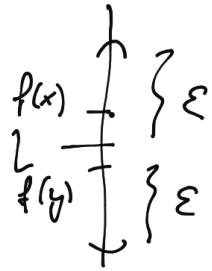
Grenzwert: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Ist $x \approx x_0$, so ist $f(x) \approx L$.

Genauer: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit
Ist $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, so ist $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Bsp: $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 3) = 5$

Denn: Sei $\varepsilon > 0$ vor. Setze $\delta = \varepsilon/2$
Betrachte $x \neq 1$, $|x - 1| < \delta$.
Dann gilt: $|(2x+3) - 5| = |2x - 2| = 2 \cdot |x - 1|$
$\underset{\text{Vor.}}{<} 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ✓

Bsp: $f(x) = \begin{cases} 42 & \text{für } x \geq 4 \\ 5 & \text{für } x < 4 \end{cases}$. Dann gibt es $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ <u>nicht</u>.

Nutze (1.4): Wäre $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, dann gäbe zu $\varepsilon = 5$
ein $\delta > 0$ mit: Ist $x \neq 4$, $|x - 4| < \delta$, so ist $|f(x) - L| < \varepsilon$
1.4: Ist $x, y \neq 4$, $|x - 4|, |y - 4| < \delta$, so gilt $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon = 10$.
Aber für $x = 4 - \frac{\delta}{2}$, $y = 4 + \frac{\delta}{2}$ ist $|f(x) - f(y)| = |5 - 42| = 37 \not< 2\varepsilon = 10$

1.5 Definition (Stetigkeit)

Vorgelegt: $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

Dann heißt f stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

d.h. der Grenzwert existiert und stimmt $f(x_0)$ überein

f heißt heißt stetig (auf D), falls f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Notiz: Stetigkeit / Unstetigkeit ist nur in Stellen x_0 aus dem Definitionsbereich sinnvoll.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ ist stetig (auf $\mathbb{R}$),

denn: für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} (2x) = 2x_0$,

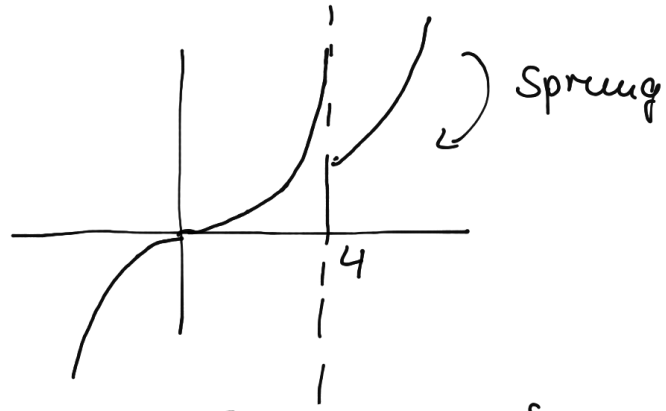
denn: Ist $\varepsilon > 0$ vorgelegt ist, so setze $\delta = \varepsilon/2$ und betrachte $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x - 2x_0| = 2 \cdot |x - x_0| < 2\delta = \varepsilon. \quad \checkmark$$

1.6 Satz Ist f in x_0 stetig, so gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass
für alle $x, y \in D$, $|x - x_0|, |y - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Begründung: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, also wende 1.4 an. ✓

Bsp $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 4 \\ x^3 & \text{für } x < 4 \end{cases}$



f ist in $x_0 = 4$ unstetig.

$4^3 = 64$; $4^2 = 16$

Wähle $\varepsilon = 1$. Ist $\delta > 0$ setze $x = 4 - \frac{\delta}{2}$; $y = 4 + \frac{\delta}{2}$

$(|x - 4|, |y - 4| = \frac{\delta}{2} < \delta)$. Dann:

$|f(x) - f(y)| = |f(4 - \frac{\delta}{2}) - f(4 + \frac{\delta}{2})| = |(4 - \frac{\delta}{2})^3 - (4 + \frac{\delta}{2})^2|$

$= |64 - 16 + \text{weitere Terme}| \leq |64 - 16| + |\text{weitere Terme}|$

$= 48 + |\text{weitere Terme}| \geq 48 > \varepsilon = 1$. Jetzt 1.6 anwenden.

Beispiel: Die Dirichlet-Funktion.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dirichlet

x rational bedeutet: x ist ein Bruch $x = p/q$ mit ganzzahligen p, q

"irrational" bedeutet "nicht rational"

In jedem Intervall $(a; b)$ $(a < b)$ gibt es sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.

Also: f nimmt auf $(a; b)$ sowohl den Wert 0 als auch den Wert 1 an.

Das bedeutet: Für jedes x_0 und für jedes $\delta > 0$ gibt es im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Zahlen x, y mit $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ und folglich $|f(x) - f(y)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}$.

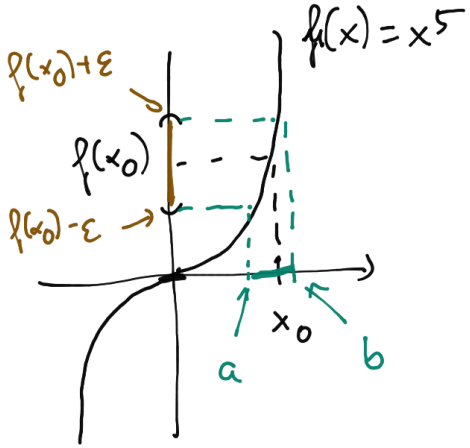
1.6 (mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$) zeigt: f ist in x_0 nicht stetig.

Übung: Wie kann man nachweisen, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$, auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Hinweis: f ist "streng monoton wachsend", d.h. für $x < y$ gilt stets $x^5 < y^5$.

Lösung: Betrachte ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und zeige $\lim\limits_{x \to x_0} \underset{f(x)}{x^5} = \underset{f(x_0)}{x_0^5}$

Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Setze $a = \sqrt[5]{x_0^5 - \varepsilon}$ und $b = \sqrt[5]{x_0^5 + \varepsilon}$. Es gilt $a < x_0 = \sqrt[5]{x_0^5} < b$.



Für $x \in (a, b)$ gilt

$$a = \sqrt[5]{x_0^5 - \varepsilon} < x < b = \sqrt[5]{x_0^5 + \varepsilon}$$

und (da $f(x) = x^5$ streng monoton wachsend)

damit $a^5 = \underline{x_0^5 - \varepsilon < x^5 <} \; b^5 = \underline{x_0^5 + \varepsilon}$,

d.h. $f(x) = x^5 \in (x_0^5 - \varepsilon, x_0^5 + \varepsilon)$

bzw. $|x^5 - x_0^5| < \varepsilon$. ✓

1.7 Die Grenzwertrechenregeln

Vorgelegt sind zwei Funktionen f und g.
Wir setzen voraus: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existieren.

(LR 1) $$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(lies: die linke Seite existiert und es gilt "=")

(LR 2) $$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$$

(LR 3) Ist $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

(LR 4) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c Konst.)

<u>Beispiel</u>

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 3x^2 + 8x + 5}{x^2 + x + 42} \overset{(LR3)}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^5 - 3x^2 + 8x + 5)}{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x + 42)}$$

$$\overset{(LR1)}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^5 - \lim\limits_{x \to 2} 3x^2 + \lim\limits_{x \to 2} 8x + \lim\limits_{x \to 2} 5}{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 42}$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = \Big(\underbrace{\lim_{x \to 2} x}_{=2}\Big)^2 = 2^2$$

$$= \frac{2^5 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 5}{2^2 + 2 + 42} = \frac{32 + 21 - 12}{48} = \frac{41}{48}$$

Begründung der Rechenregeln

Wo. 02 | S. 35

$L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $G = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Bedeutet: Ist $x \approx x_0$, so ist $f(x) \approx L$ und $g(x) \approx G$,

also ist auch $f(x) + g(x) \approx L + G$

Restl. Regeln: ganz analog.

Genauer: Zeige $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + G$

Dazu: $|f(x) + g(x) - (L+G)| = |f(x) - L + g(x) - G|$

$\leq |f(x) - L| + |g(x) - G|$

"Offizielle Beweis"

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wähle $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit:

Ist $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_1$, so gilt $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ist $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_2$, so gilt $|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Für $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$

gilt dann: $|f(x) - g(x) - (L+G)| \underset{\text{s.o.}}{\leq} |f(x) - L| + |g(x) - G|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ✓

Hausaufgabe 02 A:

Berechne mit den Grenzwertrechenregeln:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x^2 + 7}{x^2 + 3x + 1} .$$

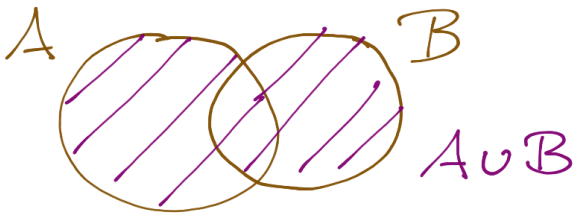
Notiz: $\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$, $\lim_{x \to x_0} x^3 = x_0^3$ darf verwendet werden.

Einschub:

A, B Mengen

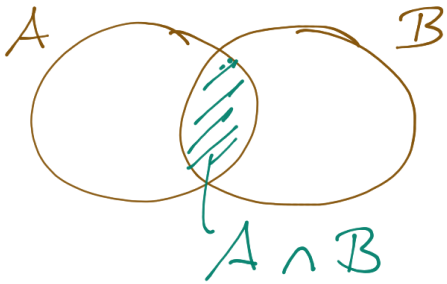
"vereinigt"

Vereinigungsmenge $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$



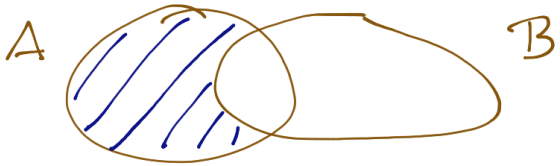
"geschnitten"

Schnittmenge $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$



"ohne"

Differenzmenge $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$



Konstruktion neuer Funktionen aus bereits bekannten

Vorgelegt: $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen, $c \in \mathbb{R}$.

Dann bilde neue Funktionen

- $f+g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

z.B.: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 \rightsquigarrow (f+g)(x) = x^2 + x^3$

- $f-g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $f \cdot g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $c \cdot f : D_f \to \mathbb{R}$, $(cf)(x) = c \cdot f(x)$
- $\frac{f}{g} : (D_f \cap D_g) \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

z.B. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \text{ ganze Zahl}\} \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

1.8 Satz: $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen

f und g seien stetig in $x_0 \in D_f \cap D_g$.

Dann sind auch folgende Funktionen in x_0 stetig

- $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$
- für $c \in \mathbb{R}$ auch $c \cdot f$

Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.

Dazu: $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) \overset{\text{Def.}}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Grenzwertrechenregeln}}}{=} \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit}}}{=} f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0) \checkmark$$

(Rest völlig analog).

Beispiele:

(a) $f(x) = x$ und $f(x) = c$ sind stetige Funktionen

(b) Damit ist auch $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}$ stetig,

also auch $g(x) = c \cdot x^n$

(c) Folglich sind Polynome $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig,

z.B. $p(x) = x^{10} - 3x^5 + 6x^2 - 42$ ist stetig,

also $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = p(2) = 2^{10} - 3 \cdot 2^5 + 6 \cdot 2^2 - 42$

$= 1024 - 96 + 24 - 42 = 910$

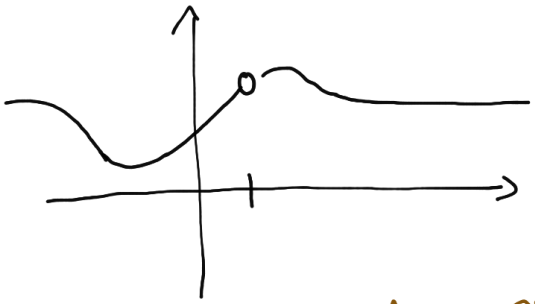
(d) Demnach sind auch alle rationalen Funktionen (Polynom / Polynom) stetig, z.B.

$r(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 1}$ (Def. bereich $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$)

$$r(x) = \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 1}$$ ist auf $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ stetig

$$r(x) = \frac{(x-1)(x+9)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+9}{x+1}$$

Folgt: $$\lim_{x \to 1} r(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x+9}{x+1} = \frac{1+9}{1+1} = 5$$



Beachte:

$$\tilde{r}(x) = \begin{cases} r(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \\ 5 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} \tilde{r}(x) \underset{\text{"}x \neq 1\text{"}}{=} \lim_{x \to 1} r(x) \underset{\text{s.o.}}{=} 5 = \tilde{r}(1)$$

$\tilde{r}(x)$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ stetig. (stetige Fortsetzung von $r(x)$)

Na klar: $$\tilde{r}(x) = \frac{x+9}{x+1}$$

Verkettete Funktionen (Hintereinanderschaltung)

$$h(x) = 2^{\cos x}$$

entsteht durch Einsetzen von $\cos x$ $(= g(x))$ in die Funktion $f(x) = 2^x$.

$g : D_g \to \mathbb{R}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$

mit: $g(x) \in D_f$ für jedes $x \in D_g$.

Dann bilde neue Funktion

$$f \circ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Verkettung / Hintereinanderschaltung von f und g.

<u>Bsp</u>: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = \sqrt{x}$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

genauer: $f \circ g : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1.9 Satz:

Vorgelegt: $f: D_f \to \mathbb{R}$ Funktion

$g: D_g \to \mathbb{R}$ Funktion mit $g(x) \in D_f$ für alle $x \in D_g$

Zahlen $x_0 \in D_g$ und $y_0 = g(x_0) \in D_f$.

Voraussetzung: g ist stetig in x_0 und

f ist stetig in $y_0 = g(x_0)$

Dann ist $f \circ g$ in x_0 stetig.

Denn: $\underline{x \approx x_0} \rightsquigarrow g(x) \approx g(x_0) = y_0 \rightsquigarrow \underline{f(g(x)) \approx f(y_0) = f(g(x_0))}$

$(f \circ g)(x) \approx (f \circ g)(x_0)$ ✓

Bsp: $h(x) = 2^{\cos x - \sin x^2}$ ist stetig.

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}} 2^{\cos x - \sin x^2} = 2^{\cos \sqrt{\pi} - \sin \sqrt{\pi}^2} = 2^{\cos \sqrt{\pi}}$$

Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{3+x^2}{2+x^4} + \cos x} \cdot 2^{\frac{\cos x}{4+\sin x}} + 2^{(2^x)}}{2^{2^x - \cos(x^2+3) + \sin(\cos(\sin(\cos(x))))}}$$

ist aus den stetigen Funktionen

$b_1(x) = x$, $b_2(x) = \cos x$, $b_3(x) = \sin x$, $b_4(x) = 2^x$, $b_5(x) = \sqrt{x}$

per $+ | - | \cdot |$: und Verkettung zusammengesetzt

UND DAMIT IST $f(x)$ EINE STETIGE FUNKTION.

Stetige Bausteine sind:

- Polynome
- rationale Funktionen
- Wurzelfunktionen $w(x) = \sqrt[n]{x}$
- Winkelfunktionen sin, cos, tan
- $f(x) = c^x$ mit $c > 0$
- $f(x) = \log_c x$ mit $c > 0$

das ist die Zahl, mit der man c potenzieren muss, um x zu erhalten.

$\log_{10} 1000 = 3$, denn $10^3 = 1000$

$\log_2 512 = 9$, denn $2^9 = 512$

Hausaufgabe 02B :

Zeige ausführlich, dass

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{3^x - 2^x}$$

eine stetige Funktion ist.

Wie lautet der maximal mögliche Definitionsbereich dieser Funktion?

$g(x) = \frac{x+1}{3-2^x}$:

$x+1$ ist als Polynom stetig

2^x ist stetig, also auch $3-2^x$

Also ist $\frac{x+1}{3-2^x}$ stetig