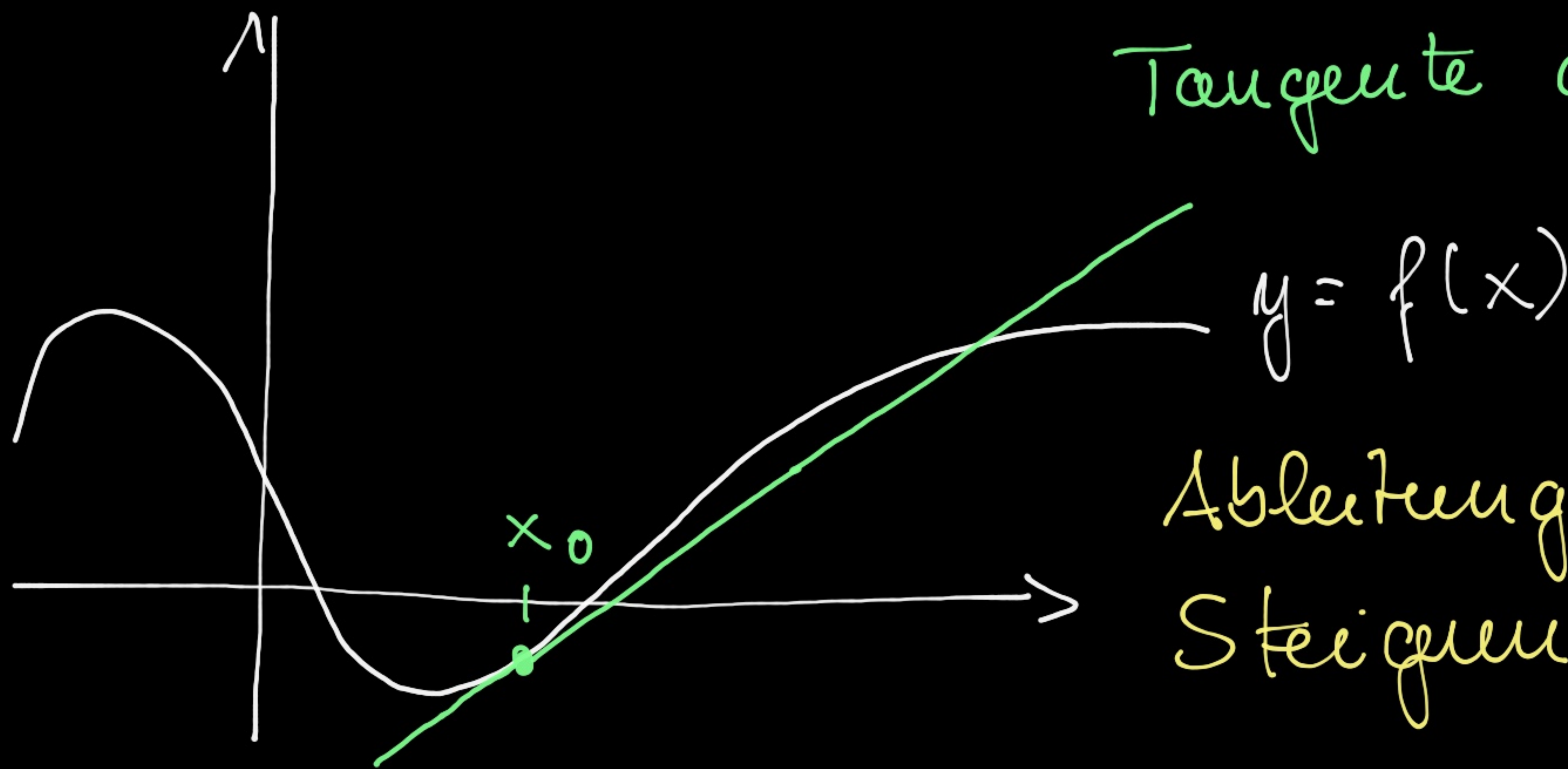
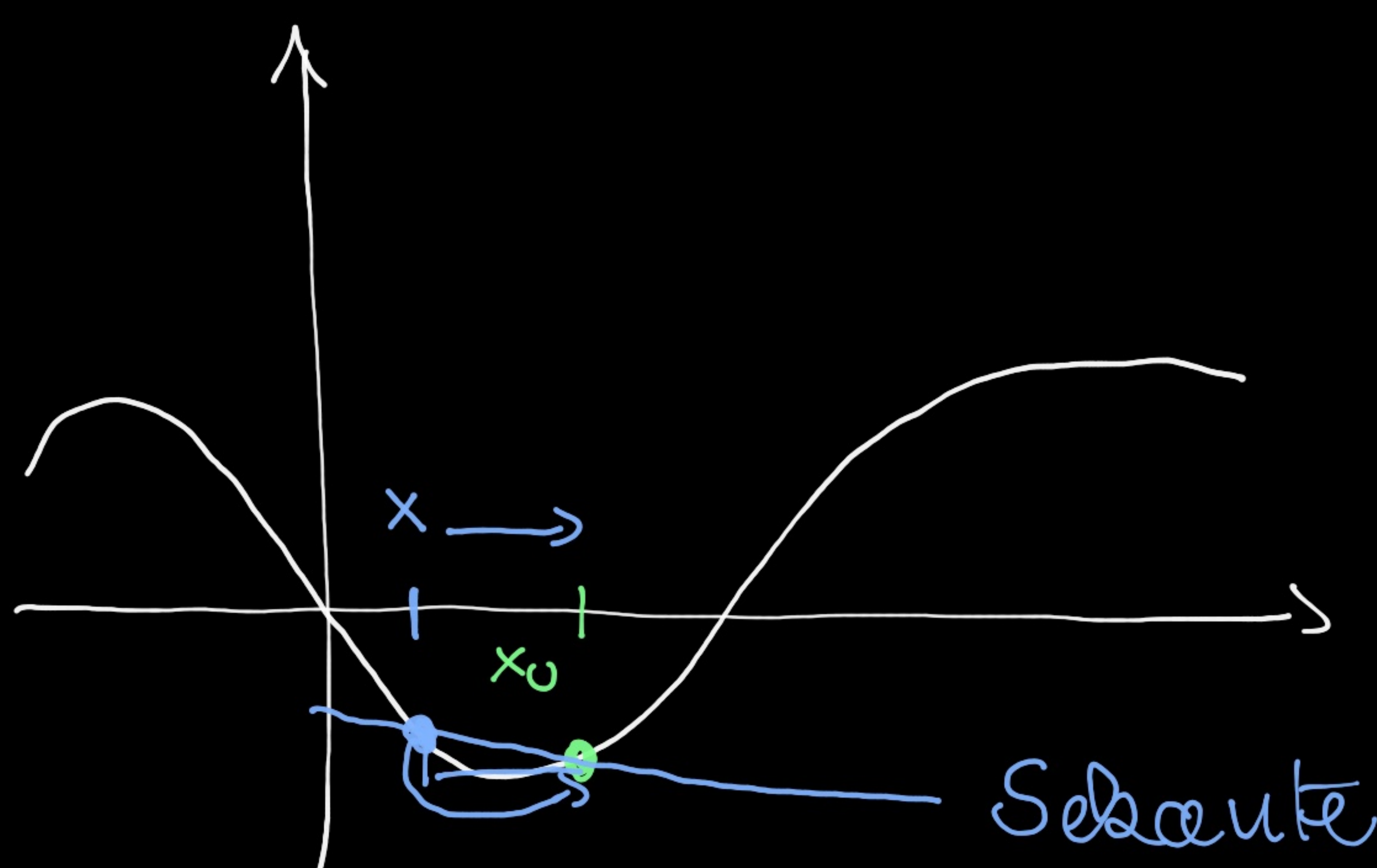
§2: Differentialrechnung

Tangente an f in x_0



Ableitung von f in x_0:
Steigung der Tangente $\quad (f'(x_0))$



Sekantensteigung:

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Idee $\quad (x \to x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

2.1 Definition

Vorgelegt ist eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in D$.

Dann heißt f **in x_0 differenzierbar**, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ existiert.

Dann schreibe $f'(x_0) = L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

dies ist die **Ableitung von f in x_0**.

Notiz: Ist f in jedem x_0 differenzierbar, so erhalte neue Funktion $f' : D_f \to \mathbb{R}$.

Beispiel: $f(x) = m \cdot x + b$

Differenzenquotient: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(m \cdot x + b) - (m \cdot x_0 + b)}{x - x_0}$
$(x \neq x_0)$

$$= \frac{m \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = m$$

Also: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} m = m.$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

Also: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$

(Ableitung: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$)

Nützliche Gleichung: Für $a \neq b$ gilt

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}$$

z.B. $$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4$$

Begründung. $(a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}) \cdot (a - b)$

$$= a^n + a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + a^2 b^{n-2} + a b^{n-1}$$
$$- a^{n-1} \cdot b - a^{n-2} \cdot b^2 - \dots - a^2 b^{n-2} - a b^{n-1} - b^n$$

$$= a^n - b^n$$

Teilen durch $a - b$ zeigt die Behauptung.

Übung: Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Lösung:
$$\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{x^3 - (-2)^3}{x - (-2)} \underset{(s.o.)}{=} x^2 + x \cdot (-2) + (-2)^2$$

Also:
$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2} \underbrace{x^2 + x \cdot (-2) + (-2)^2}_{\text{Polynom in } x \text{, also stetig, also: Grenzwert durch Einsetzen!}} = (-2)^2 + (-2) \cdot (-2) + (-2)^2$$

$$= 3 \cdot (-2)^2 = \underline{\underline{12}}$$

Völlig analog: $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2$, kurz: $(x^3)' = 3x^2$

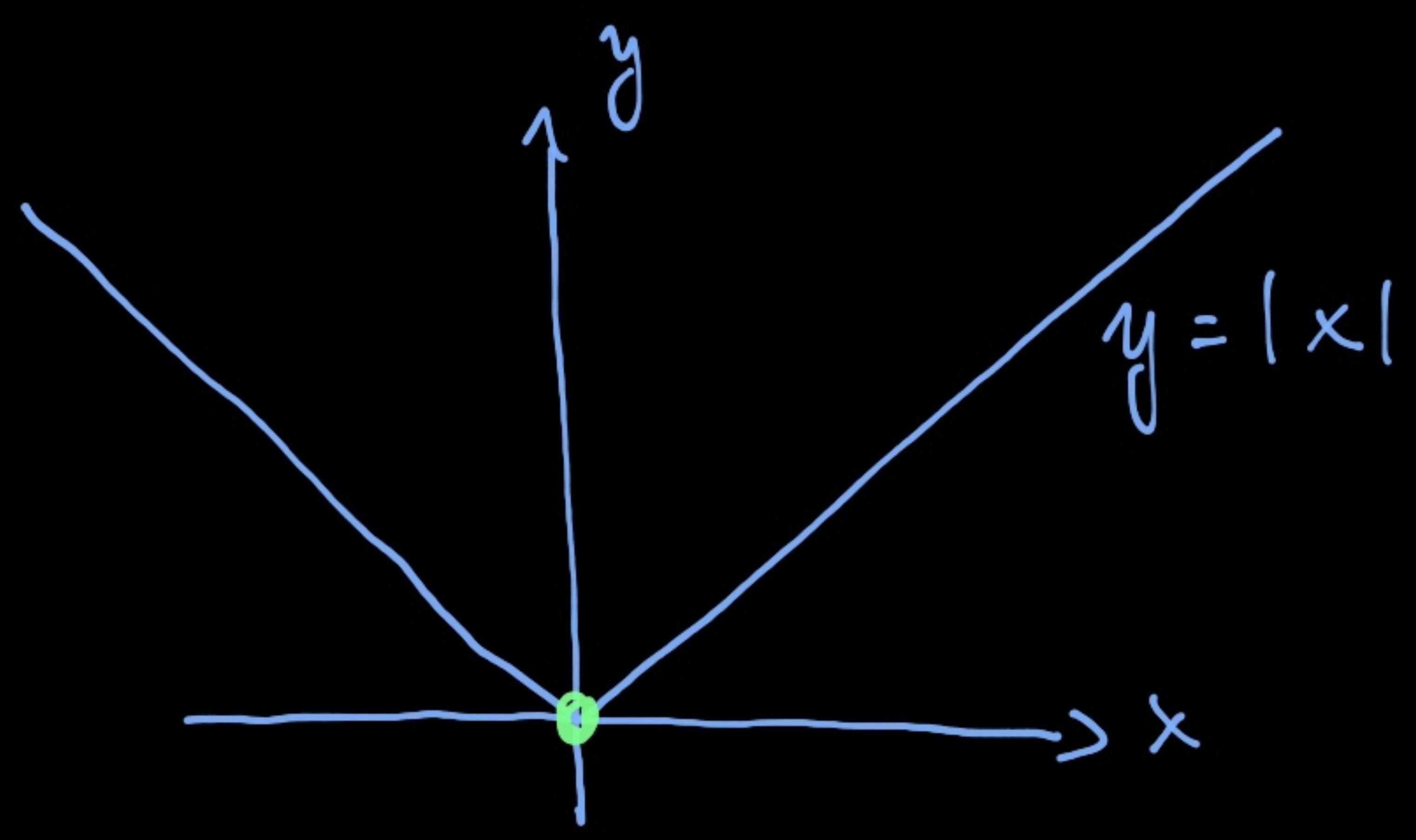
Hausaufgabe 04 A:

Vorgelegt ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$.

(a) Berechne $f'(2)$.

(b) Berechne $f'(x_0)$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.

Beispiel $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \ge 0 \\ -x & \phantom{\text{für }} x \le 0 \end{cases}$



Für $x_0 > 0$ argumentiere wie folgt: $\lim\limits_{x \to x_0}$ "..." hängt nur von x mit $x \approx x_0$ ab. Darf also voraussetzen: $x > 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{f. } x_0 > 0$$

Analog $f'(x_0) = -1$ für $x_0 < 0$

Für $x_0 = 0$: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x}{x} = 1$ für $x > 0$

und $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{-x}{x} = -1$ für $x < 0$

Differenzenquotient nimmt Werte $+1$ und -1 in bel. Intervallen $(0 - \delta, 0 + \delta)$ an, also gibt es $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ nicht.

Also: $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

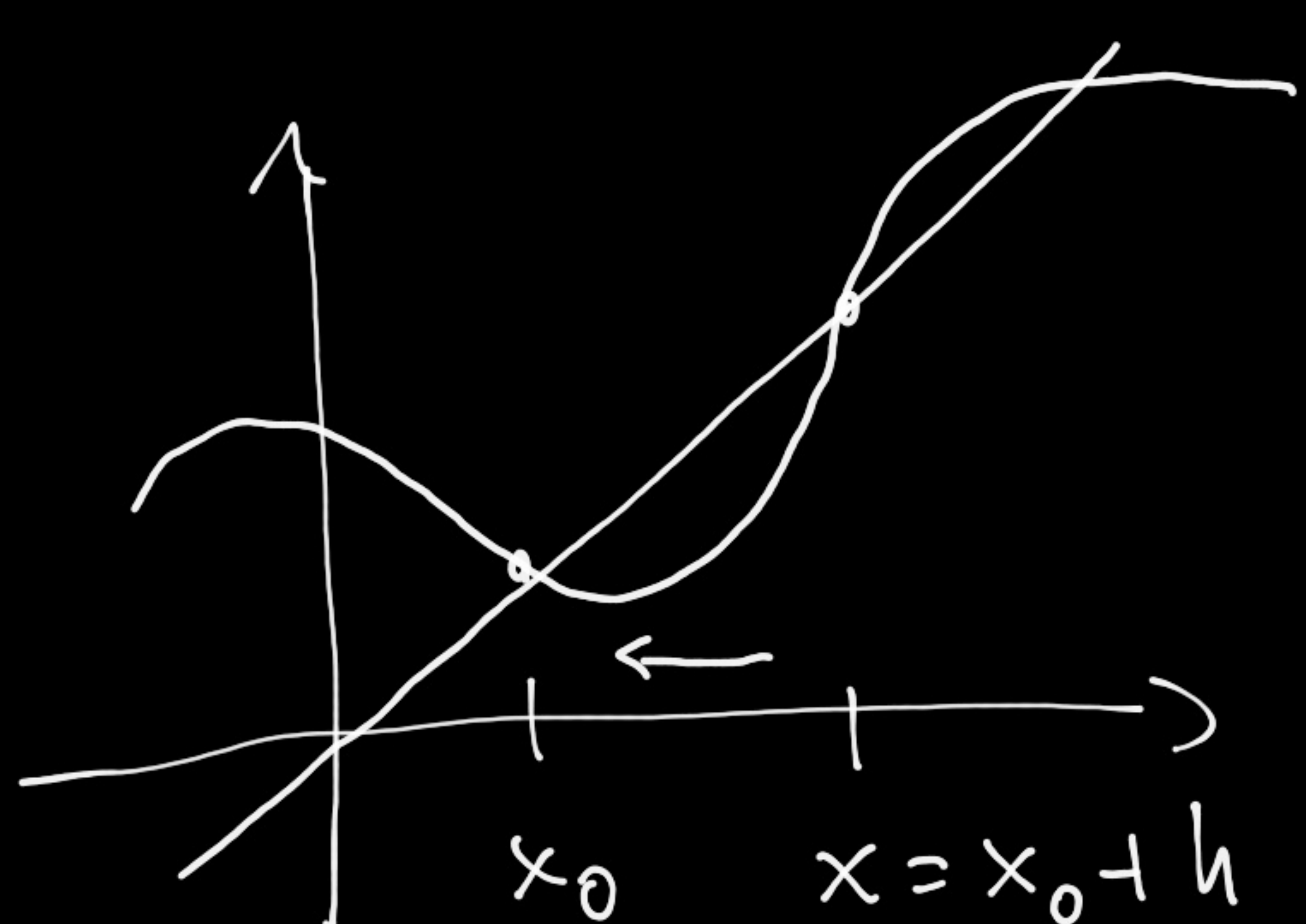
2.2 Die "h-Methode"

Existiert einer der Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ oder $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, so existiert auch der andere und beide sind gleich.

Also: Kann die Ableitung stets als

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}}$$

berechnen.



Bsp: $f(x) = x^2$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot 3 \cdot h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{(6 + h)}_{\text{Pol. in } h} = 6 + 0 = 6.$$

2.3 Satz: Vorgelegt: $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$.

Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es eine Zahl a und eine Funktion $r : D_f \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x) \text{ für alle } x \in D_f$$

und $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ gilt.

In diesem Fall gilt $a = f'(x_0)$.

Begründung $\quad r(x) = f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a = 0$$ genau dann, wenn $a = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x)$

  $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot x + (f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0))$

  Gerade mit Steigung $f'(x_0)$ durch $(x_0, f(x_0))$,

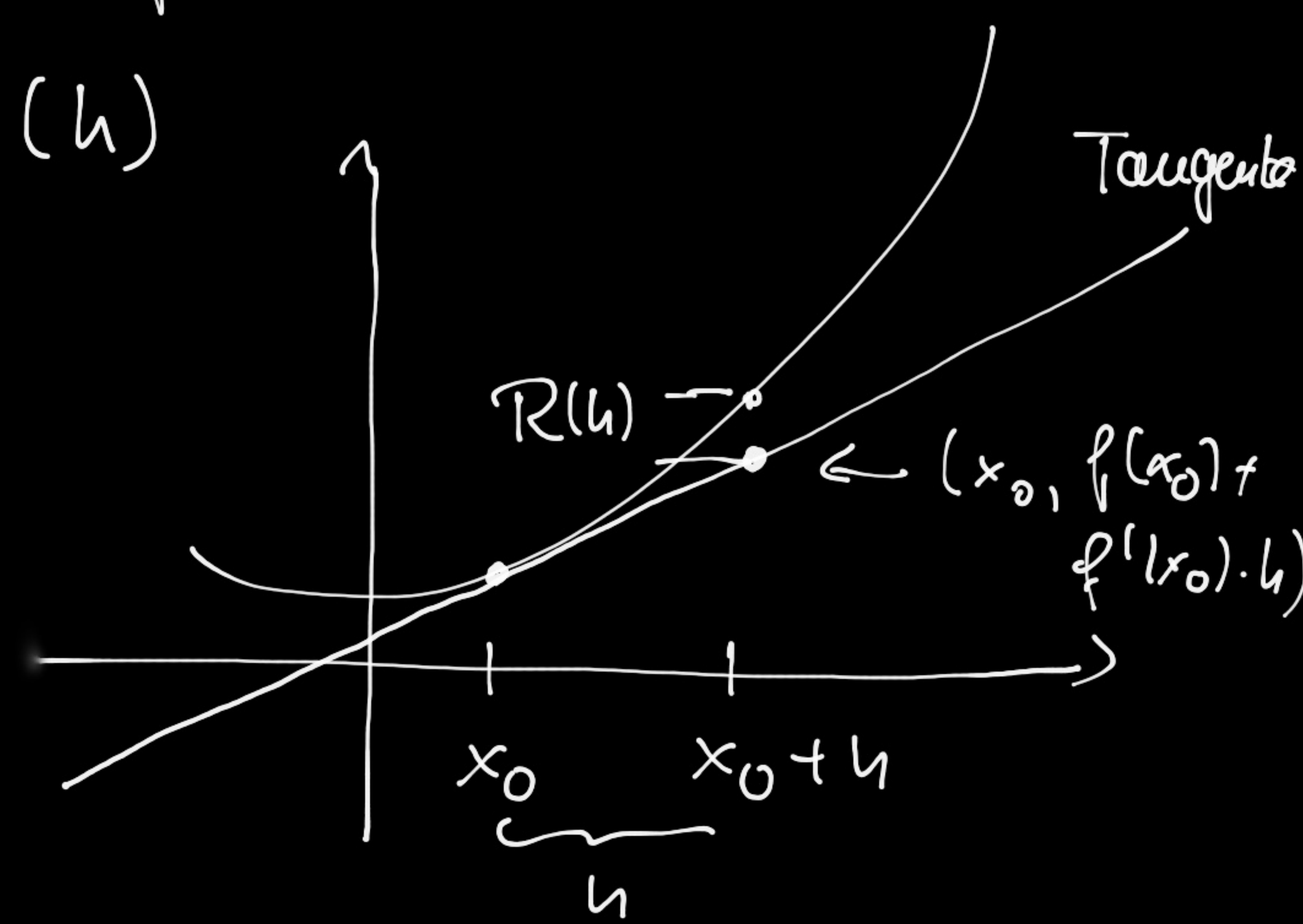
  d.h. das <u>ist</u> die Tangente in x_0 !

- Ersetzen von x durch $x_0 + h$ führt auf

  $$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + R(h)$$

  mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$

  (Dabei $R(h) = r(x_0 + h)$)



2.4 Satz. Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in D_f$. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es eine Funktion $\varphi(h)$, die in $h=0$ stetig ist, so dass

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h) \cdot h$$

für alle sinnvollen h (d.h. $x_0+h \in D_f$) gilt.

In diesem Fall gilt $f'(x_0) = \varphi(0) \left(= \lim_{h \to 0} \varphi(h) \right)$

$$\varphi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & \text{für } h \neq 0 \\ \varphi(0) & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

mit $\varphi(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \varphi(h)$

(Stetigkeit in $h=0$)

<u>Beispiel</u>: $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $f'(x) = 2x$

- $f(2+h) = f(2) + f'(2)\cdot h + R(h)$
  $(2+h)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot h + R(h)$
  $(2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$, also $R(h) = h^2$
  mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$ ✓

  [$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + R(h)$]

- $f(2+h) = f(2) + \varphi(h)\cdot h$
  $(2+h)^2 = 2^2 + (4+h)\cdot h$, d.h. $\varphi(h) = 4+h$
  $\varphi(h)$ ist in $h=0$ stetig, also ist f in $x_0 = 2$ differenzierbar und $f'(2) = \varphi(0) = 4+0 = 4$.

Übung: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$.

Zeige die Differenzierbarkeit in $x_0 = 3$ mit Hilfe von Satz 2.3 und berechne die Ableitung.

Lösung

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$
\begin{aligned}
f(3+h) &= (3+h)^3 - (3+h)^2 + 2 \\
&= 3^3 + 3^3 \cdot h + 3^2 \cdot h^2 + h^3 - 3^2 - 2\cdot 3 \cdot h - h^2 + 2 \\
&= \underbrace{3^3 - 3^2 + 2}_{= f(3)} + (3^3 - 2\cdot 3)\cdot h + (3^2 + h - 1)\cdot h^2 \\
&= \underbrace{20}_{= f(3)} + \underbrace{21}_{a} \cdot h + \underbrace{(8+h)\cdot h^2}_{R(h)}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.
\end{aligned}
$$

Satz 2.3: f ist in $x_0 = 3$ differenzierbar mit Ableitung

$$a = 21 = f'(3).$$

Übung: $f(x) = x^3 - x + 8$

Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in $x_0 = -2$ mit Hilfe von Satz 2.4 und berechne $f'(-2)$.

Lösung

$$
\begin{aligned}
f(-2+h) &= (-2+h)^3 - (-2+h) + 8 \\
&= (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 h + 3\cdot(-2) h^2 + h^3 \\
&\quad - (-2) - h + 8 \\
&= \underbrace{4}_{f(-2)} + h \cdot \underbrace{(11 - 6h + h^2)}_{\varphi(h) \text{ ist stetig in } h=0}
\end{aligned}
$$

(2.4): f ist differenzierbar in $x_0 = -2$

mit $f'(-2) = \varphi(0) = 11$.

Übung: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in $x \neq 0$ mit Hilfe der Definition und bestimme $f'(x)$.

Lösung: (h-Methode)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h} \cdot x \cdot (x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\underbrace{x \cdot (x+h)}_{\substack{\text{stetig in } h=0 \\ \text{Grenzwert durch Einsetzen}}}} = \frac{-1}{x^2}$$

Hausaufgabe 04 B:

(a) Berechne $f'(x)$ für $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $\quad (x \neq -1)$.

(b) Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x) = x^5 - x^3$ mit Hilfe von Satz 2.4 und berechne $f'(x)$.

Hinweis: $$(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$$

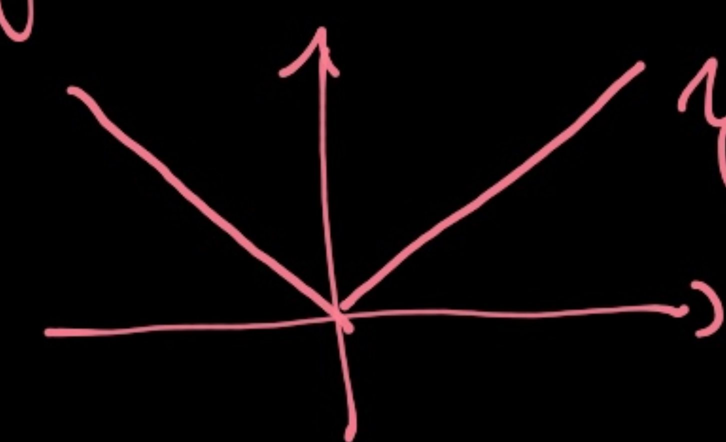
$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

(Pascalsches Dreieck)

2.5 Notiz: Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$, die in $x_0 \in D_f$ differenzierbar ist. Dann ist f in x_0 stetig.

⚠ Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, z.B.

$f(x) = |x|$



$y = |x|$ ist stetig ✓

In $x_0 = 0$ nicht diff'bar: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

hat keinen Grenzwert für $x \to 0$

Zur Notiz: Zeige $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Stetigkeit in x_0)

- Wissen $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

  $\leftarrow$ geht auch gegen 0 ✓

  $\leftarrow$ geht für $x \to x_0$ gegen x_0

- $f(x_0 + h) = f(x_0) + \varphi(h) \cdot h$ mit φ in $h = 0$ stetig

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} f(x_0) + \varphi(h) \cdot h = f(x_0) + \varphi(0) \cdot 0$$
$$= f(x_0) \qquad \square$$

2.6 Rechenregeln

Vorgelegt: Funktionen $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$.

Voraussetzung: f und g sind in $x_0 \in D_f \cap D_g$ diff'bar

Schnittmenge $D_f \cap D_g = \{ x \mid x \in D_f \text{ und } x \in D_g \}$

Dann gilt:

(a) Die Funktion $h = f+g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$,
$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
ist in x_0 differenzierbar. Dabei gilt
$$h'(x_0) = \boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

(b) $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

(c) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (Produktregel)

(d) Falls $g(x_0) \neq 0$, so gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g(x_0)^2}$

Quotientenregel

Speziell: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beispiele:

(a) $f(x)$ konstant $\rightsquigarrow$ $f'(x_0) = 0$

$f(x) = c$ (f. alle x), $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$ ✓

(b) $f(x) = x$ hat die Ableitung $f'(x_0) = 1$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$ ✓

(c) $h(x) = c \cdot f(x)$, f ist diff'bar

$h'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

Dazu: $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ mit $g(x) = c$, also $g'(x_0) = 0$

Jetzt Produktregel.

Oder: $\underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}_{h'(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{c \cdot f'(x_0)}$

(d) $h(x) = x^2 = f(x) \cdot g(x)$ mit $f(x) = x = g(x)$

Produktregel: $h'(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{=1} \cdot \underbrace{g(x_0)}_{=x_0} + \underbrace{f(x_0)}_{=x_0} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{=1} = 2x_0$

(e) $h(x) = x^3 = x \cdot x^2 = f(x) \cdot g(x)$
mit $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $f'(x_0) = 1$, $g'(x_0) = 2x_0$

Produktregel: $h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

$= 1 \cdot x_0^2 + x_0 \cdot (2x_0) = 3x_0^2$

Allgemein: $\boxed{\text{Die Ableitung von } f(x) = x^n \text{ ist } f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}}$ (n natürliche Zahl)

Kurz: $\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$

Nachweis von (e): $(x^3)' = (x \cdot x^2)'$ | Produktregel

$= (x)' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot (2x) = 3x$

Nachweis der allg. Regel:

Falls man $(x^{n-1})' = (n-1) \cdot x^{n-2}$ schon bewiesen hat, so gilt $(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' =$

$= (x)' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$

$= n \cdot x^{n-1}$.

z.B $n = 4$: $(x^3)' = (x^{4-1})' = 3 \cdot x^2$

$\rightsquigarrow$ $(x^4)' = 4 \cdot x^3$

(f) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 42$

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + 42)'$$
$$= (x^3) - (2x^2)' + (5x)' + (42)'$$
$$= 3x^2 - 2(x^2)' + 5\cdot(x)' + 0$$
$$= 3x^2 - 2\cdot(2x) + 5\cdot 1$$
$$= 3x^2 - 4\cdot x + 5$$

Summenregel

bish. Ergebnisse

(— " —)

Allgemein: $(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_2x^2 + c_1x + c_0)'$
$$= c_n\cdot(x^n)' + c_{n-1}(x^{n-1}) + \dots\dots c_1(x)' + (c_0)'$$
$$= n\cdot c_n\cdot x^{n-1} + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2c_2x + c_1$$

(g) $\left(\dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x + 42}{x^2 + 8x + 24}\right)'$

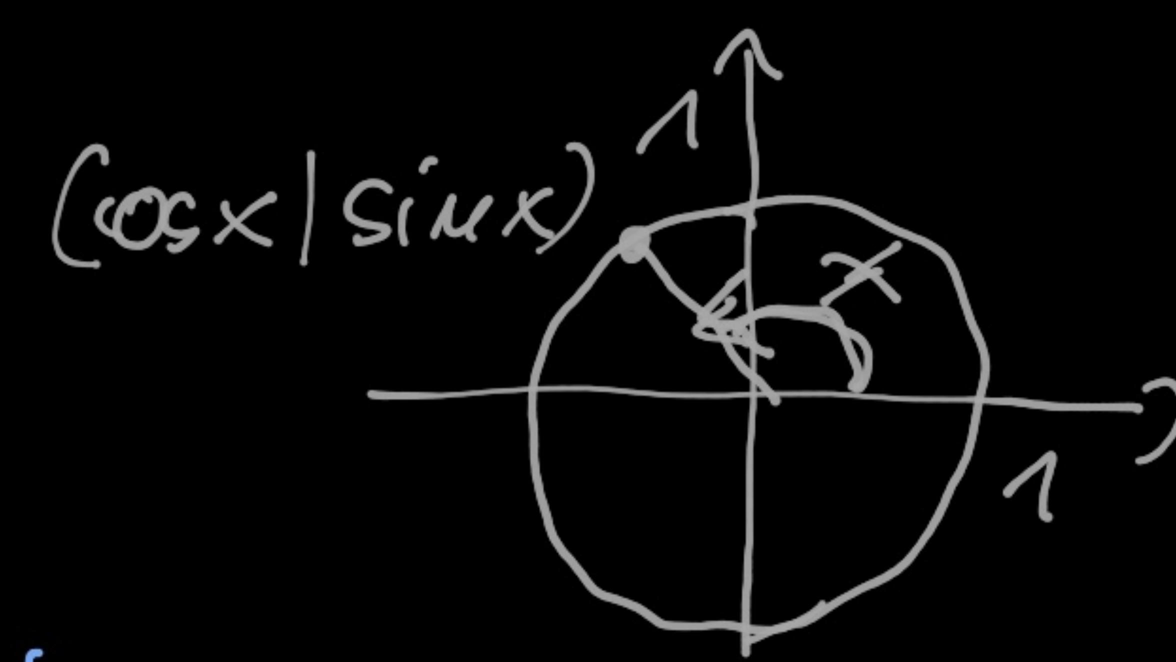
$$= \frac{(x^2+8x+24)\cdot(x^3-2x^2+5x+42)' - (x^2+8x+24)'\cdot(x^3-2x^2+5x+42)}{(x^2+8x+24)^2}$$
$$= \left[(x^2+8x+24)\cdot(3x^2-4x+5) - (2x+8)\cdot(x^3-2x^2+5x+42)\right] / (x^2+8x+24)^2$$
$$= \dots$$

(h) $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$ ⊛

$$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

Quotientenregel:

$$h'(x) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - g'(x) f(x)}{g(x)^2}$$



$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x)\cdot \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Schreibe
$\cos^2 x = (\cos x)^2$
$\sin^2 x = (\sin x)^2$

$$= \begin{cases} 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

(trigonometrische Pythagoras: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

⊛ x immer im Bogenmaß !

Wie weist man die Rechenregeln nach?

f, g sind in x_0 diff'bar; also

(1) $f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h)\cdot h$, $\quad \varphi(0) = f'(x_0)$
mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\varphi(h)$

(2) $g(x_0+h) = g(x_0) + \psi(h)\cdot h$, $\quad \psi(0) = g'(x_0)$
mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\psi(h)$.

(φ : phi
ψ : psi
χ : chi)

(a) $s(x) = f(x) + g(x)$

$$
\begin{aligned}
s(x_0+h) &= f(x_0+h) + g(x_0+h) \\
&\overset{(1.),(2.)}{=} f(x_0) + \varphi(h)\cdot h + g(x_0) + \psi(h)\cdot h \\
&= f(x_0) + g(x_0) + \underbrace{\{\varphi(h) + \psi(h)\}\cdot h}_{\chi(h)\cdot h} \\
&= s(x_0) + \chi(h)\cdot h
\end{aligned}
$$

χ ist in $h=0$ stetig, da Summe der dort stetigen Fkt. φ, ψ

Folgt: s ist in x_0 diff'bar, $s'(x_0) = \chi(0) = \varphi(0) + \psi(0)$
$= f'(x_0) + g'(x_0)$

(1) $f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h)\cdot h, \quad \varphi(0) = f'(x_0)$

mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\varphi(h)$

(2) $g(x_0+h) = g(x_0) + \psi(h)\cdot h, \quad \psi(0) = g'(x_0)$

mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\psi(h)$.

<u>Produktregel</u>: $p(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$
\begin{aligned}
p(x_0+h) &= f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) \\
&\overset{(1.),(2.)}{=} \big(f(x_0)+\varphi(h)\cdot h\big)\cdot\big(g(x_0)+\psi(h)\cdot h\big) \\
&= f(x_0)\cdot g(x_0) + \{\underbrace{\varphi(h)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\psi(h) + \varphi(h)\cdot\psi(h)\cdot h}_{=\chi(h)}\}\cdot h \\
&= p(x_0) + \chi(h)\cdot h
\end{aligned}
$$

$\chi(h)$ ist in $h=0$ stetig, da φ, ψ dies sind.

Also: $p(x)$ ist in x_0 diff'bar mit

$$
\begin{aligned}
p'(x_0) = \chi(0) &= \varphi(0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\psi(0) + \varphi(0)\cdot\psi(0)\cdot 0 \\
&= f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Hausaufgabe 05A:

(a) Zeige $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

Hinweis: $\frac{1}{g(x_0)+\varphi(h)\cdot h} - \frac{1}{g(x_0)} = \{\dots\}\cdot h$

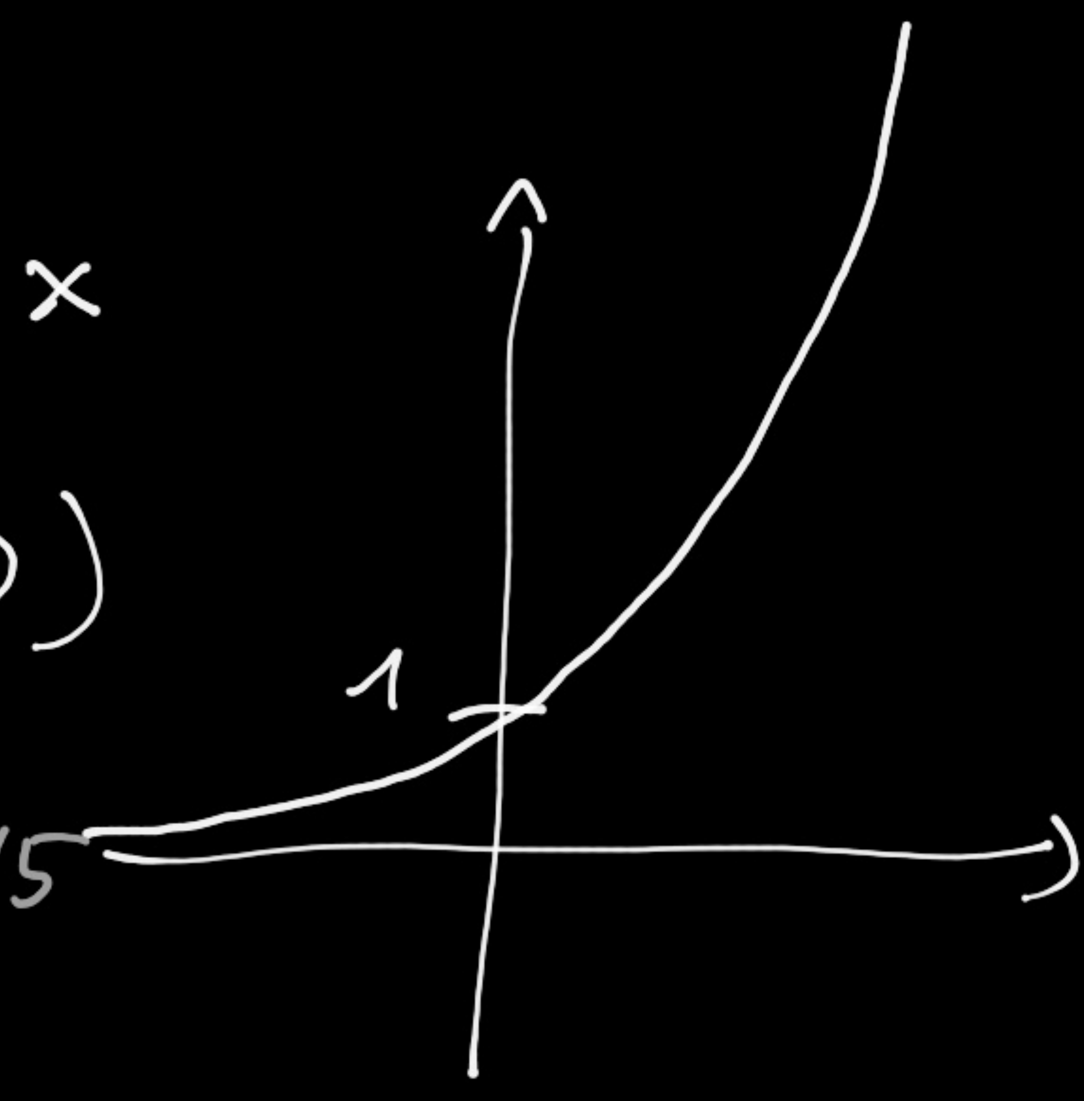
(b) Schließe $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$ aus (a)

Hinweis: Produktregel.

(c) Berechne die Ableitung von $f(x) = \frac{x^5 - 3x^2 + 6}{x^4 + x^2 + 1}$.

2.7 Die Eulersche Zahl e $\approx 2{,}718..$

exponentielles Wachstum : $f(x) = b^x$ $(b > 0)$



$2^{\sqrt{2}} = ?$

$2^{1,4} = 2^{7/5} = (2^7)^{1/5} = 128^{1/5}$

$= \sqrt[5]{128}$

Später: $f(x) = b^x$ ist differenzierbar

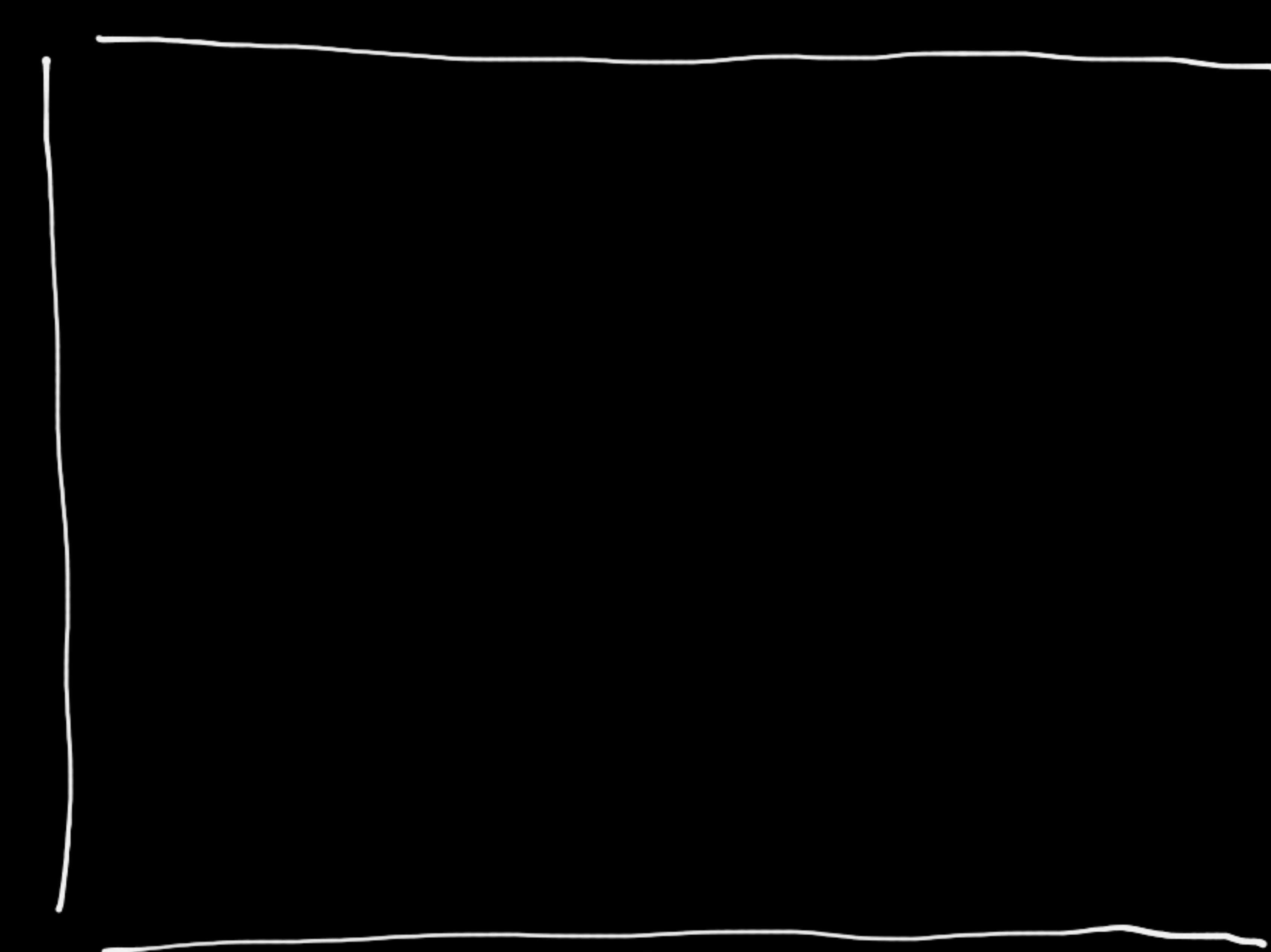
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h}$$

$b^{x+h} = b^x \cdot b^h$

$$= \underbrace{b^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}}_{f'(0)} = f'(0) \cdot f(x)$$

$f'(0) < 1$ für $b = 2$

$f'(0) > 1$ für $b = 3$



$g(h) = \dfrac{b^h - 1}{h}$

$h = -1 \;..\; 1$

Es gibt eine Zahl $b = e$ zwischen 2 und 3 mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Diese Zahl heißt <u>Eulersche Zahl</u> $e = 2{,}7\ldots$

Für $f(x) = e^x$ gilt $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

und damit $f'(x) = f'(0) \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

Kurz: $\boxed{(e^x)' = e^x}$

<u>Notiz</u>: $g'(x) = g(x)$ gilt für $g(x) = c \cdot e^x$ wobei c eine Konstante ist.

Differentialgleichung, DGL
ODE (ordinary differential equation)

2.8 Die Kettenregel

Zur Erinnerung: Verkettete Funktionen

Vorgelegt: Funktionen $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$

Voraussetzung: $g(x) \in D_f$ für jedes $x \in D_g$

Dann kann man $g(x)$ in $f(x)$ einsetzen: $f(g(x))$

und erhält eine neue Funktion

$$f \circ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Verkettung von f und g

Beispiel: $g(x) = \sin x$ für $0 \leq x \leq \pi$ (also $D_g = [0, \pi]$)

$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sqrt{\sin x}$

Zusätzliche Voraussetzung:

g ist diff'bar in x_0

f ist diff'bar in $g(x_0)$

Dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung

$$\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)}$$

Kettenregel

__Beispiel__ $p(x) = \cos(\sin x)$

$\cos$: f, $\sin$: g

$f'(x) = -\sin x$

$g'(x) = \cos x$

$$p'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= f'(\sin x) \cdot g'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

Nachweis der Kettenregel:

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + \varphi(h) \cdot h$$

mit $\varphi(h)$ ist stetig in $h=0$ und $\varphi(0) = g'(x_0)$

Mit $y_0 = g(x_0)$ gilt

$$f(y_0 + k) = f(y_0) + \psi(k) \cdot k$$

mit $\psi(k)$ ist stetig in $k=0$ und $\psi(0) = f'(y_0)$
$= f'(g(x_0))$

Jetzt rechne:

$$(f \circ g)(x_0 + h) = f(g(x_0 + h)) = f(\underbrace{g(x_0)}_{y_0} + \underbrace{\varphi(h) \cdot h}_{k})$$

$$= f(y_0) + \psi(k) \cdot k$$

$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{(f \circ g)(x_0)} + \underbrace{\{\psi(\varphi(h) \cdot h) \cdot \varphi(h)\}}_{\chi(h) \text{ ist stetig in } h=0} \cdot h$$

$f \circ g$ ist in x_0 diff'bar mit

$$(f \circ g)'(x_0) = \chi(0) = \psi(\underbrace{\varphi(0) \cdot 0}_{=0}) \cdot \varphi(0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \quad \blacksquare$$

Übung

(a) Falls wir bereits wüssten, dass $\sqrt{x}$ für $x > 0$ differenzierbar ist, wie könnte man $(\sqrt{x})'$ auf der Gleichung $(\sqrt{x})^2 = x$ per Kettenregel ermitteln?

Lösung: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = (\sqrt{x})^2$$

g diff'bar mit unbekannter Ableitung $g'(x) = (\sqrt{x})'$

f diff'bar mit $f'(x) = (x^2)' = 2x$

Aus $(\sqrt{x})^2 = x$ folgt

$$\boxed{1} = (x)' = ((\sqrt{x})^2)' = (f \circ g)'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) = \boxed{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})'}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(Gleichung auflösen)}$$

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir sehen $c = f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

(i) Sind $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Funktionen?

(ii) Berechne $(f \circ g)'$ und $(g \circ f)'$

(iii) Berechne für $(f \circ g)'$ sämtliche Nullstellen

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \le x \le \pi$

Lösung (i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{\sin x}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin 2^x$

$f \circ g \neq g \circ f$, denn $2^{\sin \frac{\pi}{2}} = 2^1 = 2 \neq \underbrace{\sin 2^{\pi/2}}_{\in [-1,1]}$

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir sehen $c = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

(ii) Berechne $(f \circ g)'$ und $(g \circ f)'$

(iii) Berechne für $(f \circ g)'$ sämtliche Nullstellen

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \leq x \leq \pi$

(ii) $(2^x)' = c \cdot 2^x$ siehe (2.7)

Kettenregel: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$= c \cdot 2^{g(x)} \cdot \cos x = c \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(f(x)) \cdot c \cdot 2^x$$

$$= c \cdot 2^x \cdot \cos(2^x)$$

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir sehen $c = f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

$(f \circ g)'(x) = c \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x$

(iii) Berechne für $(f \circ g)'$ sämtliche Nullstellen

$\underbrace{c}_{\neq 0} \cdot \underbrace{2^{\sin x}}_{> 0} \cdot \cos x = 0$ genau dann, wenn $\cos x = 0$,

also $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit k ganze Zahl.

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \leq x \leq \pi$

Größter Wert der stetigen Funktion $f \circ g$ auf dem abg. Intervall $[0, \pi]$

sogar diff'bar

Kandidaten: $x = 0$, $x = \pi$ (Randpunkte)

und Nullstellen der Ableitung in $(0, \pi)$,

d.h. $x = \frac{\pi}{2}$. Einsetzen $2^{\sin 0} = 1 = 2^{\sin \pi}$,

$2^{\sin \pi/2} = 2$ größter Wert $\overset{\nabla}{\circ}$

(c) Wie lautet die Ableitung der Funktion $\sqrt{1+2^{x^2+x+1}}$?

$w(x) = \sqrt{x}$, $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (s.o.)

$f(x) = 1 + 2^{x^2+x+1}$

$p(x) = x^2+x+1$, $p'(x) = 2x+1$

$m(x) = 1 + 2^x$, $m'(x) = (2^x)' = c \cdot 2^x$

mit $c = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$

$$\sqrt{1+2^{x^2+x+1}} = w(m(p(x)))$$

Ableitung $(w \circ m \circ p)'(x) = (w \circ (m \circ p))'(x)$

$= w'((m \circ p)(x)) \cdot (m \circ p)'(x)$ Kettenregel

$= w'(m(p(x))) \cdot m'(p(x)) \cdot p'(x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+2^{x^2+x+1}}} \cdot c \cdot 2^{p(x)} \cdot (2x+1)$

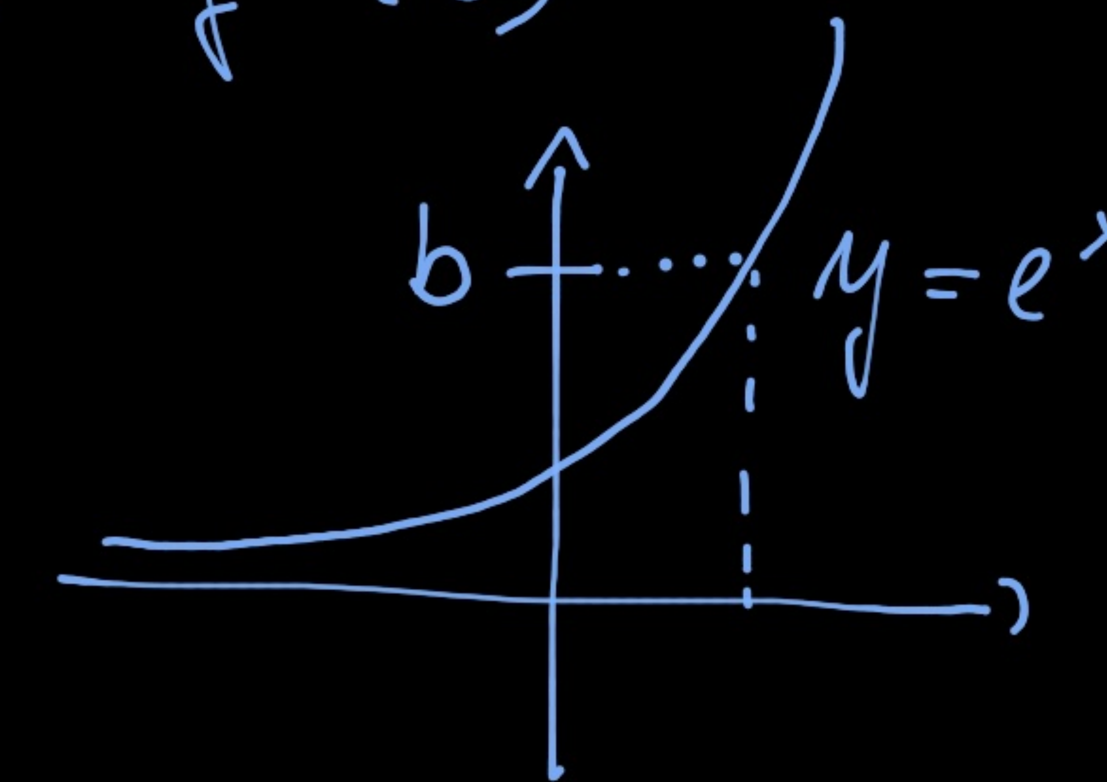
Hausaufgabe 05B:

Bilde die Ableitung der folgenden Funktion

$$f(x) = \frac{\left(\sin(x^2+1) + 3 \cdot \cos(x) \right)^4}{1 + e^{5\sqrt{x}}} \qquad (x > 0)$$

(d) Exponentialfunktion : $f(x) = b^x$

Ableitung $f'(x) = c \cdot b^x$ mit $c = f'(0)$



$b > 0$: Es gibt ein u mit $e^u = b$.

Potenzrechengesetz : $f(x) = b^x = (e^u)^x$

$$= e^{u \cdot x}$$

Ableiten mit Kettenregel (u ist eine Konstante)

$f(x) = m(n(x))$ mit $n(x) = u \cdot x$; $n'(x) = u$

$m(x) = e^x$; $m'(x) = e^x$

$$f'(x) = m'(n(x)) \cdot n'(x) = e^{u \cdot x} \cdot u = u \cdot b^x$$

d.h. $u = c$ bzw.

$(b^x)' = c \cdot b^x$ mit $e^c = b$ $[c = \ln b]$

z.B. $(2^x)' = c \cdot 2^x$ mit $e^c = 2$ $[c = \ln 2]$

2.9 Umkehrfunktionen

Vorgelegt: $f : D_f \to \mathbb{R}$ Funktion

Wann ist die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösbar.

<u>Bsp</u>: $f(x) = x^2 = y \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{y}$, falls $y \geq 0$

Per $D_f = [0, \infty)$ erhalte eindeutige Lösung $x = \sqrt{y}$, falls überhaupt lösbar.

Abhilfe bei Nicht-Lösbarkeit: Nur $y \in [0, \infty)$ zulassen.

$$f : \underbrace{[0, \infty)}_{= D_f} \longrightarrow \underbrace{[0, \infty)}_{= W_f}$$

"Wertebereich"

Für $y \in W_f$ gibt es genau ein x mit $f(x) = y$.

$f : D_f \longrightarrow W_f$ Funktion

$\uparrow$

$f(x) \in W_f$ für alle $x \in D_f$

Dann heißt f umkehrbar (bijektiv),
falls $y = f(x)$ für jedes $y \in W_f$ genau
eine Lösung $x \in D_f$ besitzt.

Erhalte so eine Funktion $g : W_f \longrightarrow D_f$
mit $y = f(g(y))$ für alle y. $(*)$
und $x = g(f(x))$ für alle x. $(**)$

$(*)$ bedeutet: $x = g(y)$ ist Lösung von $y = f(x)$

$(**)$ $x, \tilde{x}$ Lösungen von $f(x) = y = f(\tilde{x})$

$(**) \rightsquigarrow x = g(f(x)) = g(y) = g(f(\tilde{x})) = \tilde{x}$

$(**)$ bedeutet: Die Lösung ist eindeutig.

Definition: Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \longrightarrow W_f$.
Dann heißt f umkehrbar (invertierbar / bijektiv), falls die Gleichung $y = f(x)$ für jedes $y \in W_f$ genau eine Lösung x besitzt.

Erhalte dann eine neue Abbildung
$g: W_f \longrightarrow D_f$, $g(y) =$ Lösung von $y = f(x)$.

Diese Funktion heißt Umkehrfunktion von f.

Schreibe $g = f^{-1}$ (das ist NICHT $\frac{1}{f}$)

Beispiel: $f: [2, \infty) \longrightarrow [4, \infty)$; $f(x) = x^2$

$f^{-1}: [4, \infty) \longrightarrow [2, \infty)$; $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

2.10 Kennzeichnung der Umkehrfunktion

Vorgelegt: $f : D_f \to W_f$ Funktion

$id_{D_f} : D_f \to D_f$, $id_{D_f}(x) = x$ "Identität auf D_f"

$id_{W_f} : W_f \to W_f$, $id_{W_f}(x) = x$

Erinnerung: $g = f^{-1} : W_f \to D_f$ erfüllt

- $\underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)} = \underbrace{x}_{id_{D_f}}$ f. alle $x \in D_f$, also $g \circ f = id_{D_f}$
- $f \circ g = id_{W_f}$

(a) Genau dann ist f umkehrbar, wenn es eine Funktion $g : W_f \to D_f$ gibt mit $g \circ f = id_{D_f}$, $f \circ g = id_{W_f}$.
In diesem Fall gilt $g = f^{-1}$.

Dazu: Wenn f umkehrbar ist, so ist $g = f^{-1}$ so eine Fkt.

Umgekehrt: Gibt es eine solche Funktion g, so gilt

- $x = g(y)$ ist eine Lösung von $y = f(x)$
  Einsetzen: $y = f(g(y))$ stimmt ✓
- $x = g(y)$ ist die einzige Lösung von $y = f(x)$,
  d.h. ist $x = \tilde{x}$ eine Lösung (also $y = f(\tilde{x})$),
  so gilt $\tilde{x} = g(y)$

  Dazu wende g auf die Gleichung $y = f(\tilde{x})$ an:
  $g(y) = g(f(\tilde{x})) = \tilde{x}$ ✓

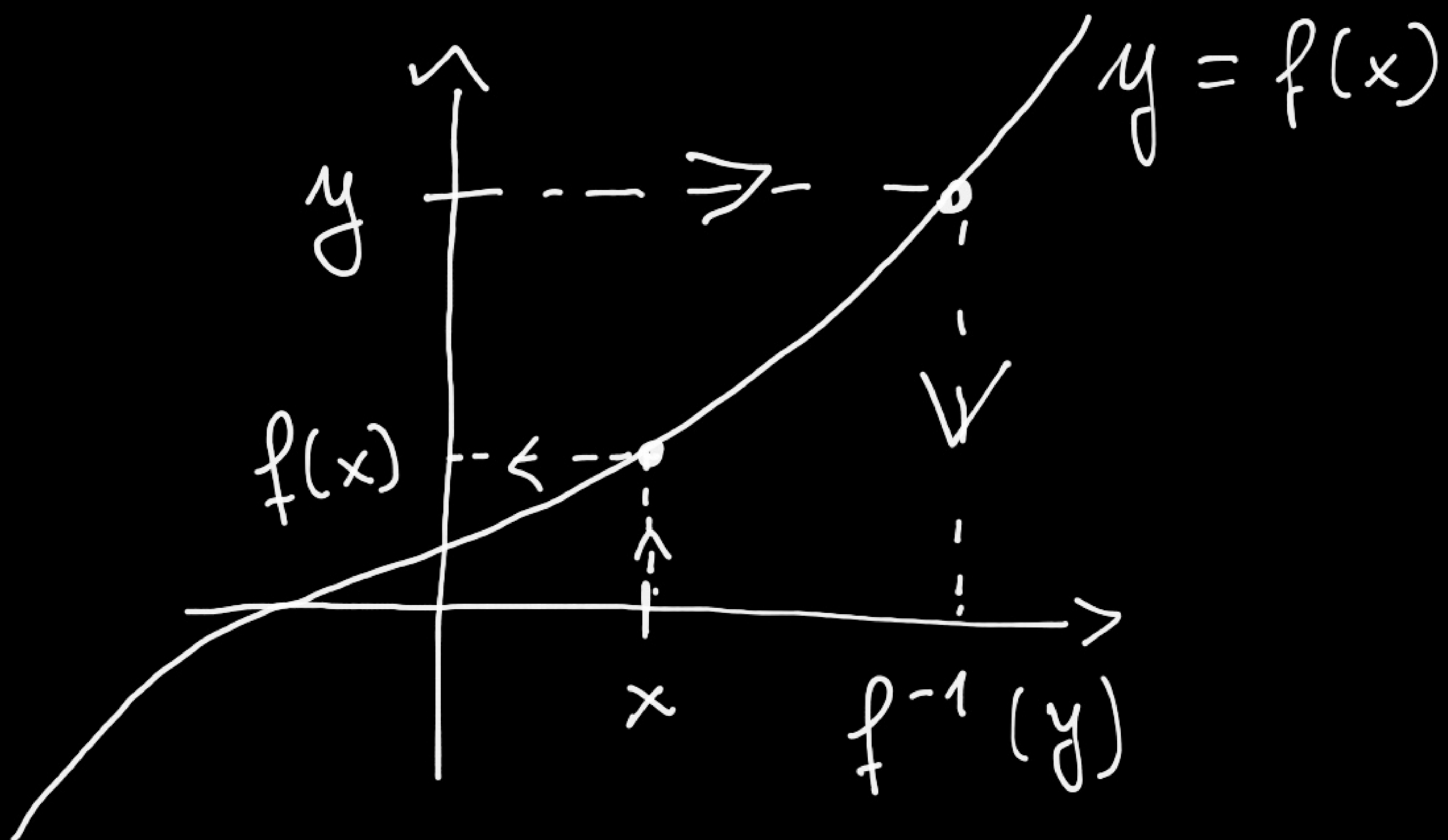
(b) f ist invertierbar, falls

- zu $y \in W_f$ gibt es ein x mit $y = f(x)$ (f ist surjektiv)

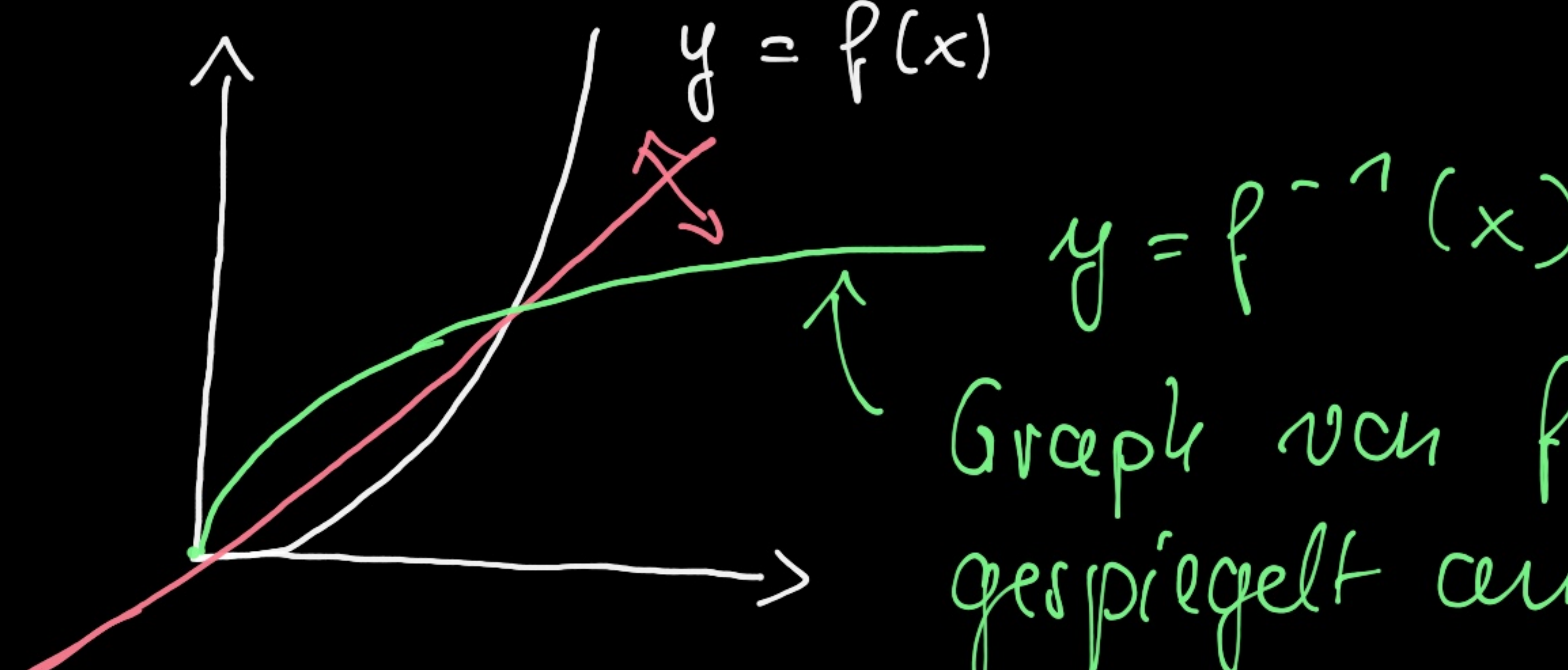
und

- Ist $f(x) = f(\tilde{x})$, so gilt $x = \tilde{x}$ (f ist injektiv)

Veranschaulichung der Umkehrfunktion



Vertauschen von x, y:
Spiegelung an der Geraden $y = x$



Graph von f, gespiegelt an der Winkelhalbierenden

Strategie zum Auffinden von f^{-1}:

Starte mit $y = f(x)$

Vertausche x, y: $x = f(y)$

Per Äquivalenzumformungen: $y = f^{-1}(x)$

Beispiel: $f: [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)\,;\ f(x) = \sqrt{1+x^2}$

Zum Auffinden von f^{-1}:

- schreibe Gleichung $\quad y = \sqrt{1+x^2}$
- Tausche x, y $\quad : \quad x = \sqrt{1+y^2}$
- Forme um $\quad : \quad x = \sqrt{1+y^2}$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 = 1 + y^2 \qquad\qquad x \in [1,\infty)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 = x^2 - 1 \qquad\qquad y \in [0,\infty)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{x^2-1}$$

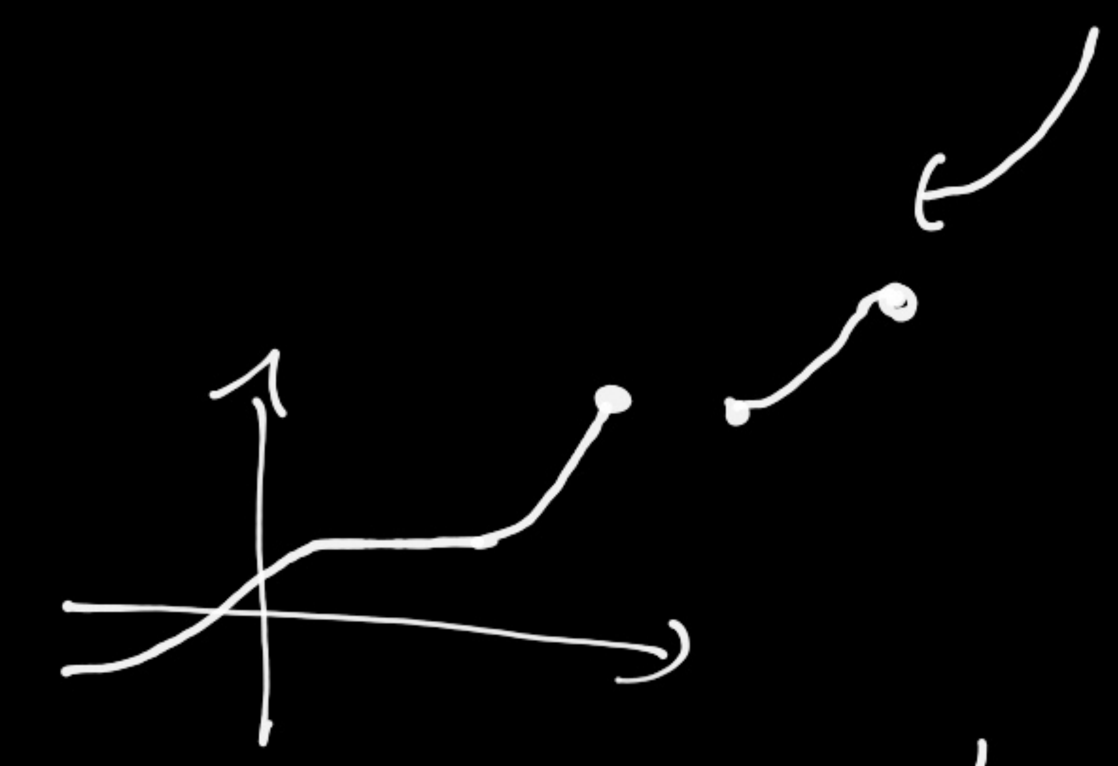
Äquivalenzumformungen!

Fazit: f ist invertierbar und

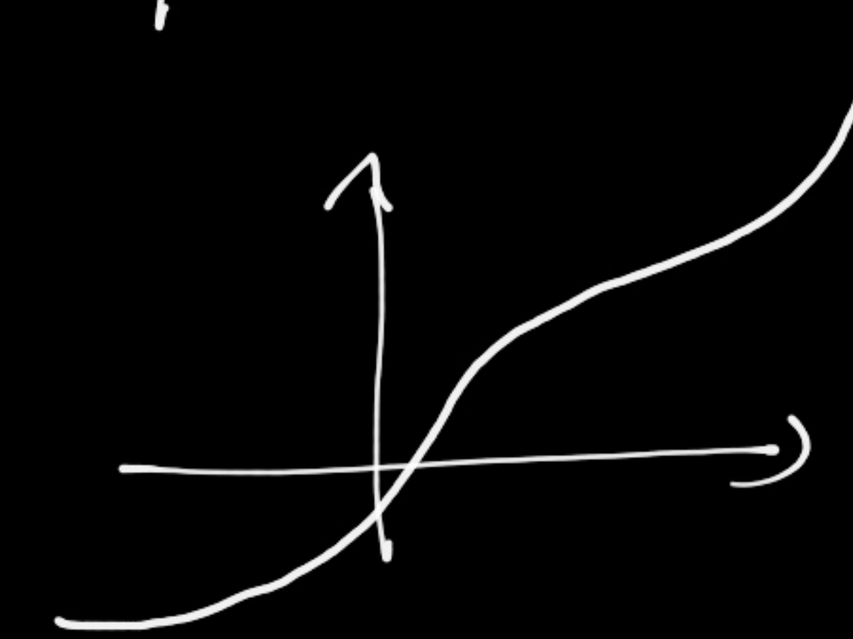
$$f^{-1}: [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)\,,\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$$

2.11 Monotonie

Vorgelegt: $f : D_f \to \mathbb{R}$ Funktion.



f heißt **monoton wachsend**, falls
$f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x \leq y$



f heißt **streng monoton wachsend**, falls
$f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x < y$

f heißt **monoton fallend**, falls
$f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x \leq y$

f heißt **streng monoton fallend**, falls
$f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x < y$.

monoton : monoton wachsend oder monoton fallend

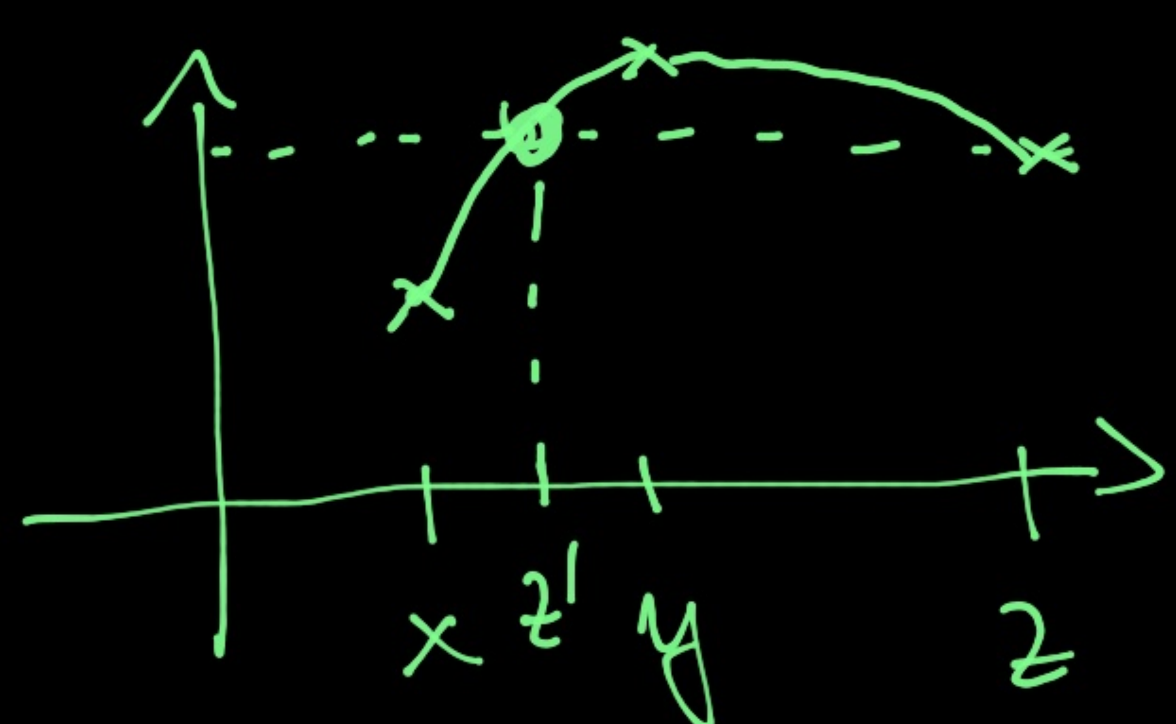
streng monoton : streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

2.12 Umkehrbarkeit stetiger Funktionen

Vorgelegt: Ein Intervall I und eine stetige Funktion $f: I \to \mathcal{Y}$ mit $\mathcal{Y} = \{ f(x) \mid x \in I \}$.

Dann ist f genau dann umkehrbar, wenn f streng monoton ist. Außerdem ist $\mathcal{Y}$ ein Intervall

Zwischenwertsatz



$f(z') = f(z)$
$\rightsquigarrow$ nicht umkehrbar

Die Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathcal{Y} \to I$ ist wieder streng monoton, also stetig.

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, stetig

Folglich: $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ist streng monoton wachsend und stetig

2.13 Umkehrregel

Vorgelegt: $f: D_f \longrightarrow W_f$ umkehrbar,
f sei in $x_0 \in D_f$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$.
Außerdem sei $f^{-1}: W_f \longrightarrow D_f$ in $y_0 = f(x_0)$ stetig.
Dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Folgt: Ist I ein Intervall und $f: I \longrightarrow Y$ differenzierbar, so ist $f^{-1}: Y \to I$ stetig.
Für jedes x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$ ist dann f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ diff'bar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Θ : theta

Nachweis der Umkehrregel:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Wegen $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = A \; (\neq 0)$

gibt es ein $\Theta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon \quad \text{für } |x - x_0| < \Theta$$

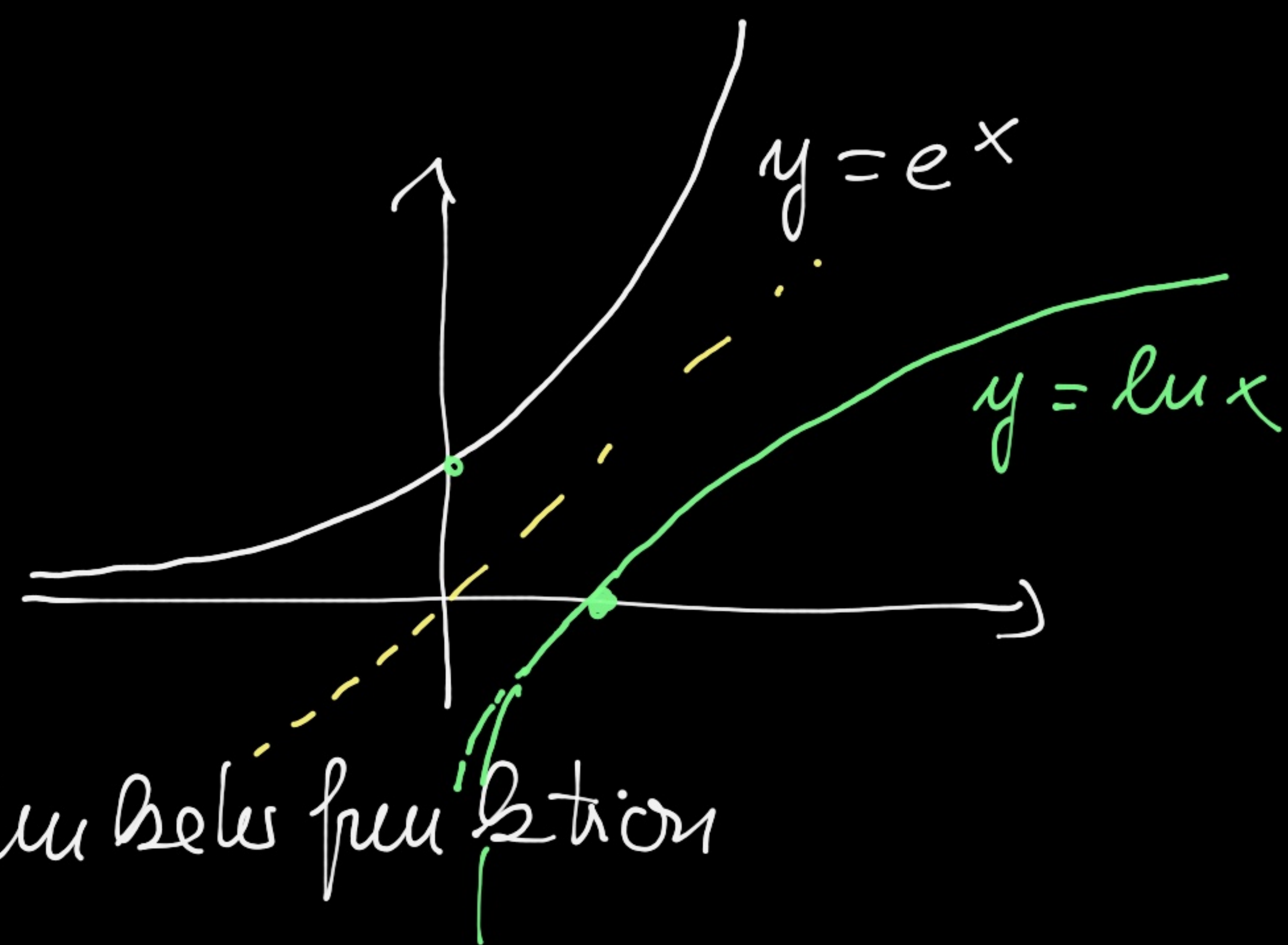
Zu Θ gibt es wegen f^{-1} stetig in y_0 ein $\delta > 0$ mit $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \Theta$ für $|y - y_0| < \delta$.

Für $|y - y_0| < \delta$ gilt daher $|\underbrace{f^{-1}(y)}_{x} - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}| < \Theta$,

also
$$\left| \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} - A \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} - A \right|, \text{ d.h. } \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = A$$

$A \neq 0$, also $(f^{-1})'(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y'} = A = f'(x_0)$ ∎



Beispiel 1

$f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = e^x$
ist differenzierbar und streng monoton wachsend

Es gibt daher eine (stetige) Umkehrfunktion

$f^{-1} = \ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ "logarithmus naturalis"

Wegen $f'(x) = e^x \neq 0$ folgt (Umkehrregel)

$f^{-1} = \ln$ ist differenzierbar

$x = e^{\ln x}$ gilt für jedes $x > 0$. Ableiten nach Kettenregel:

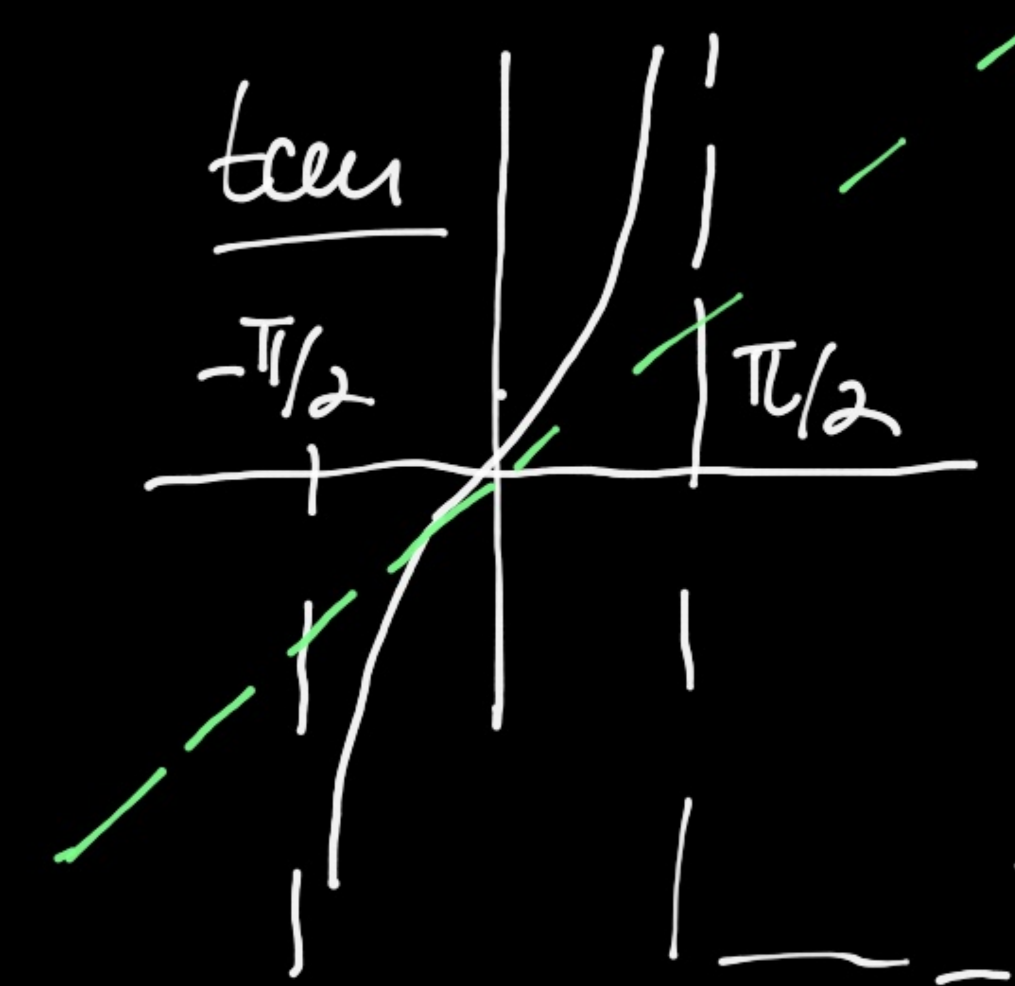
$$1 = \left(e^{\ln x}\right)' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'$$

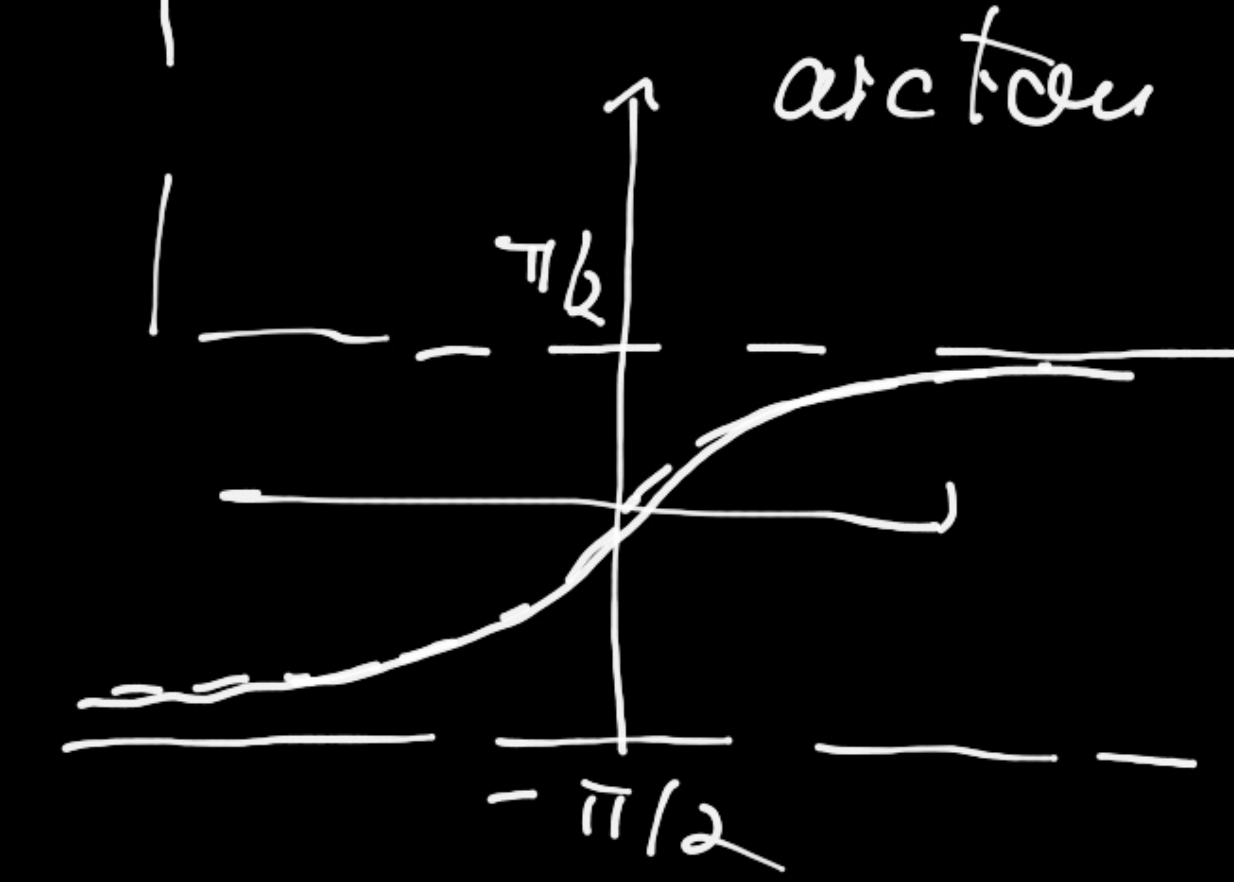
Also: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Beispiel 2 $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

differenzierbar und bijektiv

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \neq 0$ später





Folglich ist die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ist differenzierbar.

$$x = \tan(\arctan x) \qquad \text{ableiten}$$

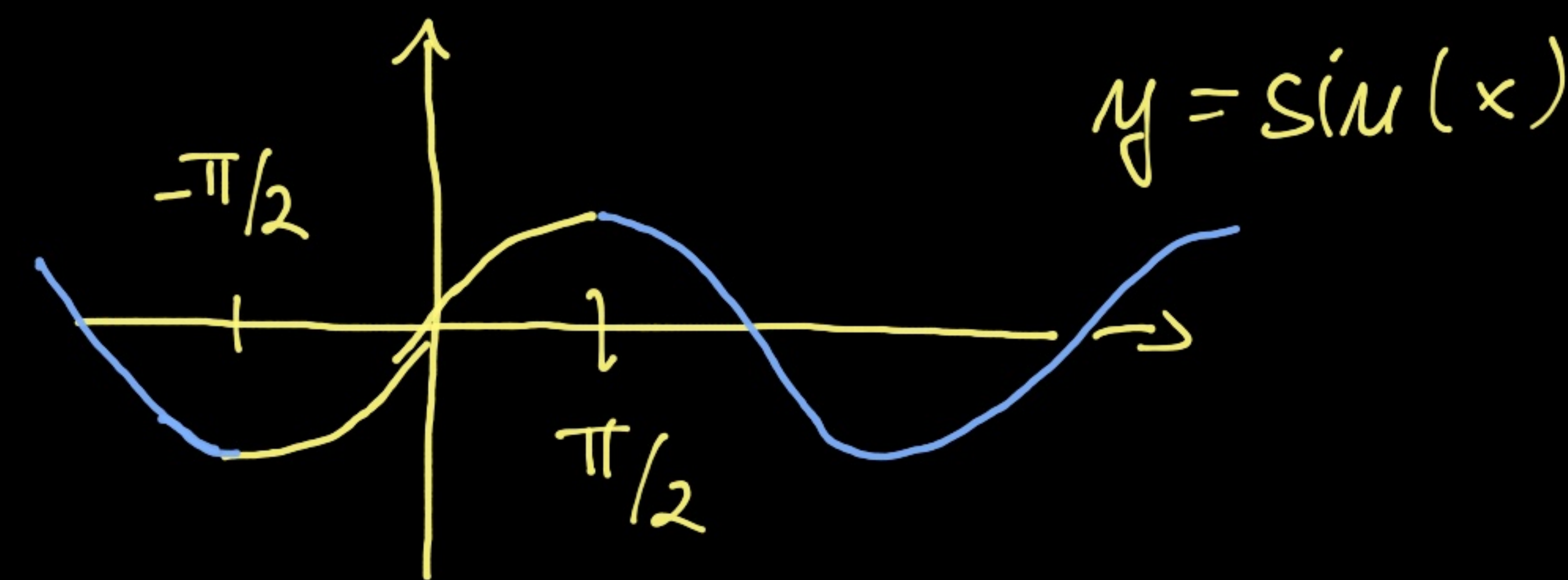
$$\underline{1} = \tan'(\arctan x) \cdot \arctan' x$$

$$= \Big[1 + \underbrace{\tan^2(\arctan x)}_{(\tan(\arctan x))^2 = x^2}\Big] \cdot \arctan' x = \underline{(1+x^2) \cdot \arctan' x}$$

$$\boxed{\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}}$$

Hausaufgabe 05C:

$\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-1, 1)$ ist differenzierbar und streng monoton wachsend.



Zeige: Es gibt eine differenzierbare Umkehrfunktion
$\arcsin : (-1, 1) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Berechne die Ableitung von arcsin.

Hinweis: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, also $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$
Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos x > 0$, also $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$
und damit $\cos \arcsin x = \ldots = \sqrt{1 - x^2}$