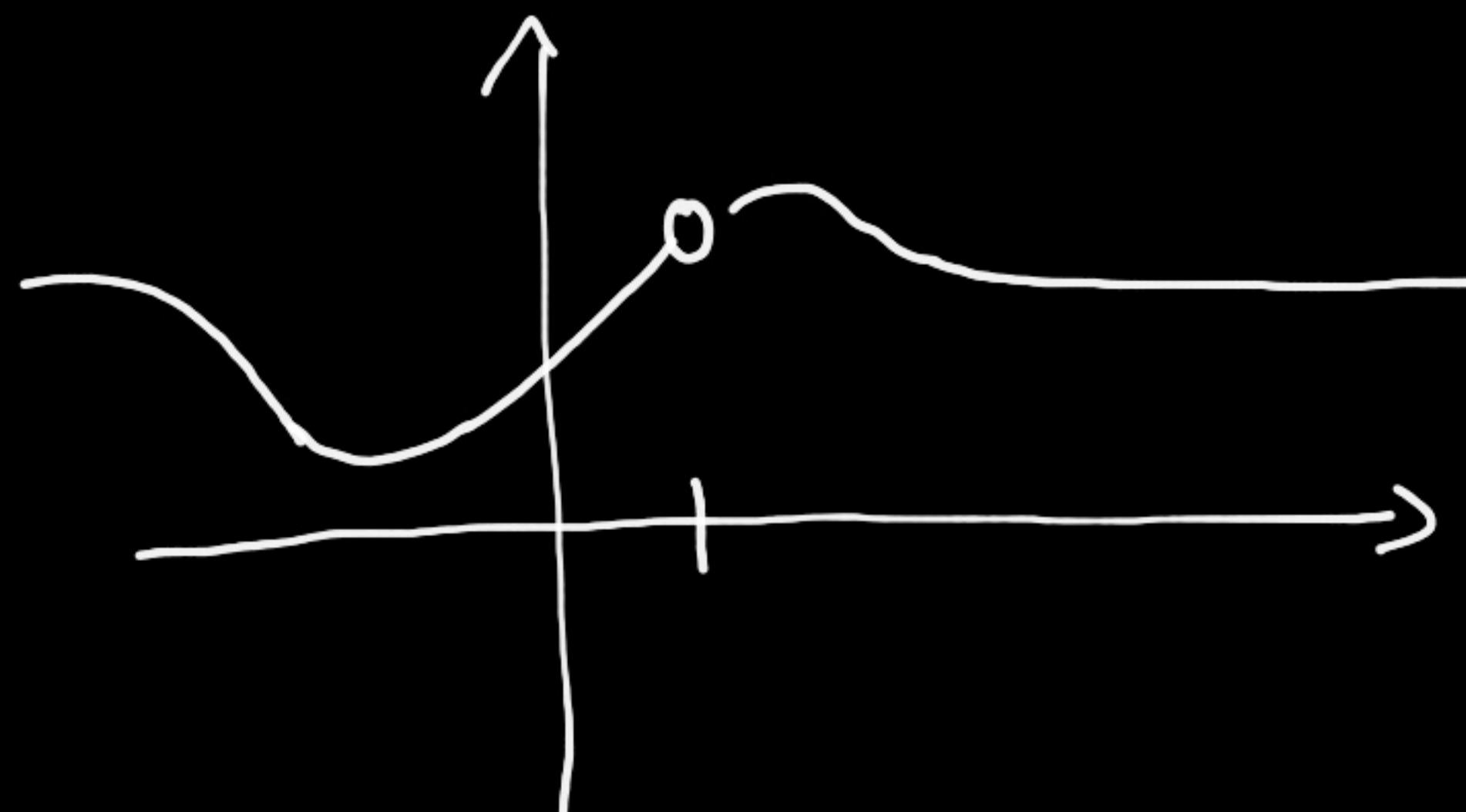
(d) Demnach sind auch alle rationalen Funktionen
(Polynom / Polynom) stetig, z.B.

$$r(x) = \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 1} \quad (\text{Def. Bereich } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

$r(x) = \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 1}$ ist auf $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ stetig

$$r(x) = \frac{(x-1)(x+9)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+9}{x+1}$$

Folgt: $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+9}{x+1} = \frac{1+9}{1+1} = 5$



Beachte:

$$\tilde{r}(x) = \begin{cases} r(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \\ 5 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \tilde{r}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ "x \neq 1"}^{\uparrow}} r(x) = 5 \underset{s.o.}{=} \tilde{r}(1)$$

$\tilde{r}(x)$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ stetig. (stetige Fortsetzung von $r(x)$)

Nachbar: $\tilde{r}(x) = \frac{x+9}{x+1}$

Verbundene Funktionen (Hintereinander schaltung)

$$h(x) = 2^{\cos x}$$

entsteht durch Einsetzen von $\cos x (= g(x))$
in die Funktion $f(x) = 2^x$.

$$g: D_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

mit : $g(x) \in D_f$ für jedes $x \in D_g$.

Dann bilde neue Funktion

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Verbindung / Hintereinander schaltung von f und g .

$$\text{Bsp} : g(x) = x^2 - 1, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{genauer: } f \circ g : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

1.9 Satz:

Vorgelegt: $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion

$g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion mit $g(x) \in D_f$ für alle $x \in D_g$

Zahlen $x_0 \in D_g$ und $y_0 = g(x_0) \in D_f$.

Voraussetzung: g ist stetig in x_0 und

f ist stetig in $y_0 = g(x_0)$

Dann ist $f \circ g$ in x_0 stetig.

Denn: $x \approx x_0 \rightsquigarrow g(x) \approx g(x_0) = y_0 \rightsquigarrow f(g(x)) \approx f(y_0) = f(g(x_0))$

$(f \circ g)(x) \approx (f \circ g)(x_0)$

Bsp: $h(x) = 2^{\cos x - \sin x^2}$ ist stetig.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} 2^{\cos x - \sin x^2} = 2^{\cos \sqrt{\pi} - \sin \sqrt{\pi}^2} = 2^{\cos \sqrt{\pi}}$$

Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{3+x^2}{2+x^4} + \cos x} \cdot 2^{\frac{\cos x}{4+\sin x}} + 2^{(2^x)}}{2^{2^x - \cos(x^2+3) + \sin(\cos(\sin(\cos(x))))}}$$

ist aus den stetigen Funktionen

$$b_1(x) = x, \quad b_2(x) = \cos x, \quad b_3(x) = \sin x, \quad b_4(x) = 2^x, \quad b_5(x) = \sqrt{x}$$

per $+ | - | \cdot | :$ und Verkettung zusammen gesetzt

UND DAMIT IST $f(x)$ EINE
STETIGE FUNKTION.

Stetige Bausteine sind:

- Polynome
- rationale Funktionen
- Wurzelfunktionen $w(x) = \sqrt[n]{x}$
- Winkelfunktionen sin, cos, tan
- $f(x) = c^x$ mit $c > 0$
- $f(x) = \log_c x$ mit $c > 0$

\uparrow
das ist die Zahl, mit der man c potenzieren muss, um x zu erhalten.

$$\log_{10} 1000 = 3, \text{ denn } 10^3 = 1000$$

$$\log_2 512 = 9, \text{ denn } 2^9 = 512$$

Hausaufgabe 02B :

Zeige ausführlich, dass

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{3^x - 2^x}$$

eine stetige Funktion ist.

Wie lautet der maximal mögliche Definitionsbereich dieser Funktion?

$$g(x) = \frac{x+1}{3-2^x} :$$

$x+1$ ist als Polynom stetig
 2^x ist stetig, also auch $3-2^x$
 Also ist $\frac{x+1}{3-2^x}$ stetig