Eine Menge ist ein Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen.

Beispiel:

- $M = \{1, a, u\}$ ist die Menge, die aus den Elementen 1, a und u besteht.

  $\{\ \}$: Mengenklammern

  Schreibe $1 \in M$, lies "1 ist ein Element von M"

  $x \notin M$, lies "x ist kein Element von M"

- $\{2, 3, 5, 7, \dots\} = \{p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\} = P$

  lies: "die Menge aller p für die gilt: p ist eine Primzahl"

  $2 \in P$, $7 \in P$, $9 \notin P$, $2{,}375 \notin P$, $\pi^2/6 \notin P$

Wichtige Beispiele:

- $\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen $= \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen $= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0 \}$

  Menge der rationalen Zahlen.

Differenz von zwei Mengen M und N:

$$M \setminus N = \{ m \mid m \in M \text{ und } m \notin N \}$$

"M ohne N" $(= \{ m \in M \mid m \notin N \})$

z.B. $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0 \}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$

- $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen (Dezimalzahlen)

- "Leere Menge" $\emptyset = \{\ \}$
  enthält keine Elemente
- Wichtig für Analysis : <u>Intervalle</u>

$a, b \in \mathbb{R}$

offenes Intervall : $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Zahlenstrahl

abgeschlossenes Intervall : $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

halboffene Intervalle : $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a; b]$ analog

unbeschränktes Intervall : $[a; \infty)$, $(a; \infty)$; $(-\infty; b]$,
$(-\infty; b)$, $(-\infty, \infty)$

z.B. $[a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Hausaufgabe 01 A:

$[0;10] \setminus [5;500]$ ist wieder ein Intervall.
Welches?

$[0,100] \setminus [10,90]$ ist <u>kein</u> Intervall.

Abbildungen:

Vorgelegt sind zwei Mengen D und W.

Eine Abbildung f von D in W ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y = f(x) \in W$ zu.

D : Definitionsbereich von f

W : Bildbereich / Wertemenge

$f(x)$: lies: f von x.

Schreibe : $f : D \longrightarrow W$

meint: f ist eine Abbildung von D in W.

Beispiel:

- $q : \mathbb{R} \longrightarrow [0;\infty]$; $q(x) = x^2$

  Funktionsname — Def.bereich — Wertemenge — Funktionsdeklaration

  $q(5) = 5^2 = 25$, $q(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 2$, ...

Python:

```
def q(x):
    return x^2
```

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

  $f(2) = 1$; $f(\pi^2/6) = 1$, $f(42) = 1$,
  $f(-3589) = -1$, $f(0) = 1$.

"Funktionen" sind Abbildungen, deren Werte reelle Zahlen sind.

WO 01 / S. 07

§ 1 : Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

(i) Was ist ein Grenzwert?

(ii) Wozu brauchen wir das später?

(iii) Formale Definition

(iv) Vereinfachungen und Erläuterungen

"limes" / Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} x^2 = L \in \mathbb{R} :$$ Grenzwert von $f(x) = x^2$ für x gegen 2

"x gegen 2" Funktion $f(x) = x^2$

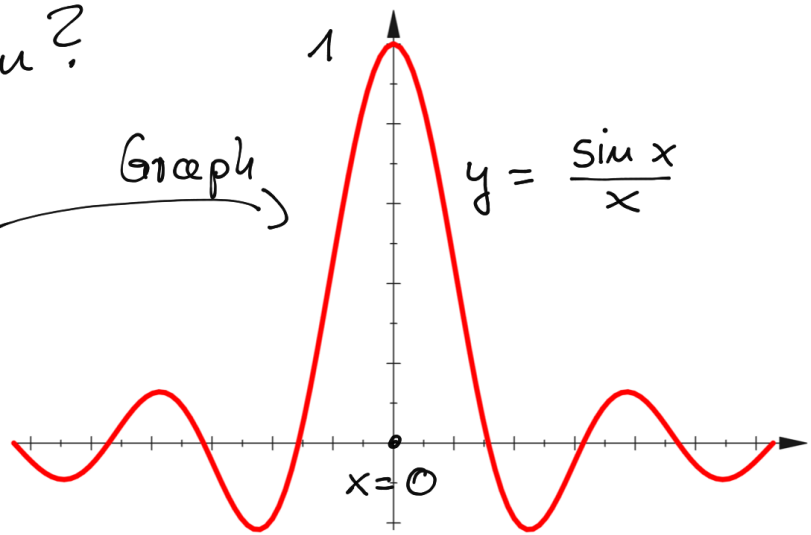
Bedeutung: x^2 ist ungefähr gleich 4, wenn x dicht genug bei 2 liegt $\Big\}$ $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{, aber warum?}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Graph



Einschub: $$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}}_{\text{Differenzenquotient}} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

Kleine Übungen zwischendurch: Wo. 01/ S09

- $\lim\limits_{x \to 5} (2x - 9) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{x^2}{x}}_{= x} = 0$

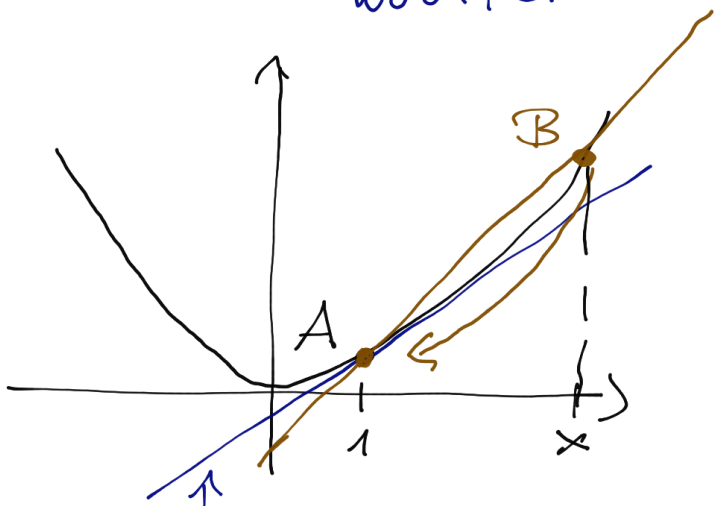
Wozu die Mühe?

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{1}{5}x^2$

$A: \left(1; \frac{1}{5}\right)$

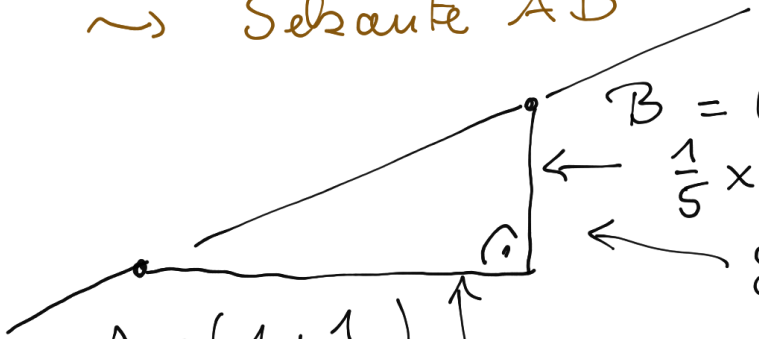
$B = \left(x; \frac{1}{5}x^2\right); \; x \neq 1$

$\rightsquigarrow$ Sekante AB



Tangente

Gesucht: Tangenten-steigung



$B = \left(x, \frac{1}{5}x^2\right)$

$\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$

Steigungsdreieck

$A = \left(1; \frac{1}{5}\right)$

$x - 1$

Sekantensteigung: $\dfrac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}}{x - 1}$

Tangentensteigung: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{5}(x+1) = \frac{2}{5}$

$= 0{,}4.$

Teilmenge N einer Menge M:
Jedes Element von N liegt auch in M.
Schreibe: $N \subseteq M$

Wo 1 | S. 11

ε: "epsilon"
δ: "delta"

1.1 Definition (Grenzwert)

Vorgelegt sind Teilmengen $D, W \subseteq \mathbb{R}$
sowie ein Funktion $f: D \to W$.
Außerdem sei x_0 eine reelle Zahl. ← x_0 muss beim Element von D sein!

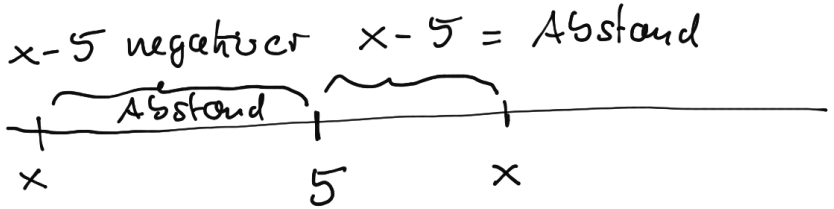
Dann heißt f konvergent für x gegen x_0,
wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt mit:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:
Wenn $x \in D$, $x \neq x_0$, die Ungleichung $|x - x_0| < \delta$ erfüllt, dann gilt auch $|f(x) - L| < \varepsilon$.
In diesem Fall heißt L der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0; schreibe: $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Diese Definition wollen wir verstehen!

- $|x - x_0| < \delta$

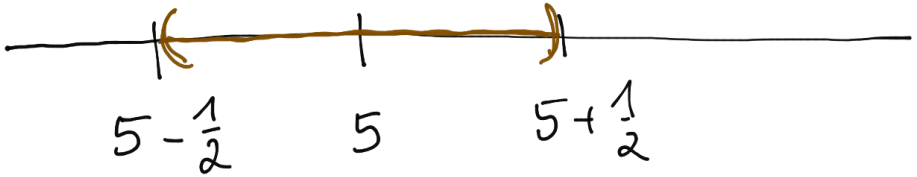
Bilde für $x_0 = 5$ und $\delta = \frac{1}{2}$ die Menge

$\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < \frac{1}{2} \}$



$|x - 5|$ = Abstand von x zu 5

$|x - 5| < \frac{1}{2}$ bedeutet: Der Abstand von x zu $x_0 = 5$ beträgt weniger als $\delta = \frac{1}{2}$



$\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < \frac{1}{2} \}$

$= \left(5 - \frac{1}{2} ; 5 + \frac{1}{2} \right) = (4.5; 5.5)$

Allgemein: $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta \} = (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to \underset{x_0 = 5}{5}} \underbrace{(2x-9)}_{f(x) = 2x-9} = \underbrace{1}_{L = 1}$; $L = 1$

Was sind $f(x)$, x_0, L aus der Definition ??

Definition (1.1)

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

ist $x \in D$, $x \neq x_0$,

$|x - x_0| < \delta$,

so gilt

$|f(x) - L| < \varepsilon$

Hier:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

Vorgegebener Maximalabstand für $|f(x) - L|$

Zu findende Fehlerschranke für x.

ist $x \neq 5$,

$|x - 5| < \delta$

so gilt

$|(2x-9) - 1| < \varepsilon$

bzw.

$|2x - 10| < \varepsilon$

Betrachte nur x; $x \neq 5$, die "ausreichend nahe" an $x_0 = 5$ liegen

Für solche x gilt automatisch $|f(x) - L| < \varepsilon$, d.h. $f(x)$ liegt "sehr nahe" am Grenzwert L.

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 5} \underbrace{(2x-9)}_{f(x) = 2x-9;\ L = 1} = 1$ Wo 01 / S. 14

$x_0 = 5$

Was sind $f(x)$, x_0, L aus der Definition ??

Graphisch

Definition (1.1)

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

ist $x \in D$, $x \neq x_0$,

$|x - x_0| < \delta$,

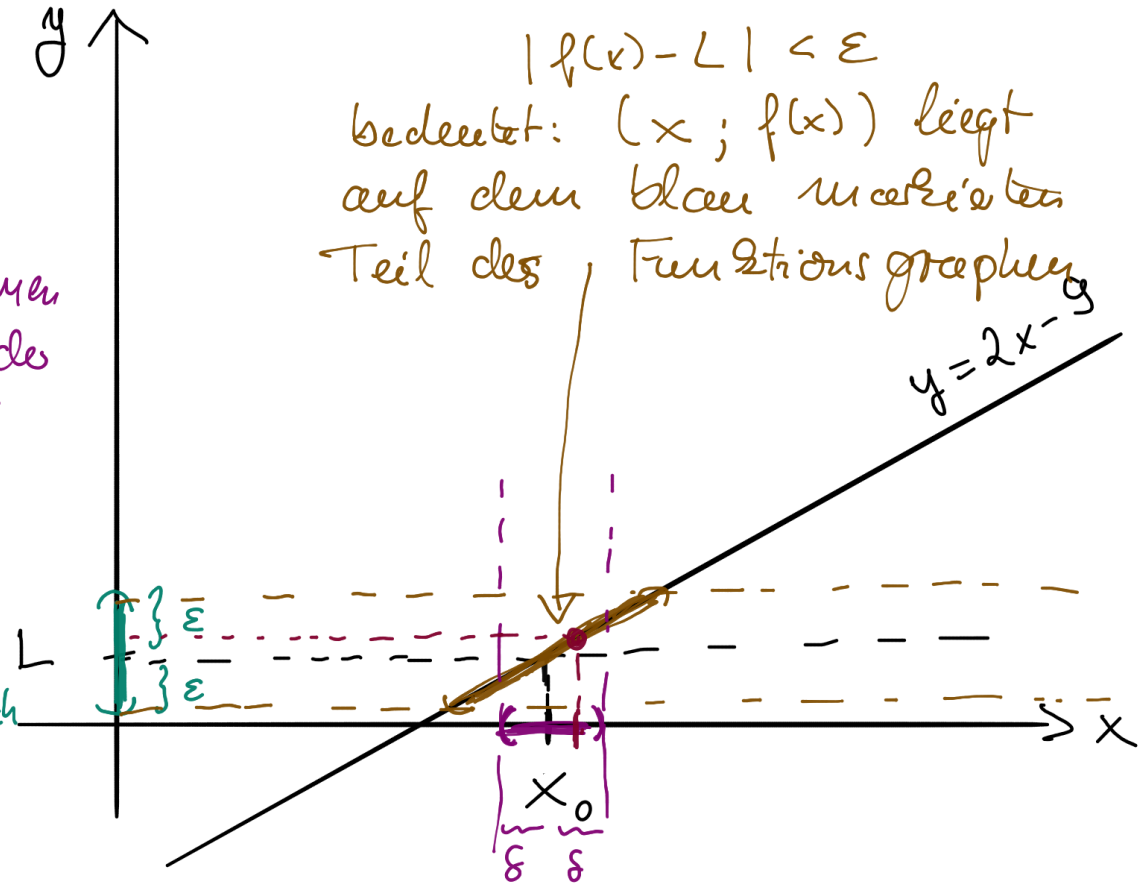
so gilt

$|f(x) - L| < \varepsilon$

x liegt im grünen Bereich der x-Achse

$f(x)$ liegt im roten Bereich

$|f(x) - L| < \varepsilon$ bedeutet: $(x; f(x))$ liegt auf dem blau markierten Teil des Funktionsgraphen



Beispiel: $\lim\limits_{x \to \underset{x_0 = 5}{5}} \underbrace{(2x-9)}_{f(x) = 2x-9} = \underbrace{1}_{L = 1}$; $L = 1$

Wo 01 | S. 15

Was sind $f(x)$, x_0, L aus der Definition ??

Definition (1.1)

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

ist $x \in D$, $x \neq x_0$,

$|x - x_0| < \delta$,

so gilt

$|f(x) - L| < \varepsilon$

Hier:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

ist $x \neq 5$,

$|x - 5| < \delta$

so gilt

$|(2x-9) - 1| < \varepsilon$

bzw.

$|2x - 10| < \varepsilon$

Zu tun:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Setze $\delta = \varepsilon/2$

Betrachte ein $x \neq x_0 = 5$ mit $|x - 5| < \delta$.

Dann gilt:

$|f(x) - L| = |(2x-9) - 1|$

$= |2x - 10| = 2 \cdot |x - 5|$

$\underset{\text{Vor.}}{<} 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Hausaufgabe 01B:

Rate den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} |3x+4|$.

Weise dann nach, dass dies tatsächlich der richtige Grenzwert ist.

Verwende hierzu (ausschließlich) Definition 1.1!

Welches δ muss man für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ wählen?

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

$D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
$x_0 = 2$, $L = 4$

Wo 01 / S. 17

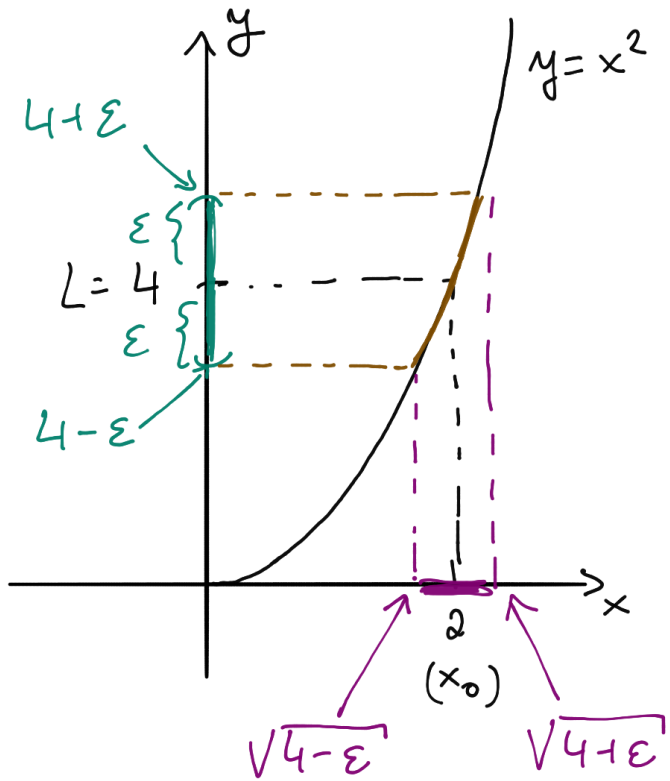
Def. 1.1

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:
Ist $x \in D$, $x \neq x_0$,
$|x - x_0| < \delta$,
so gilt
$|f(x) - L| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.
Setze $\delta = \ldots$

Betrachte $x \neq 2$, $|x - 2| < \delta$.
Dann gilt
$|x^2 - 4| \underline{\underline{< \varepsilon}}$

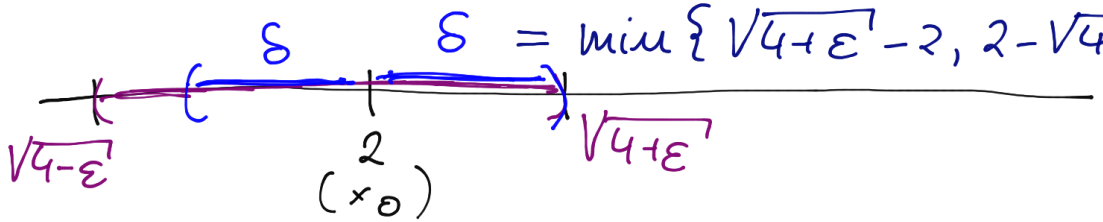
$\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ ("graphisches" Verfahren) Wo. 01 / S. 18



$\boxed{\varepsilon \leq 4}$

Sei x aus dem grünen Bereich.
Dann liegt $(x; f(x))$ auf dem blauen Bereich des Funktionsgraphen.
Dann ist $f(x)$ aus dem roten Bereich,
d.h. $|f(x) - 4| < \varepsilon$

Grüner Bereich: $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$

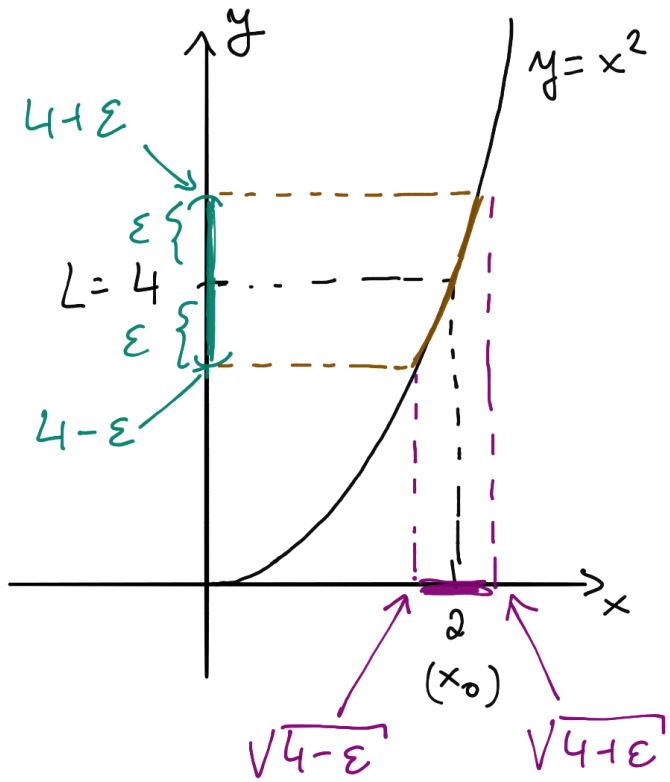


$\delta = \min\{\sqrt{4+\varepsilon} - 2, 2 - \sqrt{4-\varepsilon}\}$

$(2-\delta, 2+\delta)$ liegt ganz im grünen Bereich.

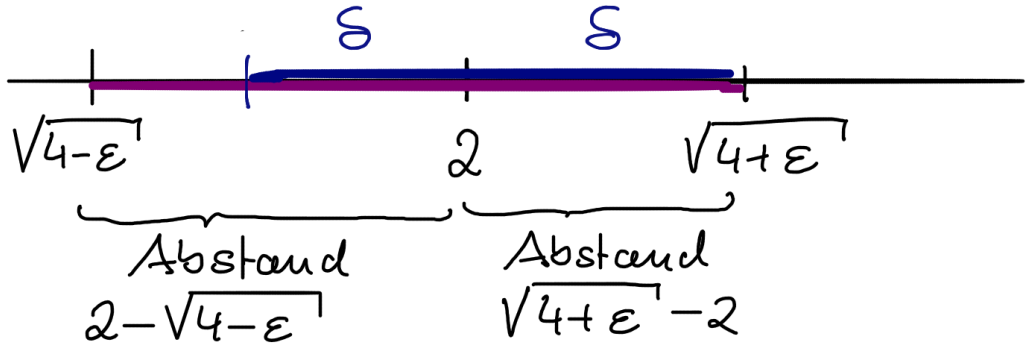
Also: $|x - 2| < \delta$ liefert: x aus dem grünen Bereich,
d.h. $f(x) = x^2$ aus dem roten Bereich, d.h. $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ ("graphisches" Verfahren)



$\boxed{\varepsilon \leq 4}$

Lösung dieses Problems:



$$\delta = \min\{\sqrt{4+\varepsilon} - 2 \,;\, 2 - \sqrt{4-\varepsilon}\}$$

Jedes gelbe x ist grün und liefert ein rotes $f(x)$, d.h.

Ist $|x-2| < \delta$, so gilt $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Gilt $|x^2 - 4| < \varepsilon = 2$ für alle x, $|x-2| < \delta$, so gilt $|x^2 - 4| < \varepsilon$ für alle x, $|x-2| < \delta$ erst recht für alle $\varepsilon \geq 2$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

$D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $L = 4$

Wo 01 / S. 20

Def. 1.1

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

Ist $x \in D$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$,

so gilt $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Wir dürfen $\varepsilon \leq 4$ voraussetzen.

Setze $\delta = \min\{\sqrt{4+\varepsilon} - 2,\ 2 - \sqrt{4-\varepsilon}\} > 0$

Betrachte $x \neq 2$, $|x - 2| < \delta$.

Dann gilt:

$$\underbrace{2 - (2 - \sqrt{4-\varepsilon})}_{\sqrt{4-\varepsilon}} \leq 2 - \delta < x < 2 + \delta \leq \underbrace{2 + \sqrt{4+\varepsilon} - 2}_{= \sqrt{4+\varepsilon}}$$

Aus $0 \leq \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$

folgt durch Quadrieren (monoton wachsend auf $[0, \infty)$)

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$$

d.h. $|x^2 - 4| < \varepsilon$

1.2 Notizen:

(a) Im Nachweis für $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ darf man $\varepsilon \leq S$ für eine (gewählte) Schranke $S > 0$ voraussetzen.

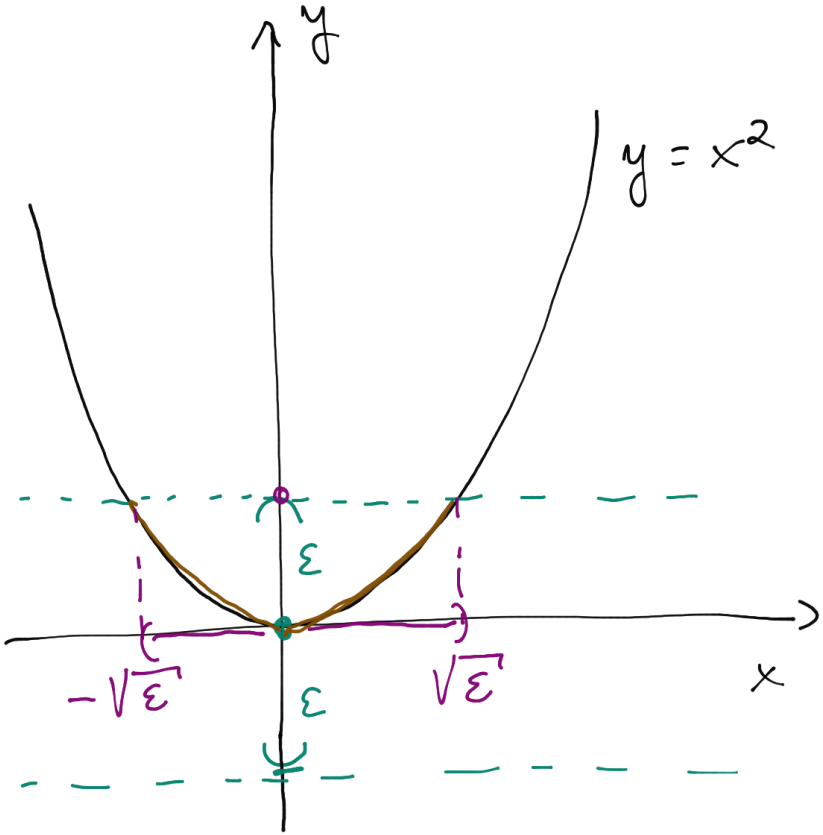
Schreibe: Wir dürfen $\varepsilon \leq S$ voraussetzen.

(b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ gilt genau dann, wenn:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Zahlen $a < x_0 < b$ mit: Ist $x \in D$, $x \neq x_0$, $x \in (a; b)$, so gilt $|f(x) - L| < \varepsilon$.

in der Original def.
$a = x_0 - \delta$, $b = x_0 + \delta$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$



Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

Setze $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Betrachte $x \neq 0$, $|x - 0| < \delta$.

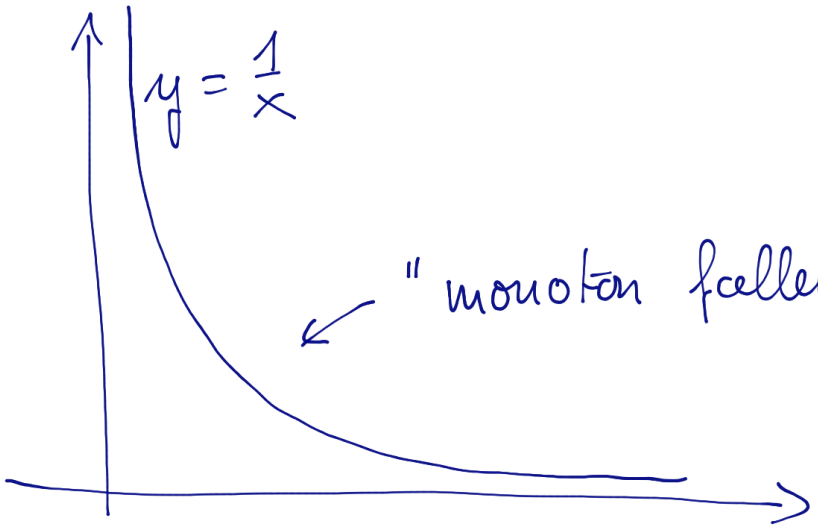
Dann gilt:

$$|x^2 - 0| = x^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Hausaufgabe 01 C:

Rate den Wert von $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x}$

und weise nach, dass dies der richtige Wert ist.



"monoton fallend"

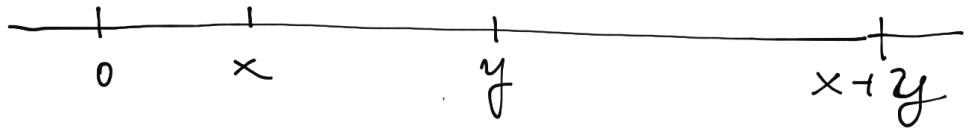
$0 < a < b$

$\rightsquigarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

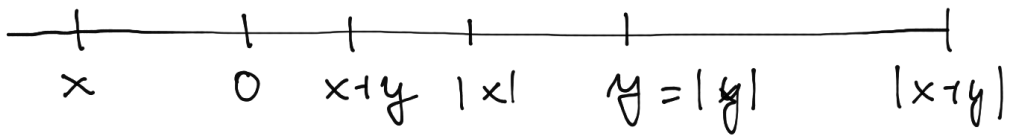
1.3 Die Dreiecksungleichung

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Denn:



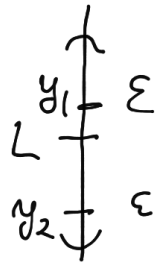
$$|x+y| = x+y = |x| + |y| \checkmark$$



$$|x+y| = x+y \leq |x| + |y| \checkmark$$

⋮

1.4 Folgerung:



Gilt $|y_1 - L| < \varepsilon$ und $|y_2 - L| < \varepsilon$,

so gilt $|y_1 - y_2| \leq |y_1 - L + L - y_2|$

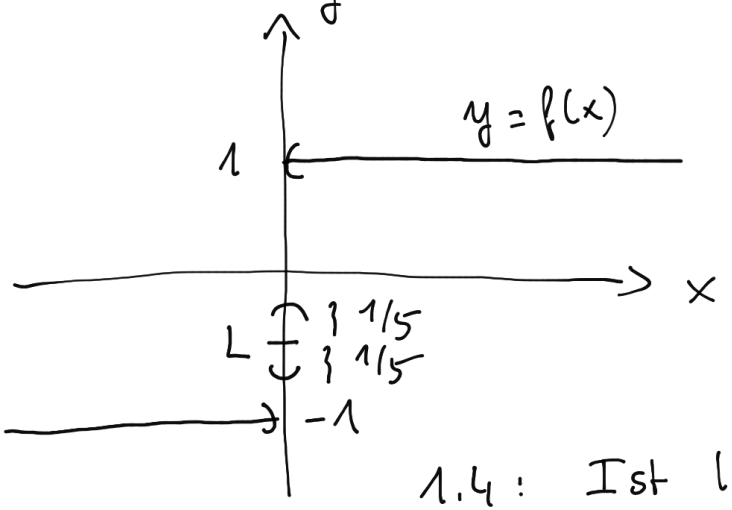
$\leq |y_1 - L| + |L - y_2| = |y_1 - L| + |y_2 - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Beispiel: $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Beh.: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ gibt es nicht,

d.h.: f ist für $x \to 0$ $\underbrace{\text{nicht konvergent}}_{\text{synonym: divergent}}$

Dazu: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{f. } x > 0 \\ -1 & \text{f. } x < 0 \end{cases}$



Wäre $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$,

so gäbe es zu $\varepsilon = \frac{1}{5}$

ein $\delta > 0$ mit:

Ist $x \neq 0$, $|x - 0| < \delta$,

so gilt $|f(x) - L| < \varepsilon = \frac{1}{5}$

1.4: Ist $|x_1|, |x_2| < \delta$, so gilt $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{2}{5}$

Aber: $x_1 = \frac{\delta}{2}$, $x_2 = -\frac{\delta}{2}$ erfüllen die Voraussetzung,

aber $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$ und $|f(x_1) - f(x_2)| = 2 \not< \frac{2}{5}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

bedeutet: Ist $x \neq 0$, $x \overset{\text{ungefähr gleich}}{\approx} 0$, so ist $\frac{\sin x}{x} \approx 1$

genauer: Zu vorgegebener Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ (für y-Werte)
gibt es eine Fehlerschranke $\delta > 0$ (für x-Werte)
mit:

Ist $x \neq 0$, $|x - 0| < \delta$ (Spez. von "$x \approx 0$")

so gilt $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$ (Spez. von "$\frac{\sin x}{x} \approx 1$")