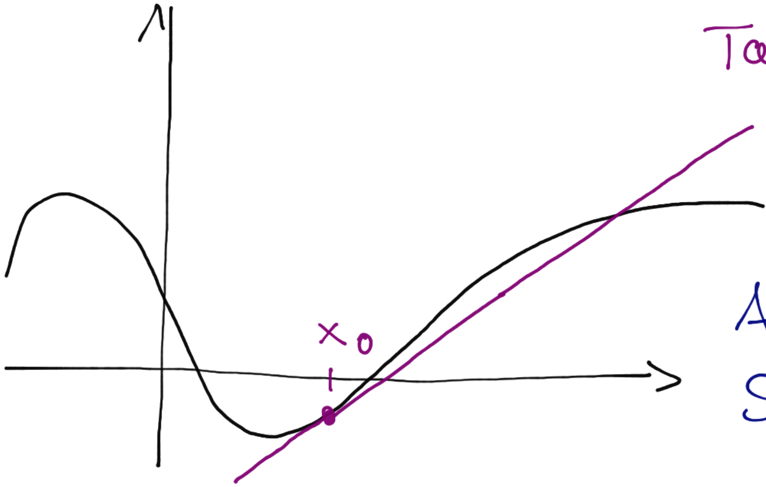
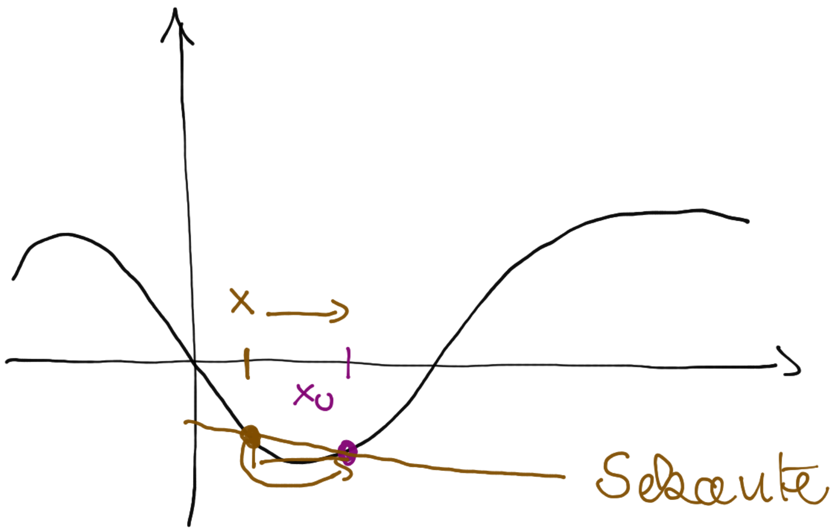
§2: Differentialrechnung



Tangente an f in x_0

$y = f(x)$

Ableitung von f in x_0: Steigung der Tangente ($f'(x_0)$)



Sekantensteigung:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Idee ($x \to x_0$)

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

2.1 Definition

Vorgelegt ist eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in D$.

Dann heißt f in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ existiert.

Dann schreibe $f'(x_0) = L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

dies ist die Ableitung von f in x_0.

Notiz: Ist f in jedem x_0 differenzierbar, so erhalte neue Funktion $f' : D_f \to \mathbb{R}$.

Beispiel: $f(x) = m \cdot x + b$

Differenzenquotient: $(x \neq x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{(m \cdot x + b) - (m \cdot x_0 + b)}{x - x_0}$$

$$= \frac{m \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = m$$

Also: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} m = m.$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0$$

Also: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$

(Ableitung: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$)

Nützliche Gleichung: Für $a \neq b$ gilt

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

z.B. $\displaystyle \frac{a^5 - b^5}{a-b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$

Begründung: $(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \cdot (a-b)$

$$= a^n + a^{n-1}\cdot b + a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}$$
$$- a^{n-1}\cdot b - a^{n-2}\cdot b^2 - \dots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n$$

$$= a^n - b^n$$

Teilen durch $a-b$ zeigt die Behauptung.

Übung: Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Lösung: $\frac{f(x) - f(-2)}{x-(-2)} = \frac{x^3 - (-2)^3}{x-(-2)}$

$\underset{(s.o.)}{=} x^2 + x \cdot (-2) + (-2)^2$

Also: $f'(-2) = \lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} \underbrace{x^2 + x \cdot (-2) + (-2)^2}_{\text{Polynom in } x \text{, also stetig, also: Grenzwert durch Einsetzen!}} = (-2)^2 + (-2) \cdot (-2) + (-2)^2$

$= 3 \cdot (-2)^2 = \underline{\underline{12}}$

Völlig analog: $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2$, kurz: $(x^3)' = 3x^2$

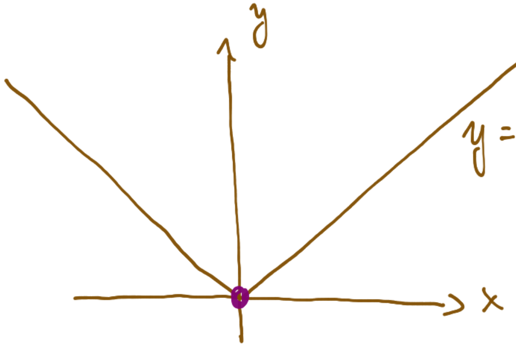
Hausaufgabe 04 A:

Vorgelegt ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$.

(a) Berechne $f'(2)$.

(b) Berechne $f'(x_0)$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.

<u>Beispiel</u> $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$



Für $x_0 > 0$ argumentiere wie folgt
$\lim\limits_{x \to x_0}$ " hängt nur von x mit
$x \approx x_0$ ab. Darf also voraussetzen: $x > 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{f. } x_0 > 0$$

Analog $f'(x_0) = -1$ für $x_0 < 0$

Für $x_0 = 0$: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x}{x} = 1$ für $x > 0$

und $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{-x}{x} = -1$ für $x < 0$

Differenzenquotient nimmt Werte $+1$ und -1 in bel. Intervallen $(0-\delta, 0+\delta)$ an, also gibt es $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ nicht.

Also: $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ <u>nicht</u> differenzierbar.

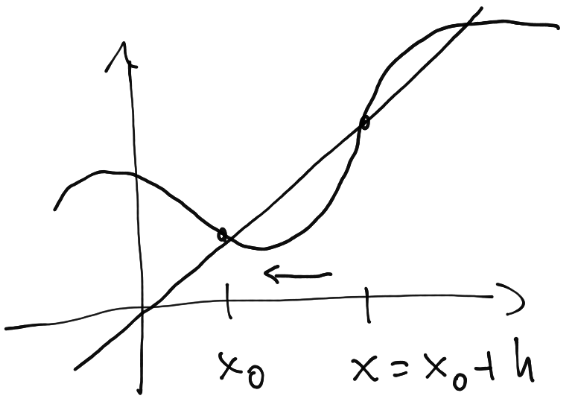
2.2 Die "h-Methode"

Existiert einer der Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ oder $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, so existiert auch der andere und beide sind gleich.

Also: kann die Ableitung stets als

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}}$$

berechnen.



Bsp: $f(x) = x^2$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot 3 \cdot h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{(6+h)}_{\text{Pol. in } h} = 6 + 0 = 6.$$

2.3 Satz: Vorgelegt: $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$.

Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es eine Zahl a und eine Funktion $r : D_f \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x) \quad \text{für alle } x \in D_f$$

und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{x - x_0} = 0$ gilt.

In diesem Fall gilt $a = f'(x_0)$.

Begründung $\quad r(x) = f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a = 0 \quad \text{genau dann, wenn } a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + r(x)$

  $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) = f'(x_0)\cdot x + \left(f(x_0) - x_0\cdot f'(x_0)\right)$

  Gerade mit Steigung $f'(x_0)$ durch $(x_0, f(x_0))$,

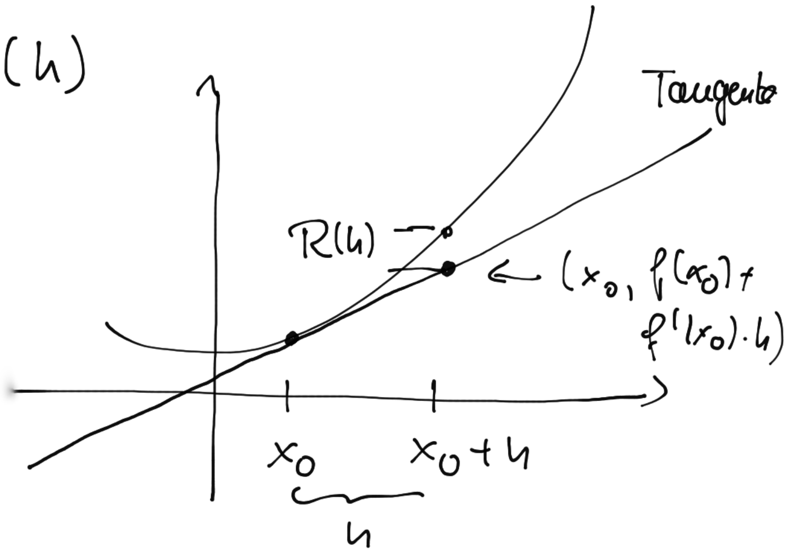
  d.h. das ist die Tangente in x_0 !

- Ersetzen von x durch $x_0 + h$ führt auf

  $$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + R(h)$$

  $$\text{mit } \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$$

  (Dabei $R(h) = r(x_0 + h)$)



2.4 Satz. Vorgelegt ist eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in D_f$. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es eine Funktion $\varphi(h)$, die in $h = 0$ stetig ist, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \varphi(h) \cdot h$$

für alle sinnvollen h (d.h. $x_0 + h \in D_f$) gilt.

In diesem Fall gilt $f'(x_0) = \varphi(0) \left(= \lim\limits_{h \to 0} \varphi(h)\right)$

$$\varphi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & \text{für } h \neq 0 \\ \varphi(0) & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

mit $\varphi(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \varphi(h)$

(Stetigkeit in $h = 0$)

<u>Beispiel</u> : $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $f'(x) = 2x$

- $f(2+h) = f(2) + f'(2) \cdot h + R(h)$

  $(2+h)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot h + R(h)$

  $(2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$, also $R(h) = h^2$

  mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h = 0$ ✓

  [$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + R(h)$]

- $f(2+h) = f(2) + \varphi(h) \cdot h$

  $(2+h)^2 = 2^2 + (4+h) \cdot h$, d.h. $\varphi(h) = 4+h$

  $\varphi(h)$ ist in $h=0$ stetig, also ist f in $x_0 = 2$ differenzierbar und $f'(2) = \varphi(0) = 4+0 = 4$.

<u>Übung</u>: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$.

Zeige die Differenzierbarkeit in $x_0 = 3$ mit Hilfe von Satz 2.3 und berechne die Ableitung.

<u>Lösung</u>

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$
\begin{aligned}
f(3+h) &= (3+h)^3 - (3+h)^2 + 2 \\
&= 3^3 + 3^3 \cdot h + 3^2 \cdot h^2 + h^3 - 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot h - h^2 + 2 \\
&= \underbrace{3^3 - 3^2 + 2}_{= f(3)} + (3^3 - 2 \cdot 3) \cdot h + (3^2 + h - 1) \cdot h^2 \\
&= \underbrace{20}_{= f(3)} + \underbrace{21}_{a} \cdot h + \underbrace{(8+h) \cdot h^2}_{R(h)}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.
\end{aligned}
$$

Satz 2.3: f ist in $x_0 = 3$ differenzierbar mit Ableitung

$a = 21 = f'(3)$.

Übung: $f(x) = x^3 - x + 8$

Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in $x_0 = -2$ mit Hilfe von Satz 2.4 und berechne $f'(-2)$.

Lösung

$$f(-2+h) = (-2+h)^3 - (-2+h) + 8$$
$$= (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 h + 3\cdot(-2) h^2 + h^3 - (-2) - h + 8$$
$$= \underbrace{4}_{f(-2)} + h \cdot \underbrace{(11 - 6h + h^2)}_{\varphi(h) \text{ ist stetig in } h=0}$$

(2.4): f ist differenzierbar in $x_0 = -2$ mit $f'(-2) = \varphi(0) = 11$.

Übung: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in $x \neq 0$ mit Hilfe der Definition und bestimme $f'(x)$.

Lösung: (h-Methode)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h} \cdot x \cdot (x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\underbrace{x \cdot (x+h)}_{\text{stetig in } h=0}} = \frac{-1}{x^2}$$

Grenzwert durch Einsetzen

Hausaufgabe 04 B:

(a) Berechne $f'(x)$ für $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $(x \neq -1)$.

(b) Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x) = x^5 - x^3$ mit Hilfe von Satz 2.4 und berechne $f'(x)$.

Hinweis: $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$

$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

(Pascalsches Dreieck)