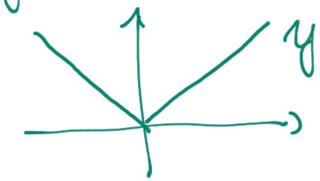
2.5 Notiz: Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$, die in $x_0 \in D_f$ differenzierbar ist. Dann ist f in x_0 stetig.

⚠ Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, z.B.

$f(x) = |x|$



$y = |x|$ ist stetig ✓

In $x_0 = 0$ nicht diff'bar: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x>0 \\ -1 & \text{für } x<0 \end{cases}$

hat keinen Grenzwert für $x \to 0$

Zur Notiz: Zeige $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Stetigkeit in x_0)

- Wissen $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert
  - ← geht auch gegen 0 ✓
  - ← geht für $x \to x_0$ gegen x_0
- $f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h)\cdot h$ mit φ in $h=0$ stetig

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0)+\varphi(h)\cdot h = f(x_0)+\varphi(0)\cdot 0 = f(x_0)$$

□

2.6 Rechenregeln

Vorgelegt: Funktionen $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$.

Voraussetzung: f und g sind in $x_0 \in D_f \cap D_g$ diff'bar

Schnittmenge $D_f \cap D_g = \{x \mid x \in D_f \text{ und } x \in D_g\}$

Dann gilt:

(a) Die Funktion $h = f + g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$,
$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

ist in x_0 differenzierbar. Dabei gilt

$$h'(x_0) = \boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

(b) $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

(c) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (Produktregel)

(d) Falls $g(x_0) \neq 0$, so gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g(x_0)^2}$

Quotientenregel

Speziell: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beispiele:

(a) $f(x)$ konstant $\rightsquigarrow$ $f'(x_0) = 0$

$f(x) = c$ (f. alle x), $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$ ✓

(b) $f(x) = x$ hat die Ableitung $f'(x_0) = 1$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$ ✓

(c) $h(x) = c \cdot f(x)$, f ist diff'bar

$h'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

Dazu: $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ mit $g(x) = c$, also $g'(x_0) = 0$

jetzt Produktregel.

Oder: $\underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}}_{h'(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x-x_0} = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$c \cdot f'(x_0)$

(d) $h(x) = x^2 = f(x) \cdot g(x)$ mit $f(x) = x = g(x)$

Produktregel: $h'(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{=1} \cdot \underbrace{g(x_0)}_{=x_0} + \underbrace{f(x_0)}_{=x_0} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{=1} = 2x_0$

(e) $h(x) = x^3 = x \cdot x^2 = f(x) \cdot g(x)$
mit $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $f'(x_0) = 1$, $g'(x_0) = 2x_0$

Produktregel: $h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
$= 1 \cdot x_0^2 + x_0 \cdot (2x_0) = 3x_0^2$

Allgemein: $\boxed{\text{Die Ableitung von } f(x) = x^n \text{ ist } f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}}$ (n natürliche Zahl)

Kurz: $\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$

Nachweis von (e): $(x^3)' = (x \cdot x^2)'$ | Produktregel
$= (x)' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot (2x) = 3x$

Nachweis der allg. Regel:
Falls man $(x^{n-1})' = (n-1) \cdot x^{n-2}$ schon bewiesen hat, so gilt $(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' =$
$= (x)' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$
$= n \cdot x^{n-1}$.

z.B. $n = 4$: $(x^3)' = (x^{4-1})' = 3 \cdot x^2$
$\rightsquigarrow$ $(x^4)' = 4 \cdot x^3$

(f) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 42$

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + 42)'$$

$$= (x^3)' - (2x^2)' + (5x)' + (42)' \qquad \text{Summenregel}$$

$$= 3x^2 - 2\,(x^2)' + 5\cdot(x)' + 0 \qquad \text{bish. Ergebnisse}$$

$$= 3x^2 - 2\cdot(2x) + 5\cdot 1 \qquad (\text{— " —})$$

$$= 3x^2 - 4\cdot x + 5$$

Allgemein: $(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0)'$

$$= c_n\cdot(x^n)' + c_{n-1}(x^{n-1})' + \dots\dots c_1(x)' + (c_0)'$$

$$= n\cdot c_n\cdot x^{n-1} + (n-1)\,c_{n-1}\,x^{n-2} + \dots + 2c_2 x + c_1$$

(g) $\left(\dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x + 42}{x^2 + 8x + 24}\right)'$

$$= \frac{(x^2+8x+24)\cdot(x^3-2x^2+5x+42)' - (x^2+8x+24)'\cdot(x^3-2x^2+5x+42)}{(x^2+8x+24)^2}$$

$$= \left[(x^2+8x+24)\cdot(3x^2-4x+5) - (2x+8)\cdot(x^3-2x^2+5x+42)\right] / (x^2+8x+24)^2$$

$$= \dots\dots$$

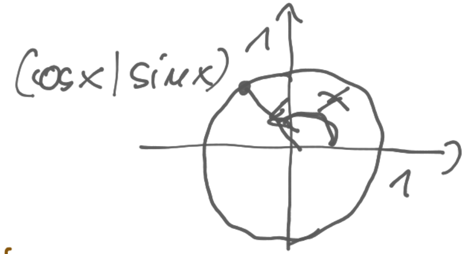
§2 | S. 22

(h) $\quad (\cos x)' = -\sin x \quad , \quad (\sin x)' = \cos x$ ⊛

$$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{f(x)}{g(x)} \, , \qquad \begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ g(x) = \cos x \end{array}$$

Quotientenregel:

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) f(x)}{g(x)^2}$$



$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2}$$

Schreibe
$\cos^2 x = (\cos x)^2$
$\sin^2 x = (\sin x)^2$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \begin{cases} 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

(trigonometrische Pythagoras: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

⊛ x immer im Bogenmaß!

Wie weist man die Rechenregeln nach?

f, g sind in x_0 diff'bar ; also

(1) $f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h)\cdot h$, $\varphi(0) = f'(x_0)$
mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\varphi(h)$

(2) $g(x_0+h) = g(x_0) + \psi(h)\cdot h$, $\psi(0) = g'(x_0)$
mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\psi(h)$.

(φ : phi
ψ : psi
χ : chi)

(a) $s(x) = f(x) + g(x)$

$$
\begin{aligned}
s(x_0+h) &= f(x_0+h) + g(x_0+h) \\
&\overset{(1.),(2.)}{=} f(x_0) + \varphi(h)\cdot h + g(x_0) + \psi(h)\cdot h \\
&= f(x_0) + g(x_0) + \underbrace{\{\varphi(h) + \psi(h)\}\cdot h}_{\chi(h)\cdot h} \\
&= s(x_0) + \chi(h)\cdot h
\end{aligned}
$$

χ ist in $h=0$ stetig, da Summe der dort stetigen Fkt. φ, ψ

Folgt: s ist in x_0 diff'bar, $s'(x_0) = \chi(0) = \varphi(0) + \psi(0)$
$= f'(x_0) + g'(x_0)$

(1) $f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h)\cdot h$, $\varphi(0) = f'(x_0)$
mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\varphi(h)$

(2) $g(x_0+h) = g(x_0) + \psi(h)\cdot h$, $\psi(0) = g'(x_0)$
mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\psi(h)$.

<u>Produktregel</u>: $p(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$
\begin{aligned}
p(x_0+h) &= f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) \\
&\overset{(1.),(2.)}{=} \big(f(x_0)+\varphi(h)\cdot h\big)\cdot\big(g(x_0)+\psi(h)\cdot h\big) \\
&= f(x_0)\cdot g(x_0) + \{\underbrace{\varphi(h)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\psi(h) + \varphi(h)\cdot\psi(h)\cdot h}_{=\chi(h)}\}\cdot h \\
&= p(x_0) + \chi(h)\cdot h
\end{aligned}
$$

$\chi(h)$ ist in $h=0$ stetig, da φ, ψ dies sind.

Also: $p(x)$ ist in x_0 diff'bar mit

$$
\begin{aligned}
p'(x_0) = \chi(0) &= \varphi(0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\psi(0) + \varphi(0)\cdot\psi(0)\cdot 0 \\
&= f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)
\end{aligned}
$$

∎

Hausaufgabe 05A:

(a) Zeige $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

Hinweis: $\frac{1}{g(x_0)+\varphi(h)\cdot h} - \frac{1}{g(x_0)} = \{ \dots \} \cdot h$

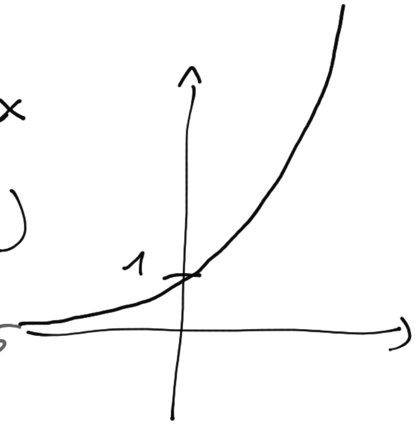
(b) Schließe $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$ aus (a)

Hinweis: Produktregel.

(c) Berechne die Ableitung von $f(x) = \frac{x^5 - 3x^2 + 6}{x^4 + x^2 + 1}$.

2.7 Die Eulersche Zahl $e \approx 2{,}718..$

exponentielles Wachstum : $f(x) = b^x$
$(b > 0)$



$$2^{\sqrt{2}} = ?$$

$$2^{1{,}4} = 2^{7/5} = \left(2^7\right)^{1/5} = 128^{1/5}$$
$$= \sqrt[5]{128}$$

Später: $f(x) = b^x$ ist differenzierbar

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} \qquad b^{x+h} = b^x \cdot b^h$$

$$= \underbrace{b^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}}_{f'(0)} = f'(0) \cdot f(x)$$

$f'(0) < 1$ für $b = 2$

$f'(0) > 1$ für $b = 3$

$$g(h) = \frac{b^h - 1}{h}$$
$h = -1 \,...\, 1$

Es gibt eine Zahl $b = e$ zwischen 2 und 3 mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Diese Zahl heißt <u>Eulersche Zahl</u> $e = 2{,}7\ldots$

Für $f(x) = e^x$ gilt $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

und damit $f'(x) = f'(0) \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

Kurz: $\boxed{(e^x)' = e^x}$

<u>Notiz</u>: $g'(x) = g(x)$ gilt für $g(x) = c \cdot e^x$ wobei c eine Konstante ist.

Differentialgleichung, DGL
ODE (ordinary differential equation)

2.8 Die Kettenregel

Zur Erinnerung: Verkettete Funktionen

Vorgelegt: Funktionen $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$

Voraussetzung: $g(x) \in D_f$ für jedes $x \in D_g$

Dann kann man $g(x)$ in $f(x)$ einsetzen: $f(g(x))$
und erhält eine neue Funktion

$$f \circ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Verkettung von f und g

Beispiel: $g(x) = \sin x$ für $0 \le x \le \pi$ (also $D_g = [0, \pi]$)

$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sqrt{\sin x}$

Zusätzliche Voraussetzung:

g ist diff'bar in x_0

f ist diff'bar in $g(x_0)$

Dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar

mit Ableitung $\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)}$

Kettenregel

Beispiel $p(x) = \cos(\sin x)$

$$\underbrace{\cos}_{f}(\underbrace{\sin x}_{g})$$

$f'(x) = -\sin x$

$g'(x) = \cos x$

$$p'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= f'(\sin x) \cdot g'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

Nachweis der Kettenregel:

$$g(x_0+h) = g(x_0) + \varphi(h)\cdot h$$

mit $\varphi(h)$ ist stetig in $h=0$ und $\varphi(0) = g'(x_0)$

Mit $y_0 = g(x_0)$ gilt

$$f(y_0+k) = f(y_0) + \psi(k)\cdot k$$

mit $\psi(k)$ ist stetig in $k=0$ und $\psi(0) = f'(y_0)$
$= f'(g(x_0))$

Jetzt rechne:

$$(f\circ g)(x_0+h) = f(g(x_0+h)) = f(\underbrace{g(x_0)}_{y_0} + \underbrace{\varphi(h)\cdot h}_{k})$$

$$= f(y_0) + \psi(k)\cdot k$$

$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{(f\circ g)(x_0)} + \underbrace{\{\psi(\varphi(h)\cdot h)\cdot\varphi(h)\}}_{\chi(h) \text{ ist stetig in } h=0}\cdot h$$

$f\circ g$ ist in x_0 diff'bar mit

$$(f\circ g)'(x_0) = \chi(0) = \psi(\underbrace{\varphi(0)\cdot 0}_{=0})\cdot\varphi(0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0) \quad \blacksquare$$

Übung

(a) Falls wir bereits wüssten, dass $\sqrt{x}$ für $x > 0$ differenzierbar ist, wie könnte man $(\sqrt{x})'$ auf der Gleichung $(\sqrt{x})^2 = x$ per Kettenregel ermitteln?

Lösung: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = (\sqrt{x})^2$

g diff'bar mit unbekannter Ableitung $g'(x) = (\sqrt{x})'$

f diff'bar mit $f'(x) = (x^2)' = 2x$

Aus $(\sqrt{x})^2 = x$ folgt

$$\boxed{1} = (x)' = ((\sqrt{x})^2)' = (f \circ g)'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) = \boxed{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})'}$$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (Gleichung auflösen)

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir sehen $c = f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

(i) Sind $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Funktionen?

(ii) Berechne $(f \circ g)'$ und $(g \circ f)'$

(iii) Berechne für $(f \circ g)'$ sämtliche Nullstellen

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \le x \le \pi$

Lösung (i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{\sin x}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin 2^x$

$f \circ g \neq g \circ f$, denn $2^{\sin \frac{\pi}{2}} = 2^1 = 2 \neq \underbrace{\sin 2^{\pi/2}}_{\in [-1,1]}$

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir setzen $c = f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

(ii) Berechne $(f\circ g)'$ und $(g\circ f)'$

(iii) Berechne für $(f\circ g)'$ sämtliche Nullstellen

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \leq x \leq \pi$

(ii) $(2^x)' = c\cdot 2^x$ siehe (2.7)

Kettenregel: $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$= c\cdot 2^{g(x)}\cdot \cos x = c\cdot 2^{\sin x}\cdot \cos x$$

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = \cos(f(x))\cdot c\cdot 2^x$$

$$= c\cdot 2^x\cdot \cos(2^x)$$

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir setzen $c = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

$(f \circ g)'(x) = c \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x$

(iii) Berechne für $(f \circ g)'$ sämtliche Nullstellen

$\underbrace{c}_{\neq 0} \cdot \underbrace{2^{\sin x}}_{> 0} \cdot \cos x = 0$ genau dann, wenn $\cos x = 0$,

also $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit k ganze Zahl.

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \leq x \leq \pi$

Größter Wert der stetigen Funktion $f \circ g$ auf dem abg. Intervall $[0, \pi]$

sogar diff'bar

Kandidaten: $x = 0$, $x = \pi$ (Randpunkte)

und Nullstellen der Ableitung in $(0, \pi)$,

d.h. $x = \frac{\pi}{2}$. Einsetzen $2^{\sin 0} = 1 = 2^{\sin \pi}$,

$2^{\sin \pi/2} = 2$ größter Wert ☺

(c) Wie lautet die Ableitung der Funktion $\sqrt{1+2^{x^2+x+1}}$?

$w(x) = \sqrt{x}$, $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (s. o.)

$f(x) = 1 + 2^{x^2+x+1}$

$p(x) = x^2+x+1$, $p'(x) = 2x+1$

$m(x) = 1 + 2^x$, $m'(x) = (2^x)' = c \cdot 2^x$

mit $c = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$

$\sqrt{1+2^{x^2+x+1}} = w(m(p(x)))$

Ableitung $(w \circ m \circ p)'(x) = (w \circ (m \circ p))'(x)$

$= w'((m \circ p)(x)) \cdot (m \circ p)'(x)$ Kettenregel

$= w'(m(p(x))) \cdot m'(p(x)) \cdot p'(x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+2^{x^2+x+1}}} \cdot c \cdot 2^{p(x)} \cdot (2x+1)$

Hausaufgabe 05B:

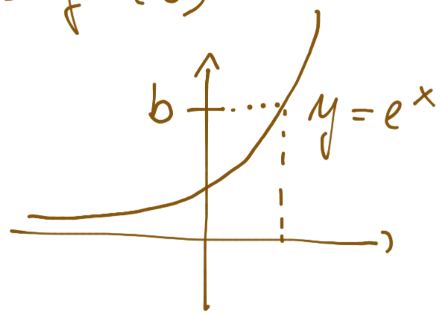
Bilde die Ableitung der folgenden Funktion

$$f(x) = \frac{\left(\sin(x^2+1) + 3 \cdot \cos(x) \right)^4}{1 + e^{5\sqrt{x}}} \qquad (x > 0)$$

(d) Exponentialfunktion : $f(x) = b^x$

Ableitung $f'(x) = c \cdot b^x$ mit $c = f'(0)$

$b > 0$: Es gibt ein u mit $e^u = b$.



Potenzrechengesetz : $f(x) = b^x = (e^u)^x$
$= e^{u \cdot x}$

Ableiten mit Kettenregel (u ist eine Konstante)

$f(x) = m(n(x))$ mit $n(x) = u \cdot x$; $n'(x) = u$
$m(x) = e^x$; $m'(x) = e^x$

$f'(x) = m'(n(x)) \cdot n'(x) = e^{u \cdot x} \cdot u = u \cdot b^x$

d.h. $u = c$ bzw.

$(b^x)' = c \cdot b^x$ mit $e^c = b$ $[c = \ln b]$

z.B. $(2^x)' = c \cdot 2^x$ mit $e^c = 2$ $[c = \ln 2]$

2.9 Umkehrfunktionen

Vorgelegt: $f: D_f \to \mathbb{R}$ Funktion

Wann ist die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösbar.

Bsp: $f(x) = x^2 = y \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{y}$, falls $y \geq 0$

Per $D_f = [0, \infty)$ erhalte eindeutige Lösung $x = \sqrt{y}$, falls überhaupt lösbar.

Abhilfe bei Nicht-Lösbarkeit: Nur $y \in [0, \infty)$ zulassen.

$$f: \underbrace{[0,\infty)}_{= D_f} \longrightarrow \underbrace{[0,\infty)}_{= W_f} \text{ "Wertebereich"}$$

Für $y \in W_f$ gibt es genau ein x mit $f(x) = y$.

$f : D_f \longrightarrow W_f$ Funktion

$\uparrow$

$f(x) \in W_f$ für alle $x \in D_f$

Dann heißt f umkehrbar (bijektiv),
falls $y = f(x)$ für jedes $y \in W_f$ genau
eine Lösung $x \in D_f$ besitzt.

Erhalte so eine Funktion $g : W_f \longrightarrow D_f$
mit $y = f(g(y))$ für alle y. $(*)$
und $x = g(f(x))$ für alle x. $(**)$

$(*)$ bedeutet: $x = g(y)$ ist Lösung von $y = f(x)$

$(**)$ $x, \tilde{x}$ Lösungen von $f(x) = y = f(\tilde{x})$

$(**) \rightsquigarrow x = g(f(x)) = g(y) = g(f(\tilde{x})) = \tilde{x}$

$(**)$ bedeutet: Die Lösung ist eindeutig.

Definition: Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \to W_f$.
Dann heißt f umkehrbar (invertierbar / bijektiv), falls die Gleichung $y = f(x)$ für jedes $y \in W_f$ genau eine Lösung x besitzt.
Erhalte dann eine neue Abbildung
$g: W_f \to D_f$, $g(y) =$ Lösung von $y = f(x)$.
Diese Funktion heißt Umkehrfunktion von f.
Schreibe $g = f^{-1}$ (das ist NICHT $\frac{1}{f}$)

Beispiel: $f: [2, \infty) \to [4, \infty)$; $f(x) = x^2$
$f^{-1}: [4, \infty) \to [2, \infty)$; $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

2.10 Kennzeichnung der Umkehrfunktion

Vorgelegt: $f : D_f \to W_f$ Funktion

$id_{D_f} : D_f \to D_f$, $id_{D_f}(x) = x$ "Identität auf D_f"

$id_{W_f} : W_f \to W_f$, $id_{W_f}(x) = x$

Erinnerung: $g = f^{-1} : W_f \to D_f$ erfüllt

- $\underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)} = \underbrace{x}_{id_{D_f}}$ f alle $x \in D_f$, also $g \circ f = id_{D_f}$
- $f \circ g = id_{W_f}$

(a) Genau dann ist f umkehrbar, wenn es eine Funktion $g : W_f \to D_f$ gibt mit $g \circ f = id_{D_f}$, $f \circ g = id_{W_f}$.
In diesem Fall gilt $g = f^{-1}$.

Dazu: Wenn f umkehrbar ist, so ist $g = f^{-1}$ so eine Fkt.

Umgekehrt: Gibt es eine solche Funktion g, so gilt

- $x = g(y)$ ist eine Lösung von $y = f(x)$
  Einsetzen: $y = f(g(y))$ stimmt ✓
- $x = g(y)$ ist die einzige Lösung von $y = f(x)$,
  d.h. ist $x = \tilde{x}$ eine Lösung (also $y = f(\tilde{x})$),
  so gilt $\tilde{x} = g(y)$

  Dazu wende g auf die Gleichung $y = f(\tilde{x})$ an:
  $g(y) = g(f(\tilde{x})) = \tilde{x}$ ✓

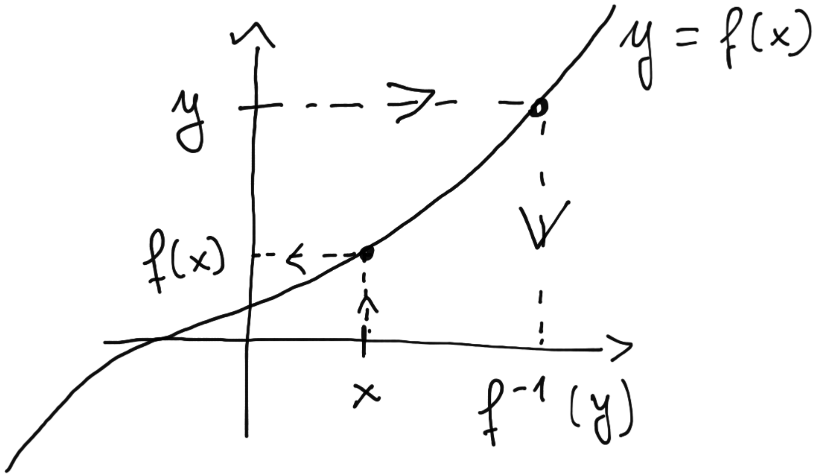
(b) f ist invertierbar, falls

- zu $y \in W_f$ gibt es ein x mit $y = f(x)$ (f ist surjektiv)

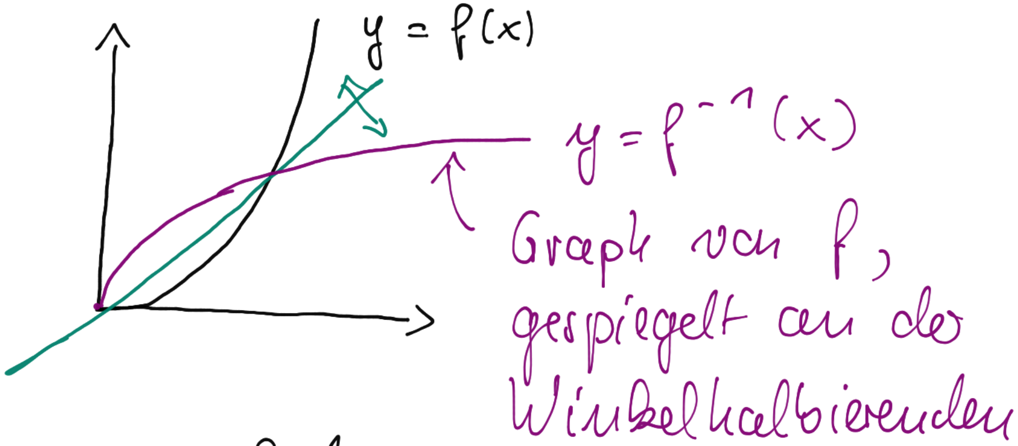
und

- Ist $f(x) = f(\tilde{x})$, so gilt $x = \tilde{x}$ (f ist injektiv)

Veranschaulichung der Umkehrfunktion



Vertauschen von x, y: Spiegelung an der Geraden $y = x$



Strategie zum Auffinden von f^{-1}:

Starte mit $y = f(x)$

Vertausche x, y: $x = f(y)$

Per Äquivalenzumformungen: $y = f^{-1}(x)$

Beispiel: $f: [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$; $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

Zum Auffinden von f^{-1}:

- schreibe Gleichung $\qquad y = \sqrt{1+x^2}$
- Tausche x, y $\qquad : \quad x = \sqrt{1+y^2}$
- Forme um $\qquad : \quad x = \sqrt{1+y^2}$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 = 1 + y^2 \qquad\qquad x \in [1,\infty)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 = x^2 - 1 \qquad\qquad y \in [0,\infty)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{x^2-1}$$

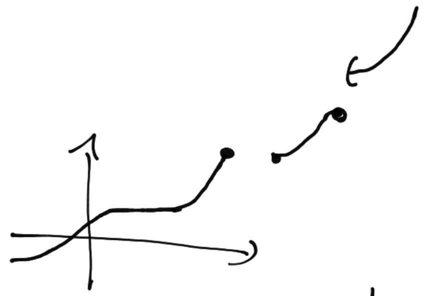
Äquivalenzumformungen!

Fazit: f ist invertierbar und

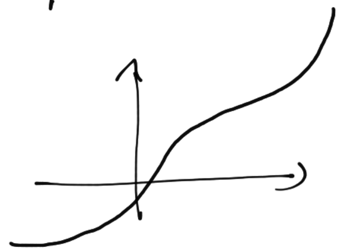
$$f^{-1}: [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$$

2.11 Monotonie

Vorgelegt: $f : D_f \to \mathbb{R}$ Funktion.



f heißt **monoton wachsend**, falls
$f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x \leq y$



f heißt **streng monoton wachsend**, falls
$f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x < y$

f heißt **monoton fallend**, falls
$f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x \leq y$

f heißt **streng monoton fallend**, falls
$f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x < y$.

monoton: monoton wachsend oder monoton fallend

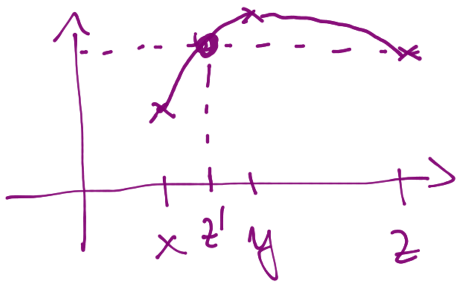
streng monoton: streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

2.12 Umkehrbarkeit stetiger Funktionen

Vorgelegt: Ein Intervall I und eine stetige Funktion $f : I \to \mathcal{Y}$ mit
$\mathcal{Y} = \{ f(x) \mid x \in I \}$.

Dann ist f genau dann umkehrbar, wenn f streng monoton ist. Außerdem ist $\mathcal{Y}$ ein Intervall

Zwischenwertsatz



$f(z') = f(z)$
$\rightsquigarrow$ nicht umkehrbar

Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathcal{Y} \to I$ ist wieder streng monoton, also stetig.

Bsp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, stetig

Folglich: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ist streng monoton wachsend und stetig

2.13 Umkehrregel

Vorgelegt: $f : D_f \to W_f$ umkehrbar, f sei in $x_0 \in D_f$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Außerdem sei $f^{-1} : W_f \to D_f$ in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Folgt: Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathcal{Y}$ differenzierbar, so ist $f^{-1} : \mathcal{Y} \to I$ stetig. Für jedes x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$ ist dann f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ diff'bar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Θ: theta

Nachweis der Umkehrregel:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Wegen $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = A \ (\neq 0)$

gibt es ein $\Theta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - A \right| < \varepsilon \quad \text{für } |x-x_0| < \Theta$$

Zu Θ gibt es wegen f^{-1} stetig in y_0

ein $\delta > 0$ mit $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)| < \Theta$ für $|y-y_0| < \delta$.

Für $|y-y_0| < \delta$ gilt daher $|\underbrace{f^{-1}(y)}_{x} - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}| < \Theta$,

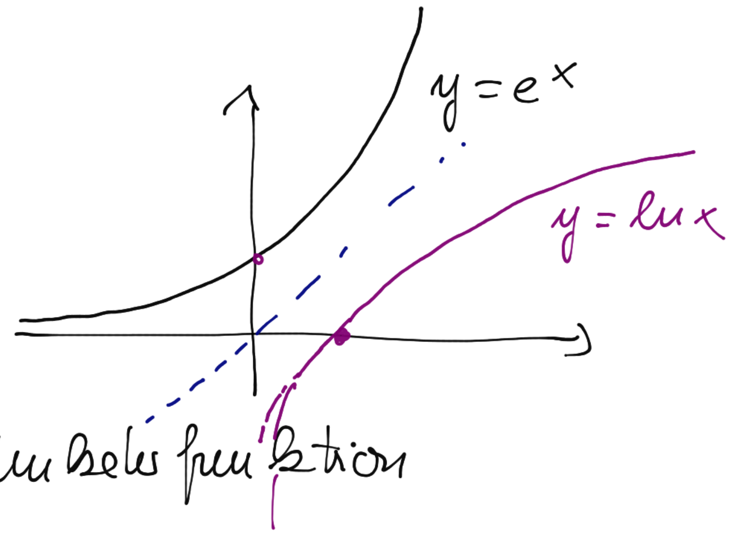
also

$$\left| \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} - A \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{y - y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} - A \right|, \text{ d.h. } \lim_{y \to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = A$$

$A \neq 0$, also $\underbrace{\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y'}}_{(f^{-1})'(y_0)} = A = f'(x_0)$ ∎

Beispiel 1



$f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = e^x$
ist differenzierbar und streng monoton wachsend

Es gibt daher eine (stetige) Umkehrfunktion

$f^{-1} = \ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ "logarithmus naturalis"

Wegen $f'(x) = e^x \neq 0$ folgt (Umkehrregel)

$f^{-1} = \ln$ ist differenzierbar

$x = e^{\ln x}$ gilt für jedes $x > 0$. Ableiten nach Kettenregel:

$$1 = (e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'$$

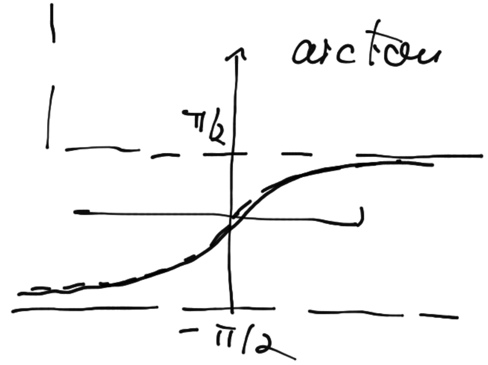
Also: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

§2/ S. 50

Beispiel 2 $\quad \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

differenzierbar und bijektiv

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \neq 0$ $\quad$ später



Folglich ist die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ist differenzierbar.

$$x = \tan(\arctan x) \qquad \text{ableiten}$$

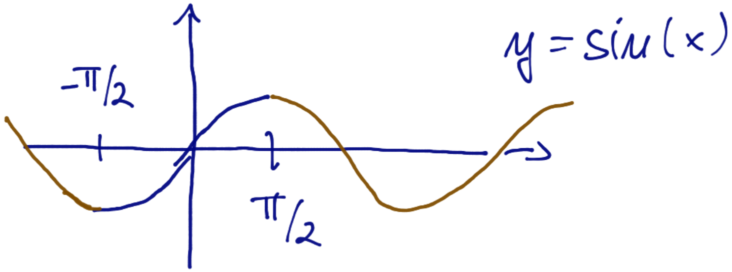
$$\underline{1 =} \tan'(\arctan x) \cdot \arctan' x$$

$$= \Big[1 + \underbrace{\tan^2(\arctan x)}_{(\tan(\arctan x))^2 = x^2}\Big] \cdot \arctan' x = \underline{(1+x^2) \cdot \arctan' x}$$

$$\boxed{\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}}$$

Hausaufgabe 05C:

$\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-1, 1)$ ist differenzierbar und streng monoton wachsend.



Zeige: Es gibt eine differenzierbare Umkehrfunktion $\arcsin : (-1, 1) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Berechne die Ableitung von arcsin.

Hinweis: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, also $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos x > 0$, also $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

und damit $\cos \arcsin x = \ldots = \sqrt{1-x^2}$