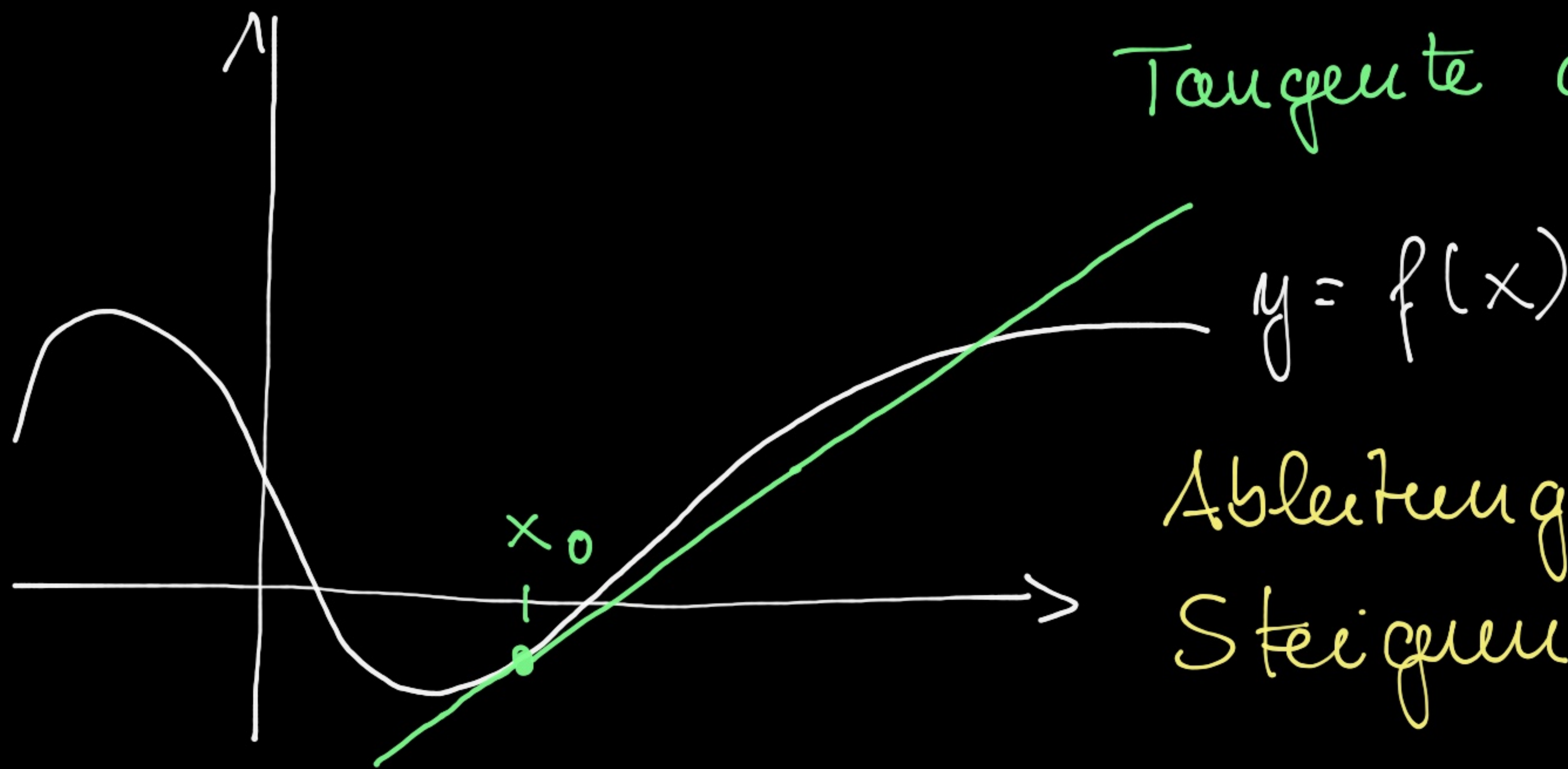
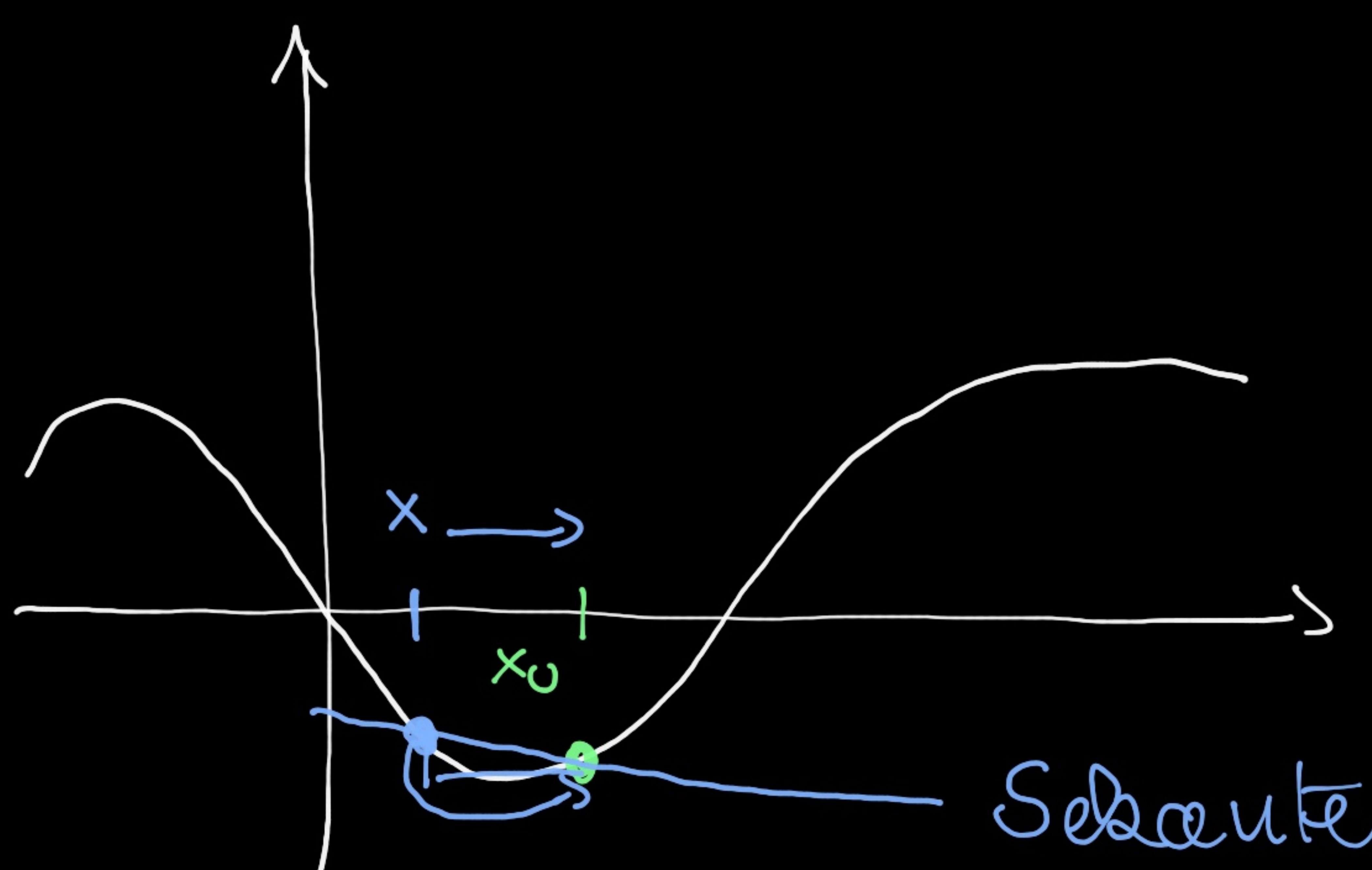
§2: Differentialrechnung



Tangente an f in x_0

Ableitung von f in x_0:
Steigung der Tangente $\quad (f'(x_0))$



Sekantensteigung:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Idee $\quad (x \to x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

2.1 Definition

Vorgelegt ist eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in D$.

Dann heißt f in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ existiert.

Dann schreibe $f'(x_0) = L = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

dies ist die Ableitung von f in x_0.

Notiz: Ist f in jedem x_0 differenzierbar, so erhalte neue Funktion $f' : D_f \to \mathbb{R}$.

Beispiel: $f(x) = m \cdot x + b$

Differenzenquotient: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{(m \cdot x + b) - (m \cdot x_0 + b)}{x - x_0}$
$(x \neq x_0)$

$$= \frac{m \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = m$$

Also: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} m = m.$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

Also: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$

(Ableitung: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$)

Nützliche Gleichung: Für $a \neq b$ gilt

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}$$

z.B. $$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4$$

Begründung: $$(a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}) \cdot (a - b)$$

$$\begin{aligned} = \; & a^n + a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + a^2 b^{n-2} + a b^{n-1} \\ & - a^{n-1} \cdot b - a^{n-2} \cdot b^2 - \dots - a^2 b^{n-2} - a b^{n-1} - b^n \end{aligned}$$

$$= a^n - b^n$$

Teilen durch $a - b$ zeigt die Behauptung.

Übung: Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Lösung:
$$\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{x^3 - (-2)^3}{x - (-2)} \underset{(s.o.)}{=} x^2 + x \cdot (-2) + (-2)^2$$

Also:
$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2} \underbrace{x^2 + x \cdot (-2) + (-2)^2}_{\text{Polynom in } x \text{, also stetig, also: Grenzwert durch Einsetzen!}} = (-2)^2 + (-2) \cdot (-2) + (-2)^2$$
$$= 3 \cdot (-2)^2 = \underline{\underline{12}}$$

Völlig analog: $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2$, kurz: $(x^3)' = 3x^2$

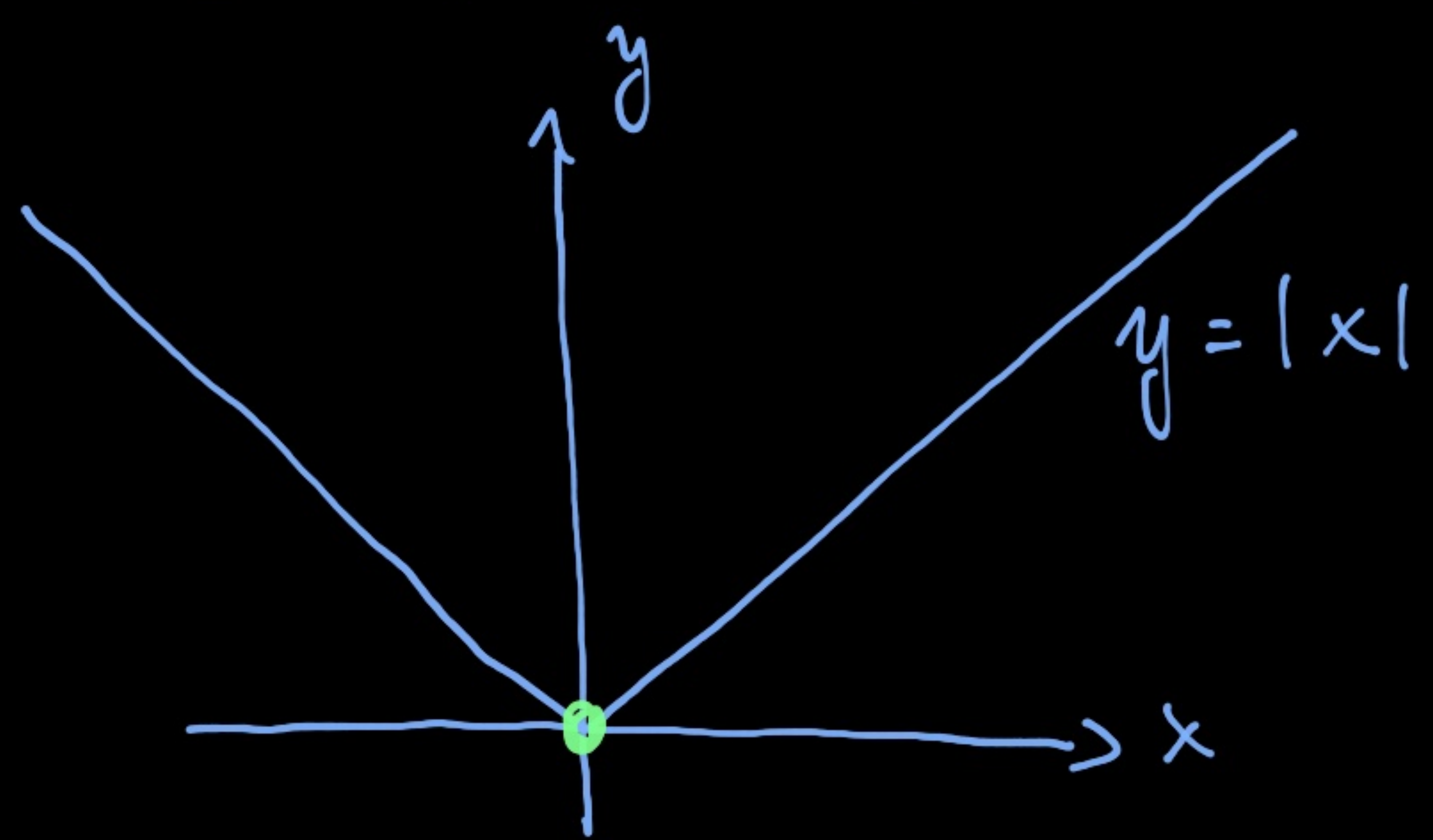
Hausaufgabe 04 A:

Vorgelegt ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$.

(a) Berechne $f'(2)$.

(b) Berechne $f'(x_0)$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.

<u>Beispiel</u> $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \phantom{\text{für }} x \leq 0 \end{cases}$



Für $x_0 > 0$ argumentiere wie folgt: $\lim\limits_{x \to x_0}$ " " hängt nur von x mit $x \approx x_0$ ab. Darf also voraussetzen: $x > 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{f. } x_0 > 0$$

Analog $f'(x_0) = -1$ für $x_0 < 0$

Für $x_0 = 0$: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x}{x} = 1$ für $x > 0$

und $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{-x}{x} = -1$ für $x < 0$

Differenzenquotient nimmt Werte $+1$ <u>und</u> -1 in bel. Intervallen $(0 - \delta, 0 + \delta)$ an, also gibt es $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ nicht.

Also: $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ <u>nicht</u> differenzierbar.

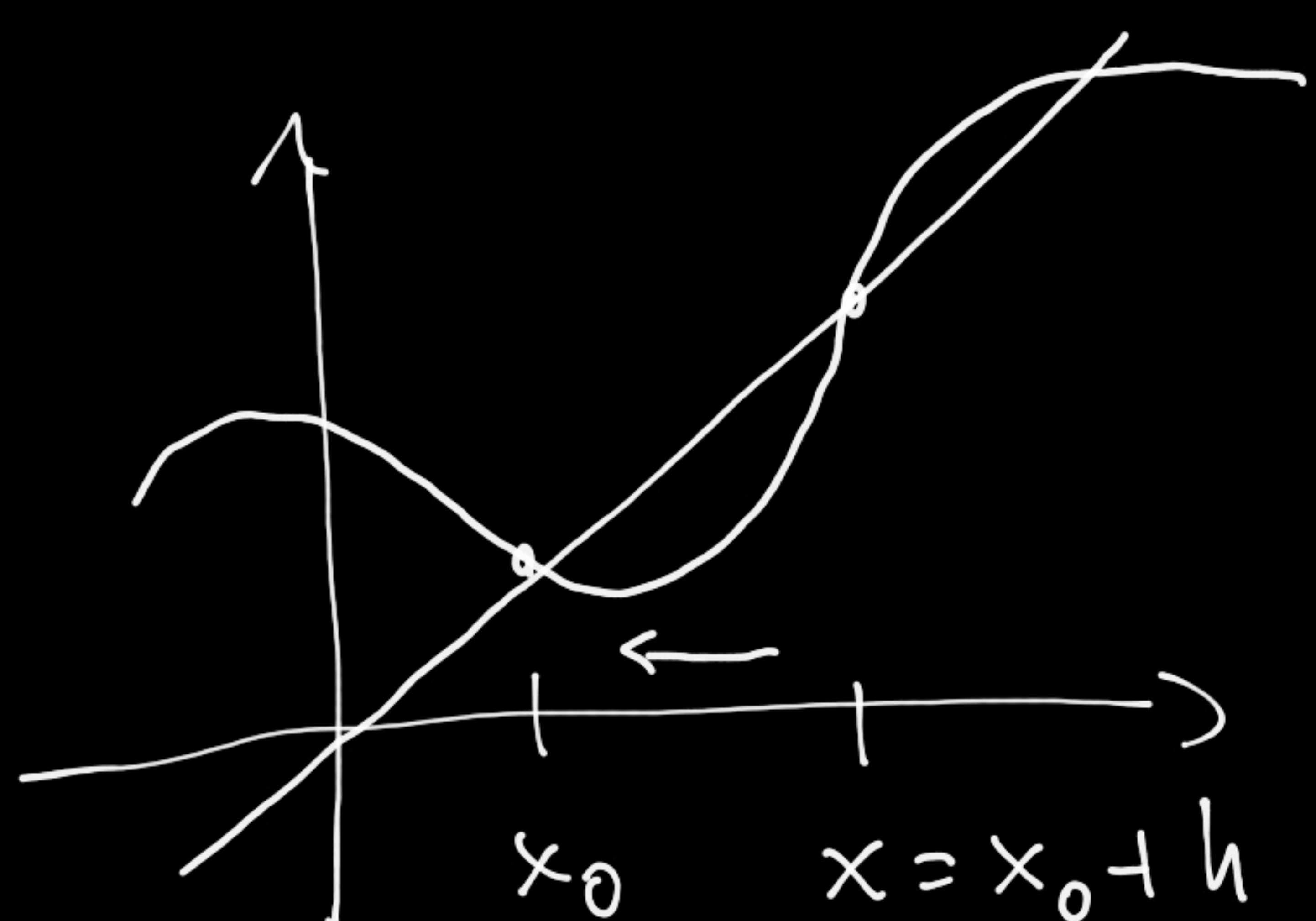
2.2 Die "h-Methode"

Existiert einer der Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ oder $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, so existiert auch der andere und beide sind gleich.

Also: Kann die Ableitung stets als

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}}$$

berechnen.



Bsp: $f(x) = x^2$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot 3 \cdot h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{(6+h)}_{\text{Pol. in } h} = 6 + 0 = 6.$$

2.3 Satz: Vorgelegt: $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$.

Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es eine Zahl a und eine Funktion $r : D_f \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x) \quad \text{für alle } x \in D_f$$

und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{x - x_0} = 0$ gilt.

In diesem Fall gilt $a = f'(x_0)$.

Begründung $\quad r(x) = f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a = 0$$ genau dann, wenn $a = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + r(x)$

  $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) = f'(x_0)\cdot x + \big(f(x_0) - x_0\cdot f'(x_0)\big)$

  Gerade mit Steigung $f'(x_0)$ durch $(x_0, f(x_0))$,

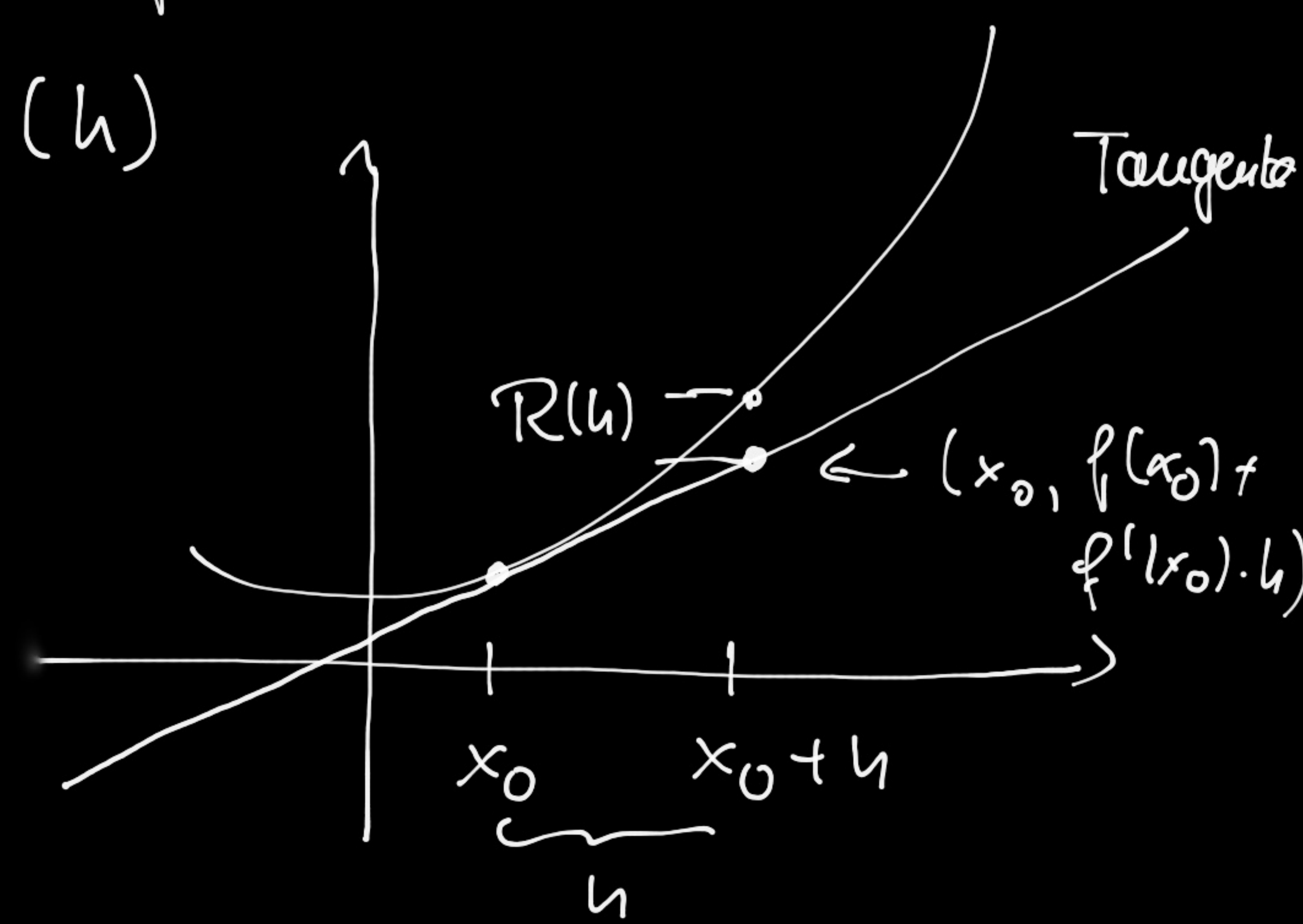
  d.h. das <u>ist</u> die Tangente in x_0 !

- Ersetzen von x durch $x_0 + h$ führt auf

  $$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + R(h)$$

  mit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R(h)}{h} = 0$

  (Dabei $R(h) = r(x_0 + h)$)



2.4 Satz. Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in D_f$. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es eine Funktion $\varphi(h)$, die in $h=0$ stetig ist, so dass

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h) \cdot h$$

für alle sinnvollen h (d.h. $x_0 + h \in D_f$) gilt.

In diesem Fall gilt $f'(x_0) = \varphi(0) \left(= \lim_{h\to 0} \varphi(h)\right)$

$$\varphi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & \text{für } h \neq 0 \\ \varphi(0) & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

mit $\varphi(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \varphi(h)$

(Stetigkeit in $h=0$)

<u>Beispiel</u>: $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $f'(x) = 2x$

- $f(2+h) = f(2) + f'(2)\cdot h + R(h)$

  $(2+h)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot h + R(h)$

  $(2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$, also $R(h) = h^2$

  mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$ ✓

  $[\ f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + R(h)\ ]$

- $f(2+h) = f(2) + \varphi(h)\cdot h$

  $(2+h)^2 = 2^2 + (4+h)\cdot h$, d.h. $\varphi(h) = 4+h$

  $\varphi(h)$ ist in $h=0$ stetig, also ist f in $x_0 = 2$ differenzierbar und $f'(2) = \varphi(0) = 4+0 = 4$.

Übung: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$.

Zeige die Differenzierbarkeit in $x_0 = 3$ mit Hilfe von Satz 2.3 und berechne die Ableitung.

Lösung

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$
\begin{aligned}
f(3+h) &= (3+h)^3 - (3+h)^2 + 2 \\
&= 3^3 + 3^3 \cdot h + 3^2 \cdot h^2 + h^3 - 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot h - h^2 + 2 \\
&= \underbrace{3^3 - 3^2 + 2}_{= f(3)} + (3^3 - 2 \cdot 3) \cdot h + (3^2 + h - 1) \cdot h^2 \\
&= \underbrace{20}_{= f(3)} + \underbrace{21}_{a} \cdot h + \underbrace{(8+h) \cdot h^2}_{R(h)}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.
\end{aligned}
$$

Satz 2.3: f ist in $x_0 = 3$ differenzierbar mit Ableitung

$a = 21 = f'(3)$.

Übung: $f(x) = x^3 - x + 8$

Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in $x_0 = -2$ mit Hilfe von Satz 2.4 und berechne $f'(-2)$.

Lösung

$$\begin{aligned} f(-2+h) &= (-2+h)^3 - (-2+h) + 8 \\ &= (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 h + 3\cdot(-2)\, h^2 + h^3 \\ &\quad - (-2) - h + 8 \\ &= \underbrace{4}_{f(-2)} + h \cdot \underbrace{(11 - 6h + h^2)}_{\varphi(h) \text{ ist stetig in } h=0} \end{aligned}$$

(2.4): f ist differenzierbar in $x_0 = -2$

mit $f'(-2) = \varphi(0) = 11$.

Übung: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in $x \neq 0$ mit Hilfe der Definition und bestimme $f'(x)$.

Lösung: (h-Methode)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h} \cdot x \cdot (x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\underbrace{x \cdot (x+h)}_{\substack{\text{stetig in } h=0 \\ \text{Grenzwert durch Einsetzen}}}} = \frac{-1}{x^2}$$

Hausaufgabe 04 B:

(a) Berechne $f'(x)$ für $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $(x \neq -1)$.

(b) Zeige die Differenzierbarkeit von $f(x) = x^5 - x^3$ mit Hilfe von Satz 2.4 und berechne $f'(x)$.

Hinweis: $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$

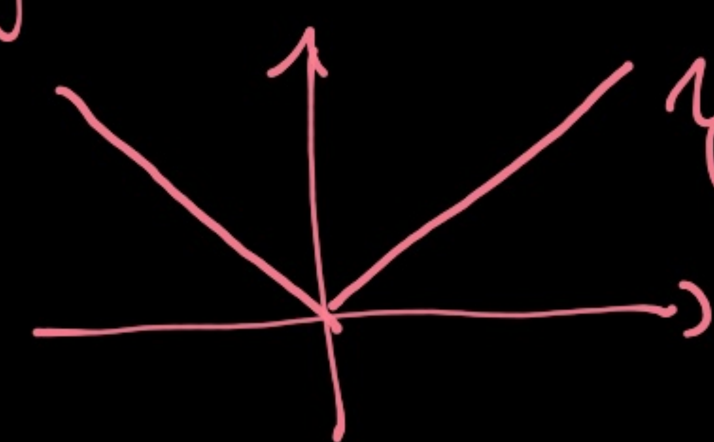
$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

(Pascalsches Dreieck)

2.5 Notiz: Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$, die in $x_0 \in D_f$ differenzierbar ist. Dann ist f in x_0 stetig.

⚠ Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, z.B.

$f(x) = |x|$



$y = |x|$ ist stetig ✓

In $x_0 = 0$ nicht diff'bar: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

hat keinen Grenzwert für $x \to 0$

Zur Notiz: Zeige $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Stetigkeit in x_0)

- Wissen $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

  $f(x) - f(x_0)$ ← geht auch gegen 0 ✓

  $x - x_0$ ← geht für $x \to x_0$ gegen x_0

- $f(x_0 + h) = f(x_0) + \varphi(h) \cdot h$ mit φ in $h = 0$ stetig

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} f(x_0) + \varphi(h) \cdot h = f(x_0) + \varphi(0) \cdot 0$$

$$= f(x_0) \qquad \square$$

2.6 Rechenregeln

Vorgelegt: Funktionen $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$.

Voraussetzung: f und g sind in $x_0 \in D_f \cap D_g$ diff'bar

Schnittmenge $D_f \cap D_g = \{x \mid x \in D_f \text{ und } x \in D_g\}$

Dann gilt:

(a) Die Funktion $h = f+g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$,
$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
ist in x_0 differenzierbar. Dabei gilt
$$h'(x_0) = \boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

(b) $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

(c) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (Produktregel)

(d) Falls $g(x_0) \neq 0$, so gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g(x_0)^2}$

Quotientenregel

Speziell: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beispiele:

(a) $f(x)$ konstant $\leadsto$ $f'(x_0) = 0$

$f(x) = c$ (f. alle x), $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$ ✓

(b) $f(x) = x$ hat die Ableitung $f'(x_0) = 1$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$ ✓

(c) $h(x) = c \cdot f(x)$, f ist diff'bar

$h'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

Dazu: $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ mit $g(x) = c$, also $g'(x_0) = 0$

Jetzt Produktregel.

Oder: $\underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}_{h'(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$c \cdot f'(x_0)$

(d) $h(x) = x^2 = f(x) \cdot g(x)$ mit $f(x) = x = g(x)$

Produktregel: $h'(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{=1} \cdot \underbrace{g(x_0)}_{=x_0} + \underbrace{f(x_0)}_{=x_0} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{=1} = 2 x_0$

(e) $h(x) = x^3 = x \cdot x^2 = f(x) \cdot g(x)$

mit $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $f'(x_0) = 1$, $g'(x_0) = 2x_0$

Produktregel: $h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

$= 1 \cdot x_0^2 + x_0 \cdot (2x_0) = 3x_0^2$

Allgemein: $\boxed{\text{Die Ableitung von } f(x) = x^n \text{ ist } f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}}$ (n natürliche Zahl)

Kurz: $\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$

Nachweis von (e): $(x^3)' = (x \cdot x^2)'$ | Produktregel

$= (x)' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot (2x) = 3x$

Nachweis der allg. Regel:

Falls man $(x^{n-1})' = (n-1) \cdot x^{n-2}$ schon bewiesen hat, so gilt $(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' =$

$= (x)' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$

$= n \cdot x^{n-1}$. z.B. $n = 4$: $(x^3)' = (x^{4-1})' = 3 \cdot x^2$

$\rightsquigarrow (x^4)' = 4 \cdot x^3$

(f) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 42$

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + 42)'$$

$$= (x^3) - (2x^2)' + (5x)' + (42)'$$ Summenregel

$$= 3x^2 - 2(x^2)' + 5\cdot(x)' + 0$$ bish. Ergebnisse

$$= 3x^2 - 2\cdot(2x) + 5\cdot 1$$ (— " —)

$$= 3x^2 - 4\cdot x + 5$$

Allgemein: $(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0)'$

$$= c_n\cdot(x^n)' + c_{n-1}(x^{n-1}) + \dots\dots c_1(x)' + (c_0)'$$

$$= n\cdot c_n\cdot x^{n-1} + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2c_2 x + c_1$$

(g) $\left(\dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x + 42}{x^2 + 8x + 24}\right)'$

$$= \frac{(x^2+8x+24)\cdot(x^3-2x^2+5x+42)' - (x^2+8x+24)'\cdot(x^3-2x^2+5x+42)}{(x^2+8x+24)^2}$$

$$= \left[(x^2+8x+24)\cdot(3x^2-4x+5) - (2x+8)\cdot(x^3-2x^2+5x+42)\right] / (x^2+8x+24)^2$$

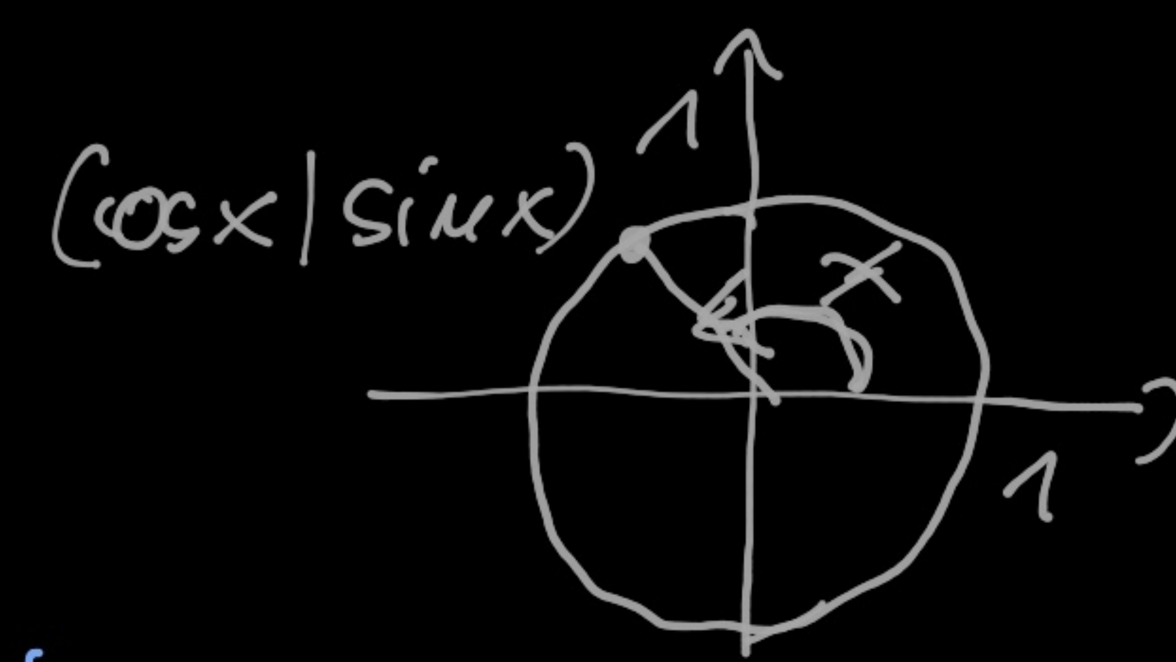
$$= \dots$$

(h) $(\cos x)' = -\sin x \quad , \quad (\sin x)' = \cos x$ ⊛

$$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{f(x)}{g(x)} , \qquad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

Quotientenregel:

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) f(x)}{g(x)^2}$$



$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2}$$

Schreibe
$\cos^2 x = (\cos x)^2$
$\sin^2 x = (\sin x)^2$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \begin{cases} 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

(trigonometrische Pythagoras: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

⊛ x immer im Bogenmaß !

Wie weist man die Rechenregeln nach?

f, g sind in x_0 diff'bar; also

(1) $f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h)\cdot h$, $\quad \varphi(0) = f'(x_0)$
mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\varphi(h)$

(2) $g(x_0+h) = g(x_0) + \psi(h)\cdot h$, $\quad \psi(0) = g'(x_0)$
mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\psi(h)$.

(φ : phi
ψ : psi
χ : chi)

(a) $s(x) = f(x) + g(x)$

$$
\begin{aligned}
s(x_0+h) &= f(x_0+h) + g(x_0+h) \\
&\overset{(1.),(2.)}{=} f(x_0) + \varphi(h)\cdot h + g(x_0) + \psi(h)\cdot h \\
&= f(x_0) + g(x_0) + \underbrace{\{\varphi(h) + \psi(h)\}\cdot h}_{\chi(h)\cdot h} \\
&= s(x_0) + \chi(h)\cdot h
\end{aligned}
$$

χ ist in $h=0$ stetig, da Summe der dort stetigen Fkt. φ, ψ

Folgt: s ist in x_0 diff'bar, $s'(x_0) = \chi(0) = \varphi(0) + \psi(0)$
$= f'(x_0) + g'(x_0)$

(1) $f(x_0+h) = f(x_0) + \varphi(h)\cdot h \,, \qquad \varphi(0) = f'(x_0)$

mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\varphi(h)$

(2) $g(x_0+h) = g(x_0) + \psi(h)\cdot h \,, \qquad \psi(0) = g'(x_0)$

mit einer in $h=0$ stetigen Funktion $\psi(h)$.

<u>Produktregel</u>: $\quad p(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$
\begin{aligned}
p(x_0+h) &= f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) \\
&\overset{(1.),(2.)}{=} \big(f(x_0)+\varphi(h)\cdot h\big)\cdot\big(g(x_0)+\psi(h)\cdot h\big) \\
&= f(x_0)\cdot g(x_0) + \Big\{\underbrace{\varphi(h)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\psi(h) + \varphi(h)\cdot\psi(h)\cdot h}_{=\chi(h)}\Big\}\cdot h \\
&= p(x_0) + \chi(h)\cdot h
\end{aligned}
$$

$\chi(h)$ ist in $h=0$ stetig, da φ, ψ dies sind.

Also: $p(x)$ ist in x_0 diff'bar mit

$$
\begin{aligned}
p'(x_0) = \chi(0) &= \varphi(0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\psi(0) + \varphi(0)\cdot\psi(0)\cdot 0 \\
&= f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Hausaufgabe 05A:

(a) Zeige $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

Hinweis: $\frac{1}{g(x_0)+\varphi(h)\cdot h} - \frac{1}{g(x_0)} = \{\ldots\}\cdot h$

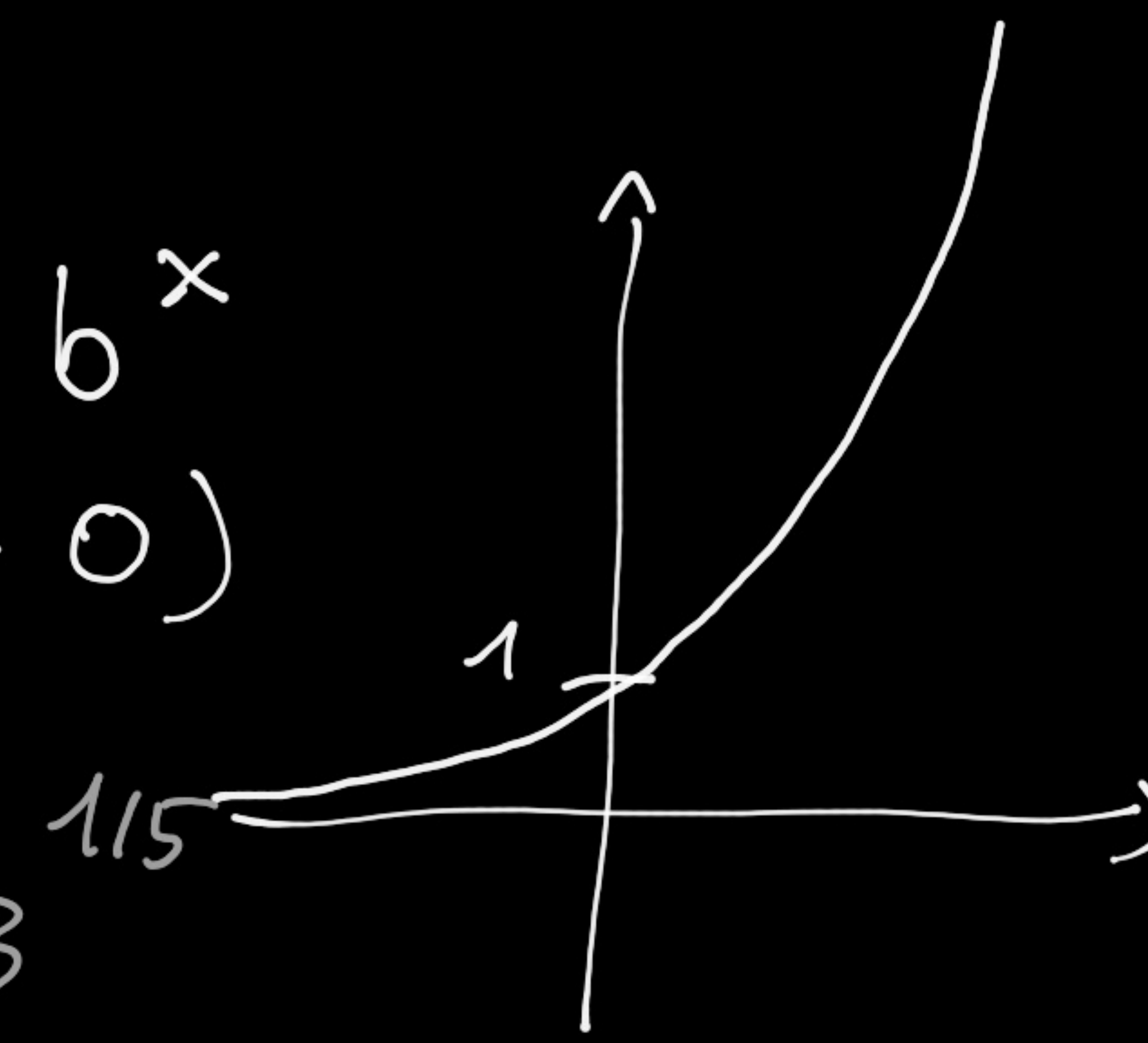
(b) Schließe $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$ aus (a)

Hinweis: Produktregel.

(c) Berechne die Ableitung von $f(x) = \frac{x^5 - 3x^2 + 6}{x^4 + x^2 + 1}$.

2.7 Die Eulersche Zahl e $\approx 2{,}718..$

exponentielles Wachstum : $f(x) = b^x$
$(b > 0)$



$$2^{\sqrt{2}} = ?$$

$$2^{1,4} = 2^{7/5} = \left(2^7\right)^{1/5} = 128^{1/5}$$
$$= \sqrt[5]{128}$$

Später: $f(x) = b^x$ ist differenzierbar

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} \qquad b^{x+h} = b^x \cdot b^h$$

$$= \underbrace{b^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}}_{f'(0)} = f'(0)\cdot f(x)$$

$f'(0) < 1$ für $b = 2$
$f'(0) > 1$ für $b = 3$

$$g(h) = \frac{b^h - 1}{h}$$
$h = -1 \ldots 1$

Es gibt eine Zahl $b = e$ zwischen 2 und 3 mit $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Diese Zahl heißt <u>Eulersche Zahl</u> $e = 2{,}7\ldots$

Für $f(x) = e^x$ gilt $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

und damit $f'(x) = f'(0) \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

Kurz: $$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

<u>Notiz</u>: $g'(x) = g(x)$ gilt für $g(x) = c \cdot e^x$
wobei c eine Konstante ist.

Differentialgleichung, DGL
ODE (ordinary differential equation)

2.8 Die Kettenregel

Zur Erinnerung: Verkettete Funktionen

Vorgelegt: Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$

Voraussetzung: $g(x) \in D_f$ für jedes $x \in D_g$

Dann kann man $g(x)$ in $f(x)$ einsetzen: $f(g(x))$
und erhält eine neue Funktion

$$f \circ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Verkettung von f und g

Beispiel: $g(x) = \sin x$ für $0 \leq x \leq \pi$ (also $D_g = [0, \pi]$)

$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sqrt{\sin x}$$

Zusätzliche Voraussetzung:

g ist diff'bar in x_0

f ist diff'bar in $g(x_0)$

Dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar

mit Ableitung $\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)}$

Kettenregel

<u>Beispiel</u> $p(x) = \underbrace{\cos}_{f}(\underbrace{\sin}_{g} x)$

$f'(x) = -\sin x$

$g'(x) = \cos x$

$$p'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= f'(\sin x) \cdot g'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

Nachweis der Kettenregel:

$$g(x_0+h) = g(x_0) + \varphi(h)\cdot h$$

mit $\varphi(h)$ ist stetig in $h=0$ und $\varphi(0) = g'(x_0)$

Mit $y_0 = g(x_0)$ gilt

$$f(y_0+k) = f(y_0) + \psi(k)\cdot k$$

mit $\psi(k)$ ist stetig in $k=0$ und $\psi(0) = f'(y_0)$
$= f'(g(x_0))$

Jetzt rechne:

$$(f\circ g)(x_0+h) = f(g(x_0+h)) = f(\underbrace{g(x_0)}_{y_0} + \underbrace{\varphi(h)\cdot h}_{k})$$

$$= f(y_0) + \psi(k)\cdot k$$

$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{(f\circ g)(x_0)} + \underbrace{\{\psi(\varphi(h)\cdot h)\cdot\varphi(h)\}}_{\chi(h) \text{ ist stetig in } h=0}\cdot h$$

$f\circ g$ ist in x_0 diff'bar mit

$$(f\circ g)'(x_0) = \chi(0) = \psi(\underbrace{\varphi(0)\cdot 0}_{=0})\cdot\varphi(0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

∎

Übung

(a) Falls wir bereits wüssten, dass $\sqrt{x}$ für $x > 0$ differenzierbar ist, wie könnte man $(\sqrt{x})'$ auf der Gleichung $(\sqrt{x})^2 = x$ per Kettenregel ermitteln?

Lösung: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = (\sqrt{x})^2$$

g diff'bar mit unbekannter Ableitung $g'(x) = (\sqrt{x})'$

f diff'bar mit $f'(x) = (x^2)' = 2x$

Aus $(\sqrt{x})^2 = x$ folgt

$$\boxed{1} = (x)' = ((\sqrt{x})^2)' = (f \circ g)'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) = \boxed{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})'}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(Gleichung auflösen)}$$

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir sehen $c = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

(i) Sind $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Funktionen?

(ii) Berechne $(f \circ g)'$ und $(g \circ f)'$

(iii) Berechne für $(f \circ g)'$ sämtliche Nullstellen

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \leq x \leq \pi$

<u>Lösung</u> (i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{\sin x}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin 2^x$

$f \circ g \neq g \circ f$, denn $2^{\sin \frac{\pi}{2}} = 2^1 = 2 \neq \underbrace{\sin 2^{\pi/2}}_{\in [-1,1]}$

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir sehen $c = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

(ii) Berechne $(f \circ g)'$ und $(g \circ f)'$

(iii) Berechne für $(f \circ g)'$ sämtliche Nullstellen

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \leq x \leq \pi$

(ii) $(2^x)' = c \cdot 2^x$ siehe (2.7)

Kettenregel: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$= c \cdot 2^{g(x)} \cdot \cos x = c \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(f(x)) \cdot c \cdot 2^x$$

$$= c \cdot 2^x \cdot \cos(2^x)$$

(b) Betrachte $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x$.

Wir sehen $c = f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$.

$(f \circ g)'(x) = c \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x$

(iii) Berechne für $(f \circ g)'$ sämtliche Nullstellen

$\underbrace{c}_{\neq 0} \cdot \underbrace{2^{\sin x}}_{> 0} \cdot \cos x = 0$ genau dann, wenn $\cos x = 0$,

also $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit k ganze Zahl.

(iv) Bestimme den größten Wert $2^{\sin x}$ für $0 \leq x \leq \pi$

Größte Wert der stetigen Funktion $f \circ g$ auf dem abg. Intervall $[0, \pi]$

sogar diff'bar

Kandidaten : $x = 0$, $x = \pi$ (Randpunkte)

und Nullstellen der Ableitung in $(0, \pi)$,

d.h. $x = \frac{\pi}{2}$. Einsetzen $2^{\sin 0} = 1 = 2^{\sin \pi}$,

$2^{\sin \pi/2} = 2$ größte Wert !

(c) Wie lautet die Ableitung der Funktion $\sqrt{1+2^{x^2+x+1}}$?

$w(x) = \sqrt{x}$, $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (s. o.)

$f(x) = 1 + 2^{x^2+x+1}$

$p(x) = x^2+x+1$, $p'(x) = 2x+1$

$m(x) = 1 + 2^x$, $m'(x) = (2^x)' = c \cdot 2^x$

mit $c = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$

$\sqrt{1+2^{x^2+x+1}} = w(m(p(x)))$

Ableitung $(w \circ m \circ p)'(x) = (w \circ (m \circ p))'(x)$

$= w'((m \circ p)(x)) \cdot (m \circ p)'(x)$ Kettenregel

$= w'(m(p(x))) \cdot m'(p(x)) \cdot p'(x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+2^{x^2+x+1}}} \cdot c \cdot 2^{p(x)} \cdot (2x+1)$

Hausaufgabe 05B:

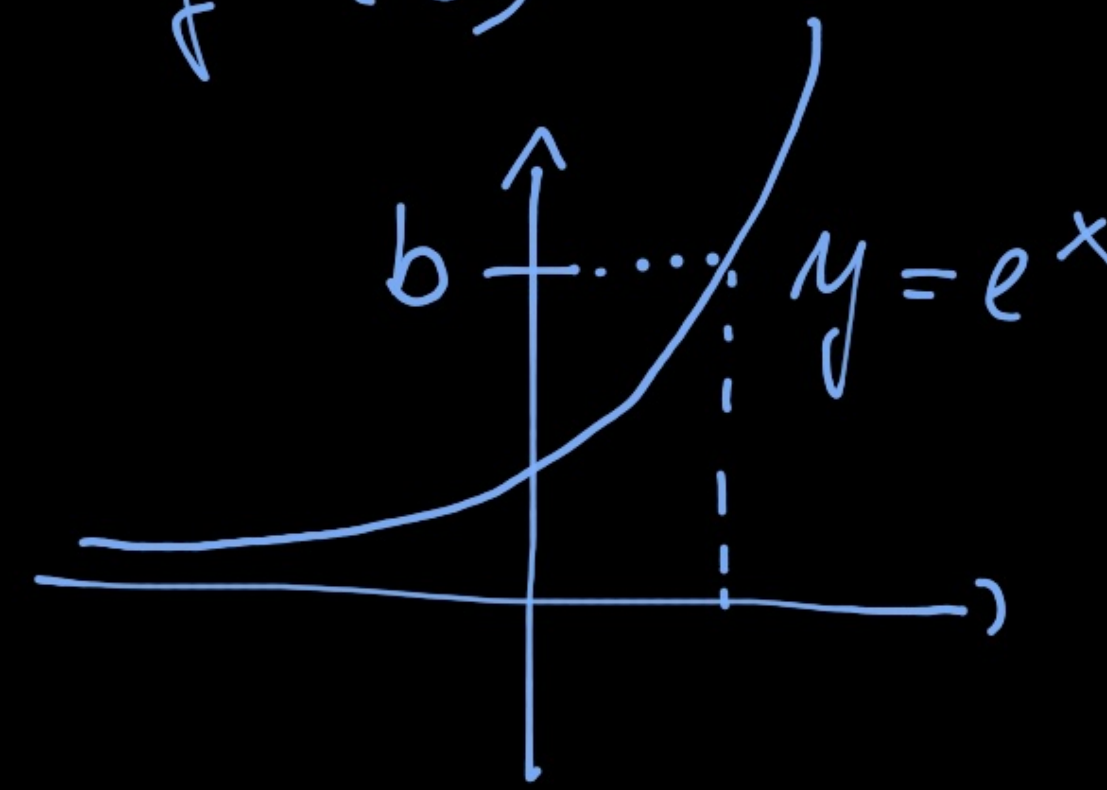
Bilde die Ableitung der folgenden Funktion

$$f(x) = \frac{\left(\sin(x^2+1) + 3\cdot\cos(x)\right)^4}{1 + e^{5\sqrt{x}}} \qquad (x > 0)$$

(d) Exponentialfunktion : $f(x) = b^x$

Ableitung $f'(x) = c \cdot b^x$ mit $c = f'(0)$

$b > 0$: Es gibt ein u mit $e^u = b$.



Potenzrechengesetz : $f(x) = b^x = (e^u)^x$

$$= e^{u \cdot x}$$

Ableiten mit Kettenregel (u ist eine Konstante)

$f(x) = m(n(x))$ mit $n(x) = u \cdot x$; $n'(x) = u$

$m(x) = e^x$; $m'(x) = e^x$

$$f'(x) = m'(n(x)) \cdot n'(x) = e^{u \cdot x} \cdot u = u \cdot b^x$$

d.h. $u = c$ bzw.

$$(b^x)' = c \cdot b^x \quad \text{mit } e^c = b \quad [c = \ln b]$$

z.B. $(2^x)' = c \cdot 2^x$ mit $e^c = 2$ $[c = \ln 2]$

2.9 Umkehrfunktionen

Vorgelegt: $f : D_f \to \mathbb{R}$ Funktion

Wann ist die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösbar.

Bsp: $f(x) = x^2 = y \quad \rightsquigarrow \quad x = \pm\sqrt{y}$, falls $y \geq 0$

Per $D_f = [0, \infty)$ erhalte eindeutige Lösung $x = \sqrt{y}$, falls überhaupt lösbar.

Abhilfe bei Nicht-Lösbarkeit: Nur $y \in [0, \infty)$ zulassen.

$$f : \underbrace{[0, \infty)}_{= D_f} \longrightarrow \underbrace{[0, \infty)}_{= W_f \text{ "Wertebereich"}}$$

Für $y \in W_f$ gibt es genau ein x mit $f(x) = y$.

$f : D_f \longrightarrow W_f$ Funktion

$f(x) \in W_f$ für alle $x \in D_f$

Dann heißt f umkehrbar (bijektiv),

falls $y = f(x)$ für jedes $y \in W_f$ genau

eine Lösung $x \in D_f$ besitzt.

Erhalte so eine Funktion $g : W_f \longrightarrow D_f$

mit $y = f(g(y))$ für alle y. $(*)$

und $x = g(f(x))$ für alle x. $(**)$

$(*)$ bedeutet : $x = g(y)$ ist Lösung von $y = f(x)$

$(**)$ $x, \tilde{x}$ Lösungen von $f(x) = y = f(\tilde{x})$

$$(**) \rightsquigarrow x = g(f(x)) = g(y) = g(f(\tilde{x})) = \tilde{x}$$

$(**)$ bedeutet: Die Lösung ist eindeutig.

<u>Definition</u>: Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \to W_f$.
Dann heißt f umkehrbar (invertierbar / bijektiv),
falls die Gleichung $y = f(x)$ für jedes $y \in W_f$
genau eine Lösung x besitzt.

Erhalte dann eine neue Abbildung
$g: W_f \to D_f$, $g(y) =$ Lösung von $y = f(x)$.
Diese Funktion heißt Umkehrfunktion von f.
Schreibe $g = f^{-1}$ (das ist NICHT $\frac{1}{f}$)

Beispiel: $f: [2, \infty) \to [4, \infty)$; $f(x) = x^2$

$f^{-1}: [4, \infty) \to [2, \infty)$; $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

2.10 Kennzeichnung der Umkehrfunktion

Vorgelegt: $f : D_f \to W_f$ Funktion

$id_{D_f} : D_f \to D_f$, $id_{D_f}(x) = x$ "Identität auf D_f"

$id_{W_f} : W_f \to W_f$, $id_{W_f}(x) = x$

Erinnerung: $g = f^{-1} : W_f \to D_f$ erfüllt

- $\underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)} = \underbrace{x}_{id_{D_f}}$ f. alle $x \in D_f$, also $g \circ f = id_{D_f}$
- $f \circ g = id_{W_f}$

(a) Genau dann ist f umkehrbar, wenn es eine Funktion $g : W_f \to D_f$ gibt mit $g \circ f = id_{D_f}$, $f \circ g = id_{W_f}$.
In diesem Fall gilt $g = f^{-1}$.

Dazu: Wenn f umkehrbar ist, so ist $g = f^{-1}$ so eine Fkt.

Umgekehrt: Gibt es eine solche Funktion g, so gilt

- $x = g(y)$ ist eine Lösung von $y = f(x)$
  Einsetzen: $y = f(g(y))$ stimmt ✓
- $x = g(y)$ ist die einzige Lösung von $y = f(x)$,
  d.h. ist $x = \tilde{x}$ eine Lösung (also $y = f(\tilde{x})$),
  so gilt $\tilde{x} = g(y)$

  Dazu wende g auf die Gleichung $y = f(\tilde{x})$ an:
  $g(y) = g(f(\tilde{x})) = \tilde{x}$ ✓

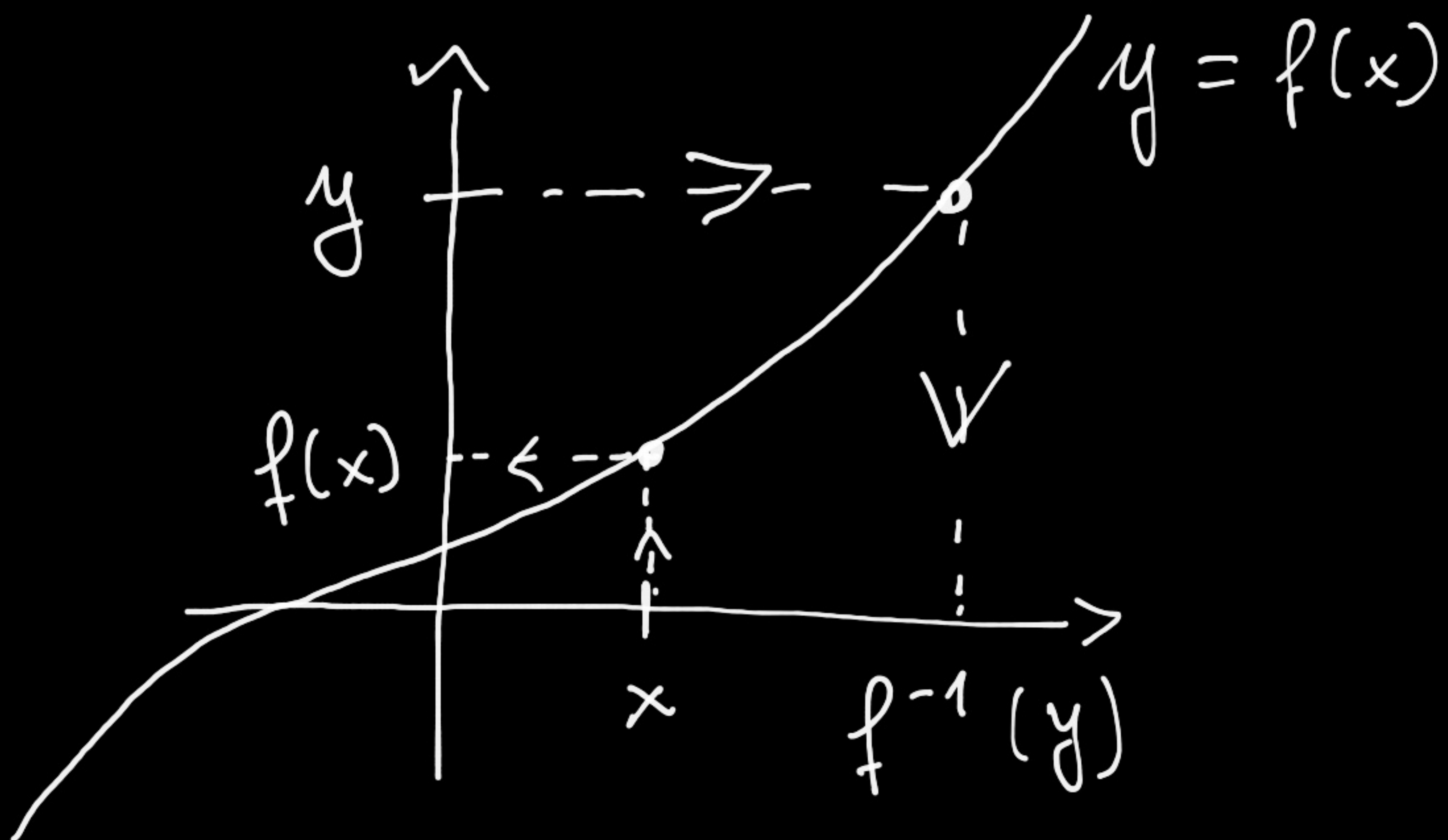
(b) f ist invertierbar, falls

- zu $y \in W_f$ gibt es ein x mit $y = f(x)$ (f ist surjektiv)

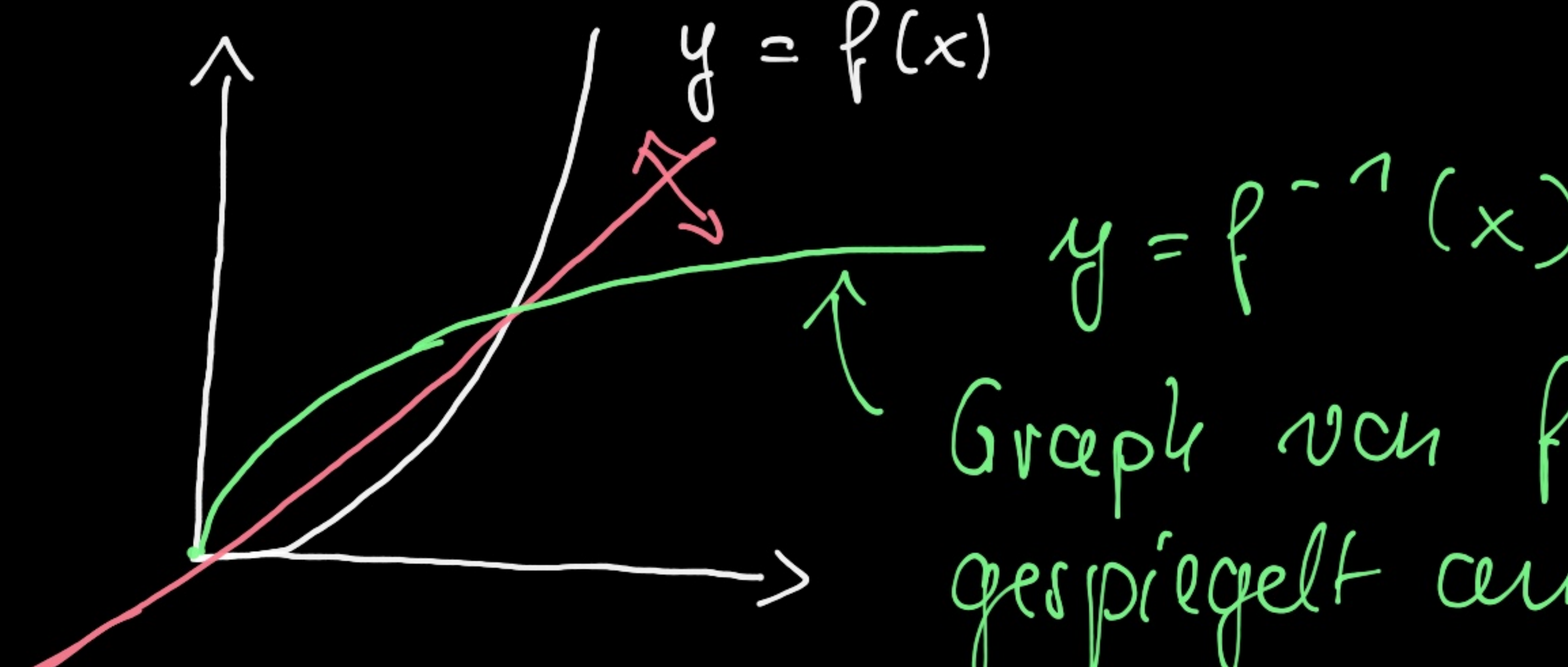
und

- Ist $f(x) = f(\tilde{x})$, so gilt $x = \tilde{x}$ (f ist injektiv)

Veranschaulichung der Umkehrfunktion



Vertauschen von x, y: Spiegelung an der Geraden $y = x$



Graph von f, gespiegelt an der Winkelhalbierenden

Strategie zum Auffinden von f^{-1}:

Starte mit $y = f(x)$

Vertausche x, y: $x = f(y)$

Per Äquivalenzumformungen: $y = f^{-1}(x)$

Beispiel: $f: [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$; $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

Zum Auffinden von f^{-1}:

- schreibe Gleichung $\quad y = \sqrt{1+x^2}$
- Tausche x, y $\quad$: $\quad x = \sqrt{1+y^2}$
- Forme um $\quad$: $\quad x = \sqrt{1+y^2}$

$$\Longleftrightarrow x^2 = 1 + y^2 \qquad\qquad x \in [1,\infty)$$
$$\Longleftrightarrow y^2 = x^2 - 1 \qquad\qquad y \in [0,\infty)$$
$$\Longleftrightarrow y = \sqrt{x^2-1}$$

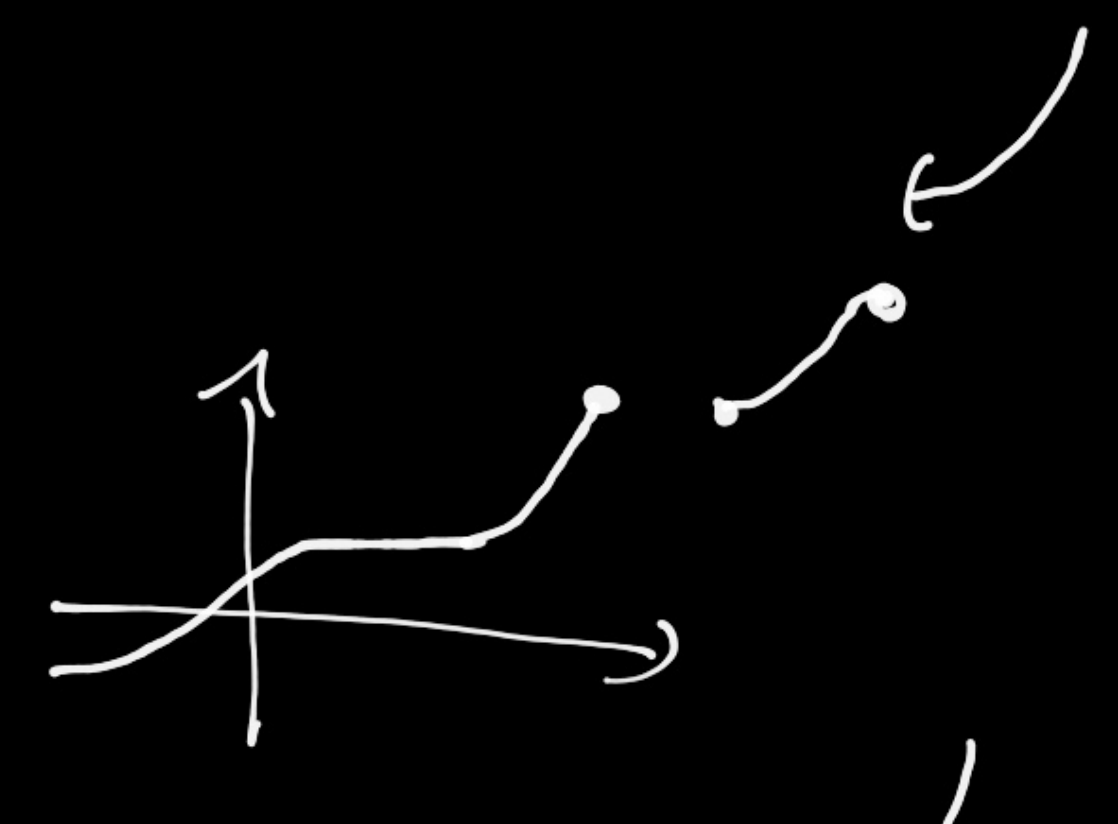
Äquivalenzumformungen!

Fazit: f ist invertierbar und

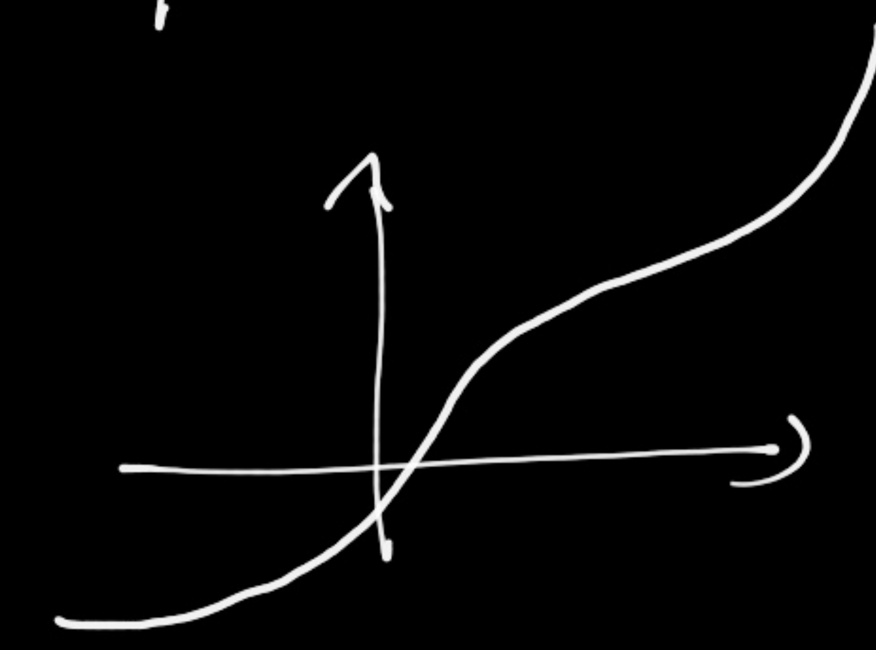
$$f^{-1}: [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$$

2.11 Monotonie

Vorgelegt: $f : D_f \to \mathbb{R}$ Funktion.



f heißt **monoton wachsend**, falls
$f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x \leq y$



f heißt **streng monoton wachsend**, falls
$f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x < y$

f heißt **monoton fallend**, falls
$f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x \leq y$

f heißt **streng monoton fallend**, falls
$f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D_f$ mit $x < y$.

monoton: monoton wachsend oder monoton fallend

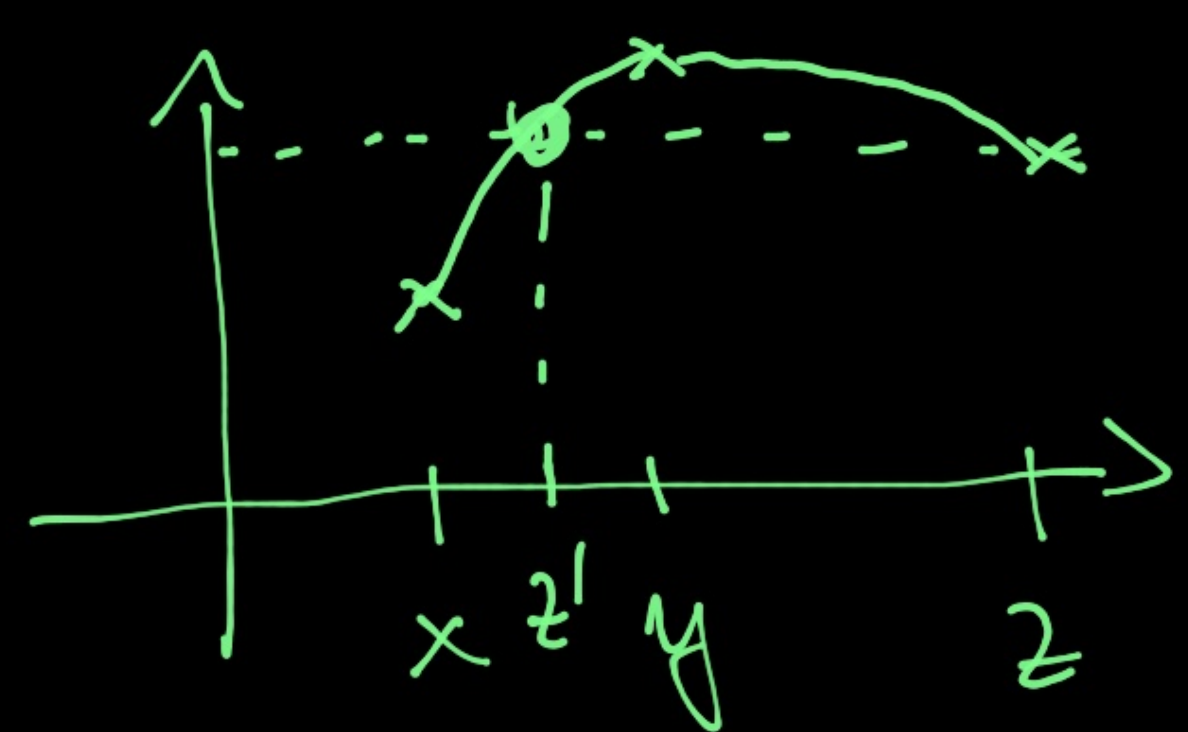
streng monoton: streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

2.12 Umkehrbarkeit stetiger Funktionen

Vorgelegt: Ein Intervall I und eine stetige Funktion $f: I \to \mathcal{Y}$ mit $\mathcal{Y} = \{ f(x) \mid x \in I \}$.

Dann ist f genau dann umkehrbar, wenn f streng monoton ist. Außerdem ist $\mathcal{Y}$ ein Intervall

Zwischenwertsatz



$f(z') = f(z)$

$\rightsquigarrow$ nicht umkehrbar

Die Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathcal{Y} \to I$ ist wieder streng monoton, also stetig.

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, stetig

Folglich: $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ist streng monoton wachsend und stetig

2.13 Umkehrregel

Vorgelegt: $f : D_f \longrightarrow W_f$ umkehrbar,
f sei in $x_0 \in D_f$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$.
Außerdem sei $f^{-1} : W_f \rightarrow D_f$ in $y_0 = f(x_0)$ stetig.
Dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} .$$

Folgt: Ist I ein Intervall und $f : I \to Y$ differenzierbar, so ist $f^{-1} : Y \to I$ stetig.
Für jedes x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$ ist dann f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ diff'bar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Θ : theta

Nachweis der Umkehrregel:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Wegen $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = A \; (\neq 0)$

gibt es ein $\Theta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon \quad \text{für } |x - x_0| < \Theta$$

Zu Θ gibt es wegen f^{-1} stetig in y_0

ein $\delta > 0$ mit $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \Theta$ für $|y - y_0| < \delta$.

Für $|y - y_0| < \delta$ gilt daher $|\underbrace{f^{-1}(y)}_{x} - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}| < \Theta$,

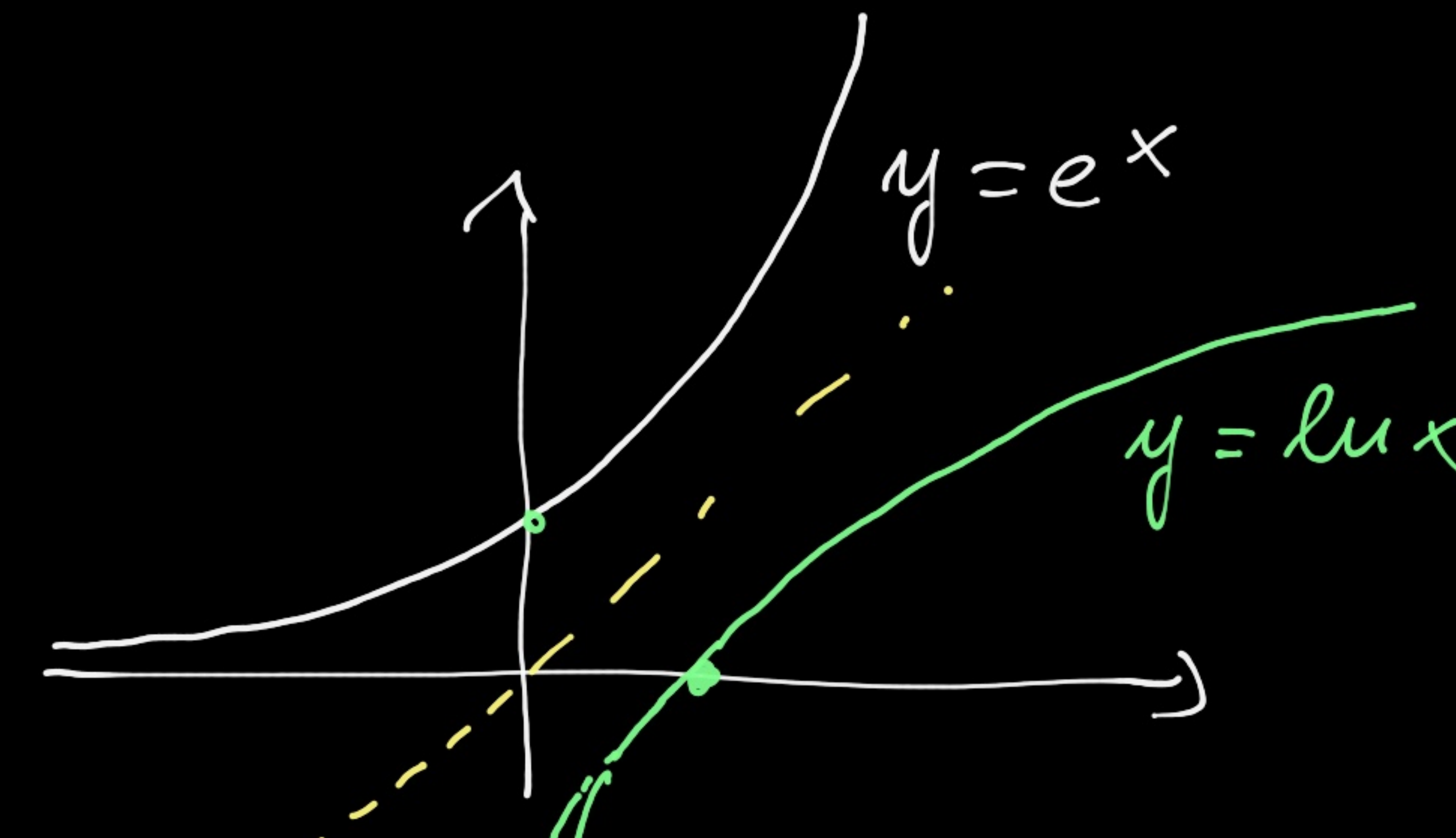
also

$$\left| \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} - A \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} - A \right|, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = A$$

$A \neq 0$, also $\underbrace{\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y'}}_{(f^{-1})'(y_0) =} = A = f'(x_0)$ ∎

Beispiel 1



$f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = e^x$
ist differenzierbar und streng monoton wachsend

Es gibt daher eine (stetige) Umkehrfunktion

$f^{-1} = \ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ "logarithmus naturalis"

Wegen $f'(x) = e^x \neq 0$ folgt (Umkehrregel)

$f^{-1} = \ln$ ist differenzierbar

$x = e^{\ln x}$ gilt für jedes $x > 0$. Ableiten nach Kettenregel:

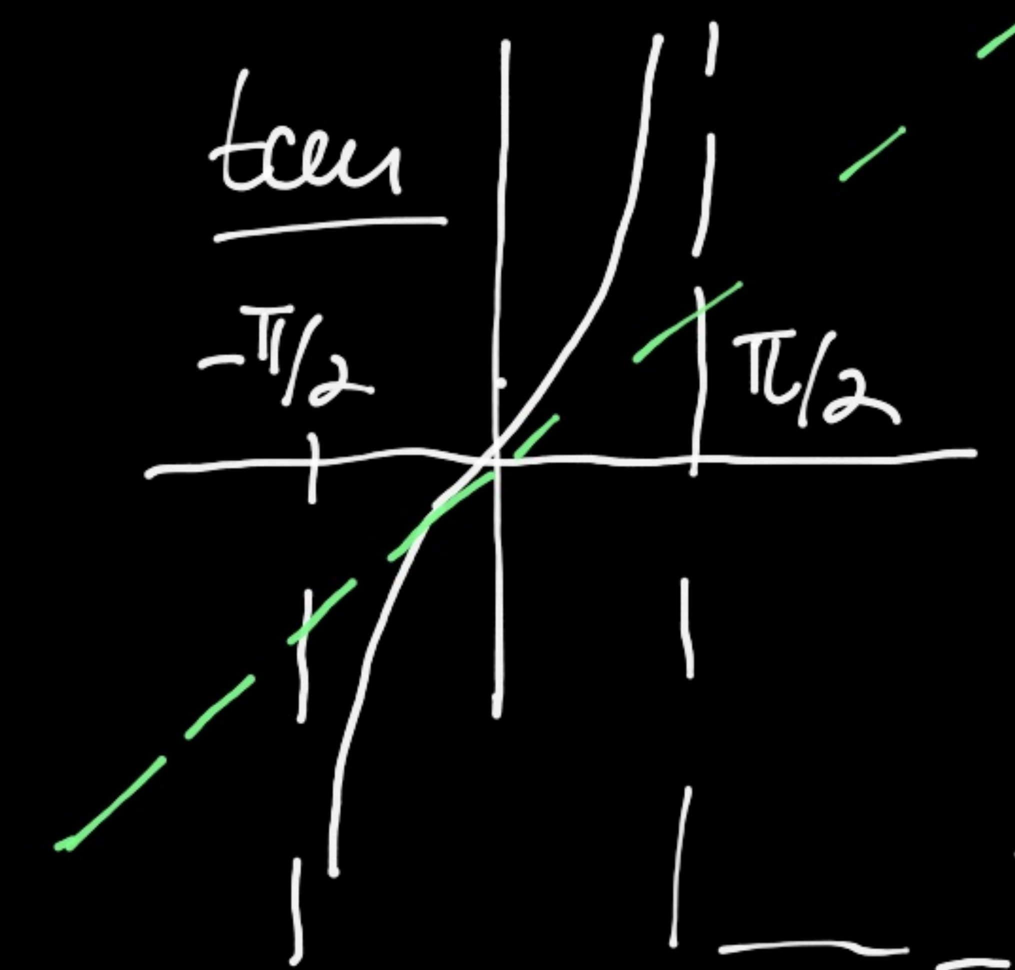
$$1 = \left(e^{\ln x}\right)' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'$$

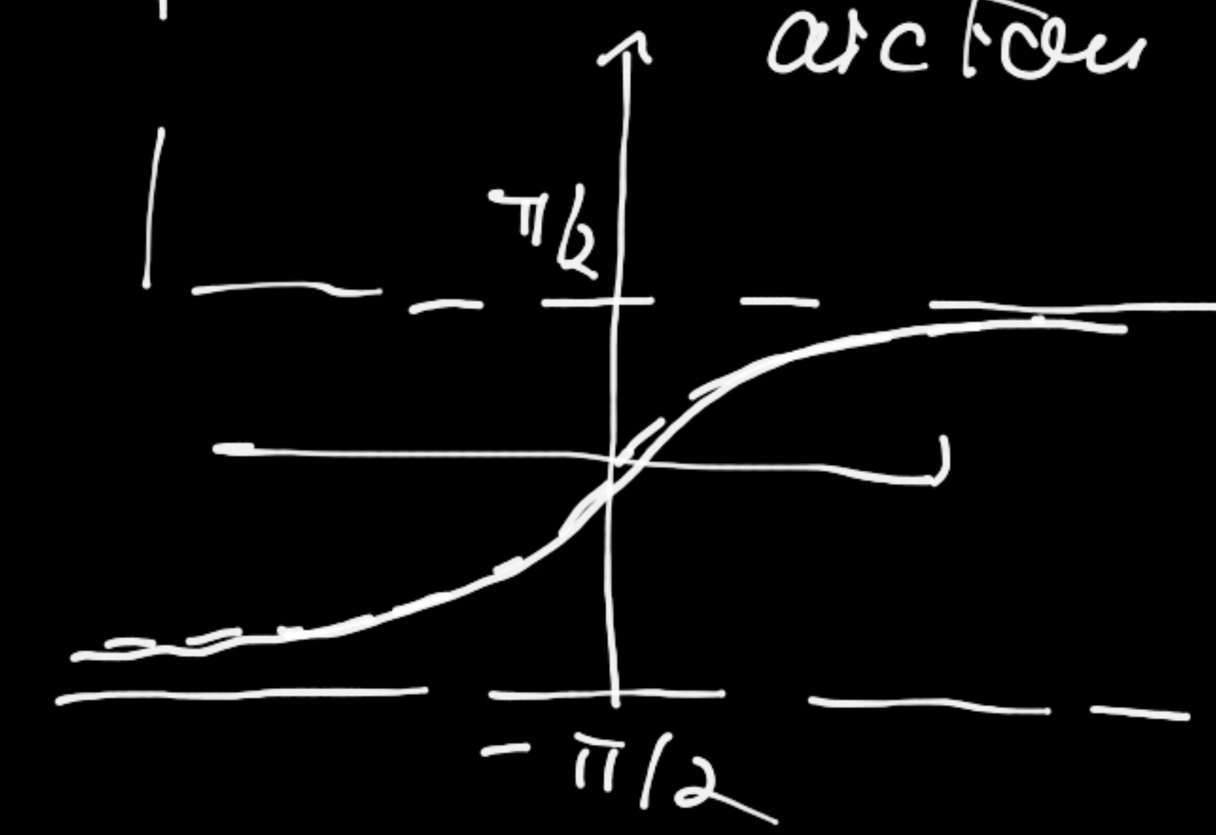
Also: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Beispiel 2 $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$

differenzierbar und bijektiv

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \neq 0$ später





Folglich ist die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

ist differenzierbar.

$$x = \tan(\arctan x) \qquad \text{ableiten}$$

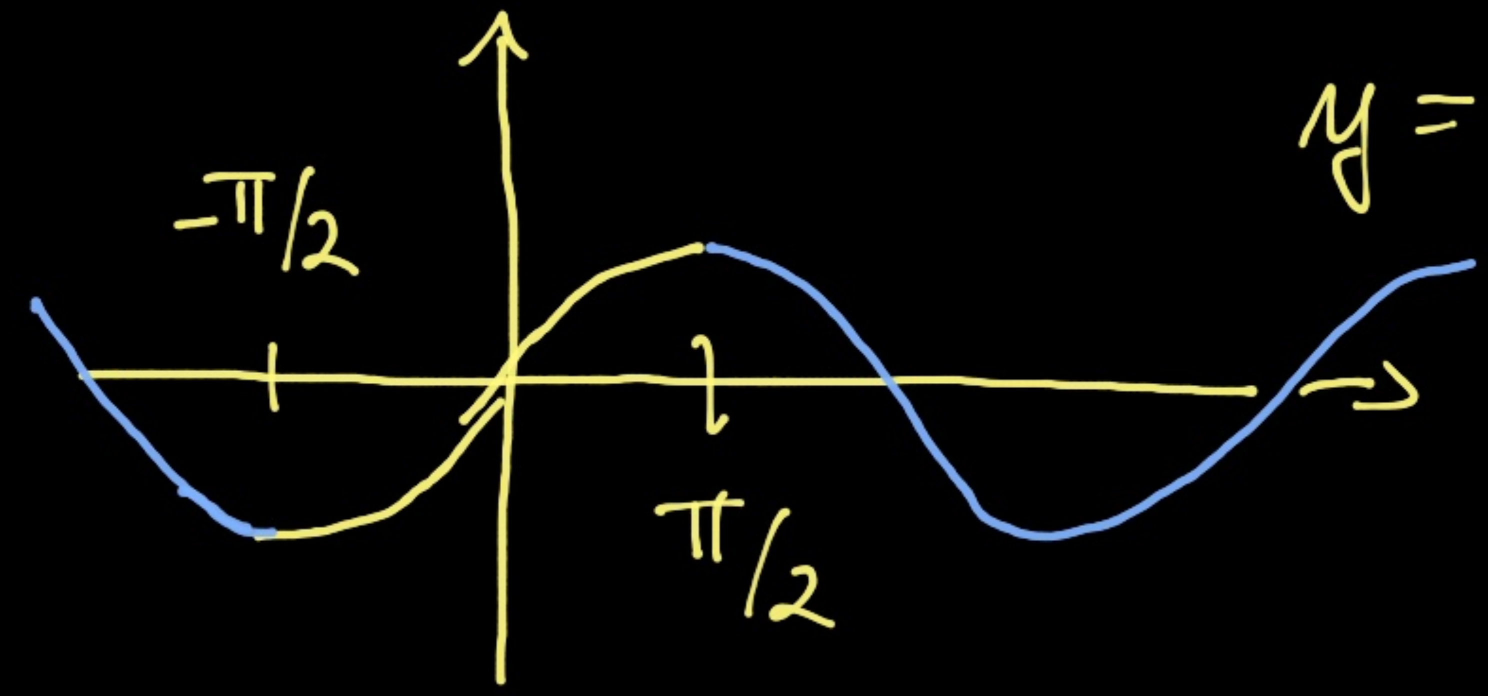
$$1 = \tan'(\arctan x) \cdot \arctan' x$$

$$= \Big[1 + \underbrace{\tan^2(\arctan x)}_{(\tan(\arctan x))^2 = x^2}\Big] \cdot \arctan' x = (1+x^2) \cdot \arctan' x$$

$$\boxed{\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}}$$

Hausaufgabe 05C:

$\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$ ist differenzierbar und streng monoton wachsend.



Zeige: Es gibt eine differenzierbare Umkehrfunktion $\arcsin : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Berechne die Ableitung von arcsin.

Hinweis: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, also $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$

Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos x > 0$, also $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

und damit $\cos \arcsin x = \dots = \sqrt{1 - x^2}$

2.14 Die Ableitung als Funktion

Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.
f heißt auf D_f differenzierbar, wenn $f'(x_0)$ für jedes $x_0 \in D_f$ existiert.
Ist f auf D_f differenzierbar, dann ergibt die Zuordnung $x \longmapsto f'(x)$ eine neue Funktion $f': D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.
Diese Funktion f' heißt die Ableitung von f.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ hat die Ableitung
$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$

Notiz: Falls f' wieder differenzierbar, so setze $f'' = (f')'$
"zweite Ableitung"

Bsp $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$
$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

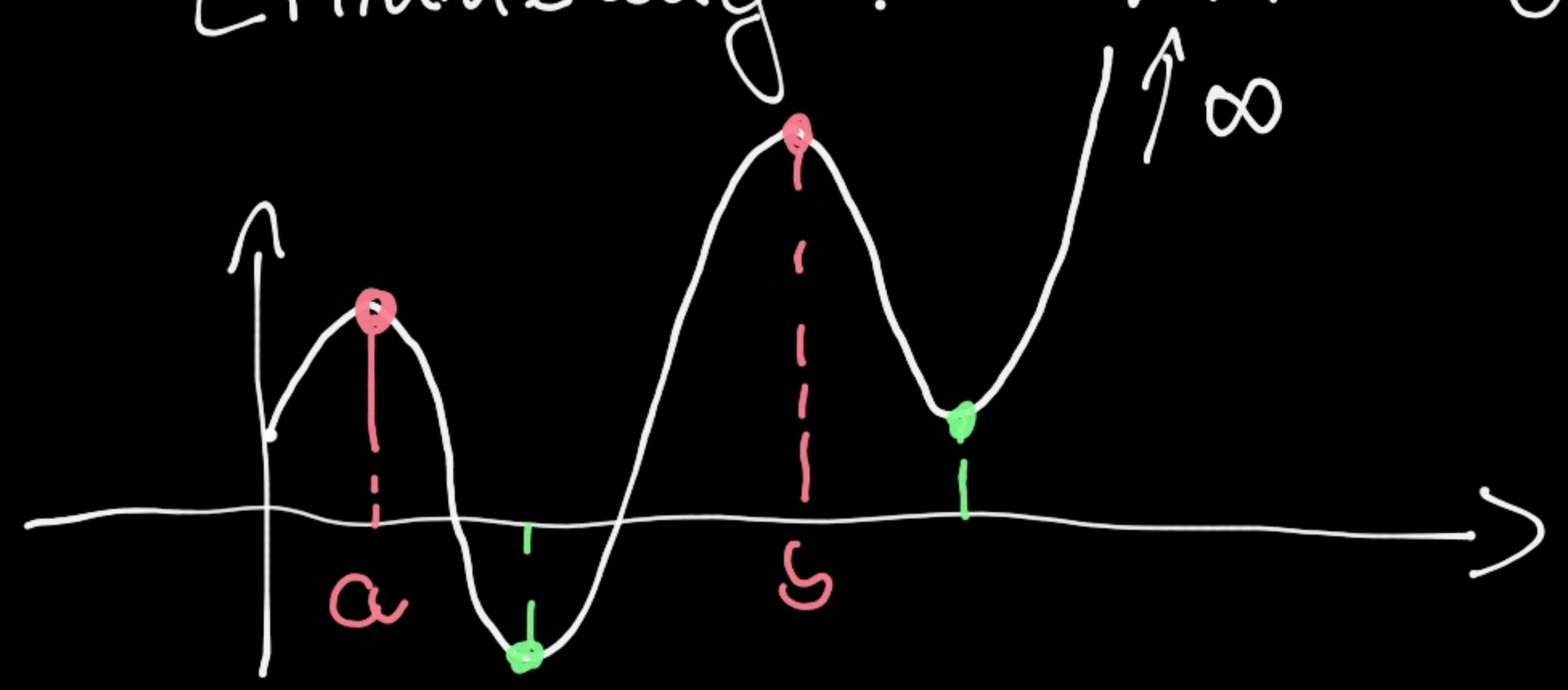
2.15 Lokale Extrema

Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$.

$x_0 \in D_f$ heißt **lokales Maximum** von f, falls:
Es gibt ein $r > 0$ mit:
$f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D_f$, $|x - x_0| < r$

$x_0 \in D_f$ heißt **lokales Minimum** von f, falls:
Es gibt ein $r > 0$ mit:
$f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D_f$, $|x - x_0| < r$

Erinnerung: $|x - x_0| < r$ bedeutet $x_0 - r < x < x_0 + r$
bzw. $x \in (x_0 - r; x_0 + r)$

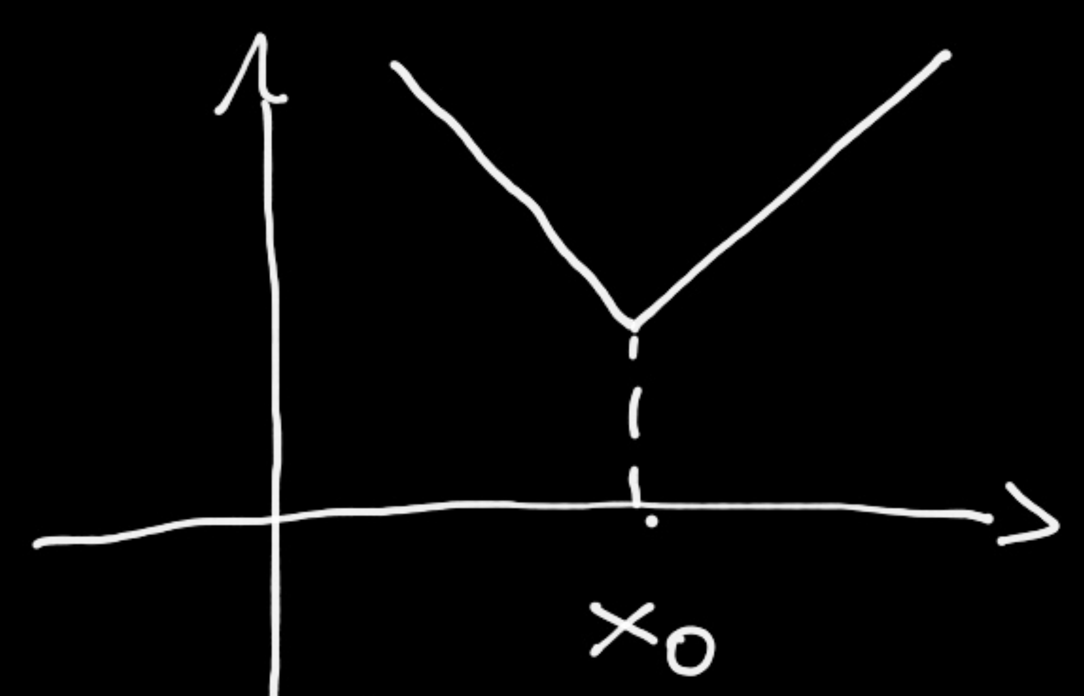


a, b lokale Maxima
(kein globales Maximum)

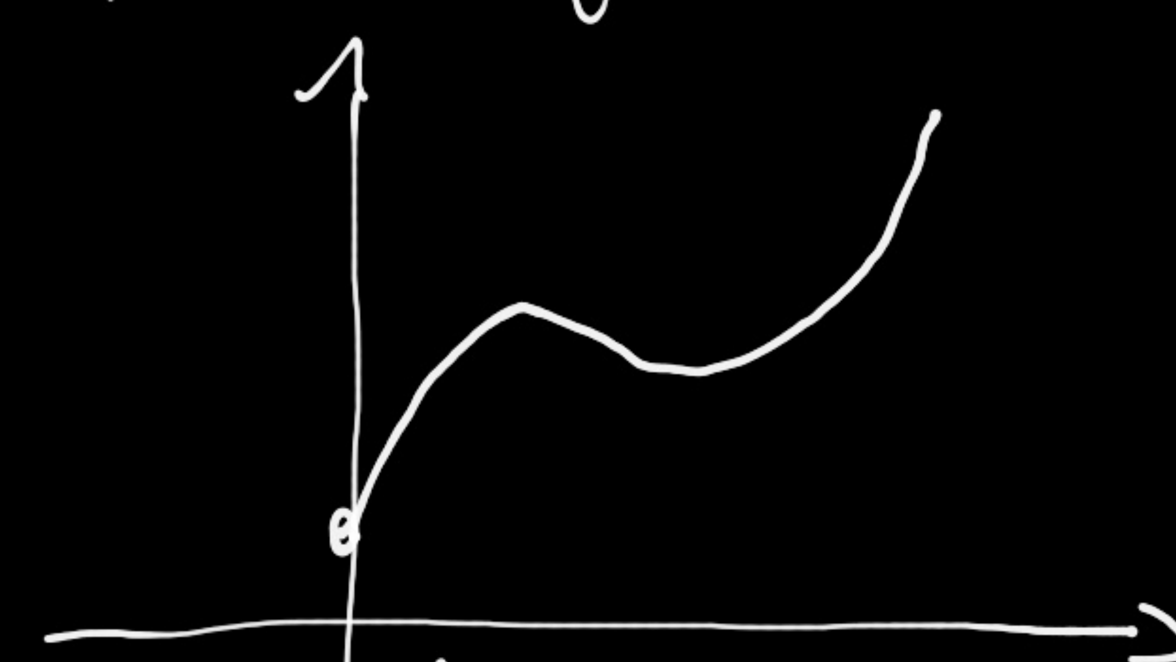
2.16 Notiz

Vorgelegt ist eine differenzierbare Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$.

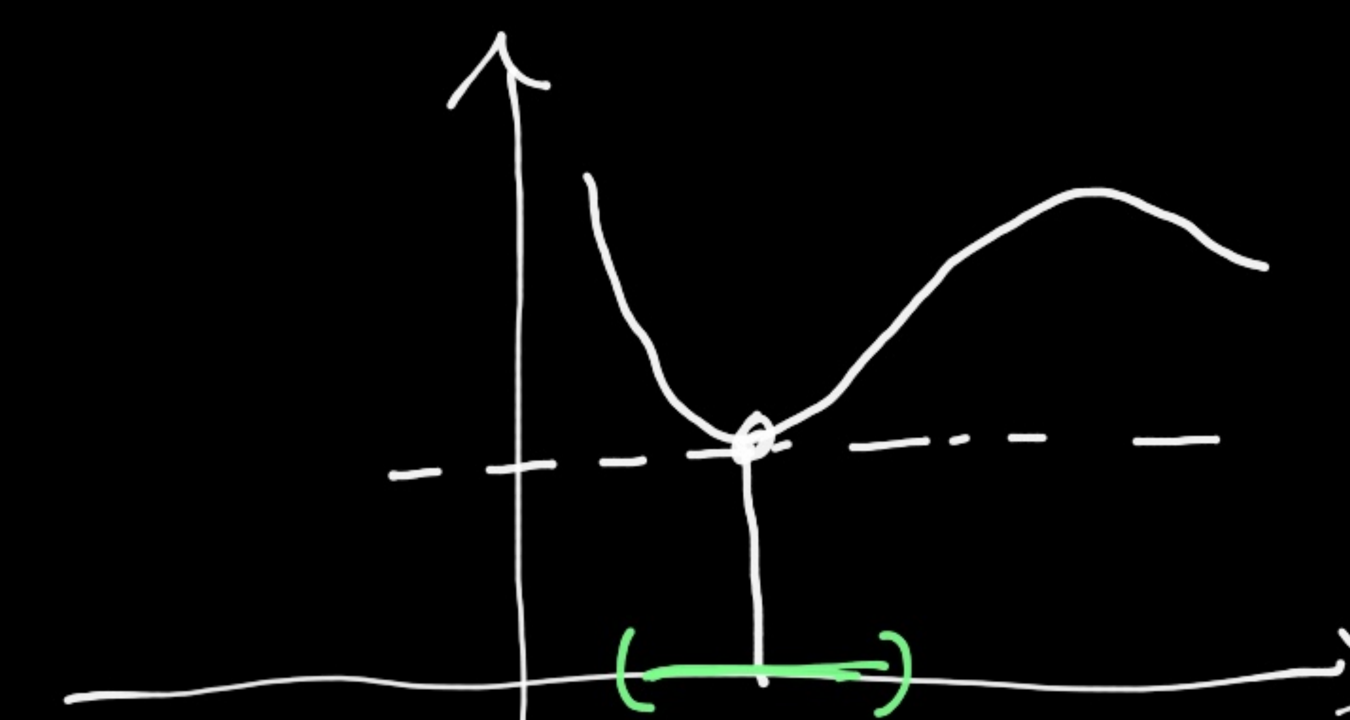
Dann gilt: Ist $x_0 \in D_f$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum, und ist f auf dem Intervall $(x_0 - s, x_0 + s)$ definiert, so gilt $f'(x_0) = 0$.



lokales Min, $f'(x_0)$ existiert nicht



lokales Min, aber $f'(x_0) \neq 0$



lokales Min $f'(x_0) = 0$

Beweis: x_0 lokales Minimum: $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f(x) - f(x_0) \geq 0$ für $x \in D_f$, $|x - x_0| < r$

Auf $(x_0, x_0 + r)$ gilt $x - x_0 > 0$, also $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

$f(x) - f(x_0) \geq 0$ gilt für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$
(r klein genug)

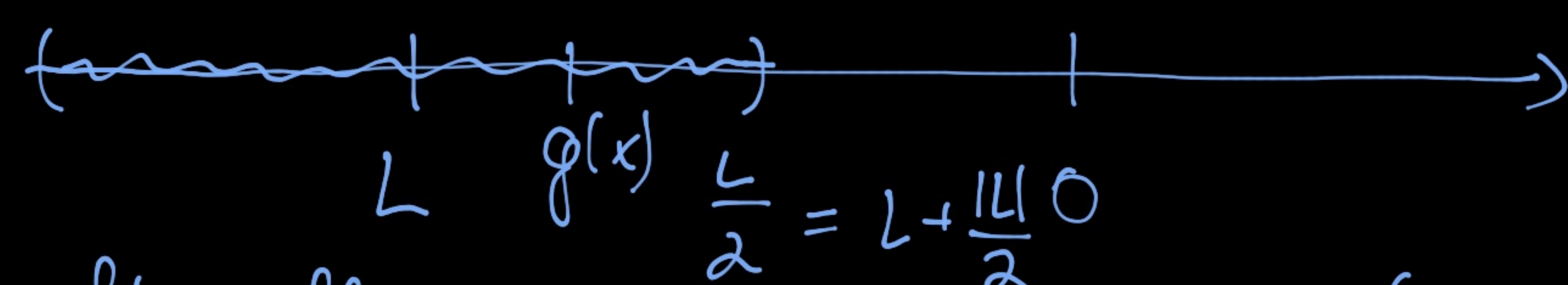
$x - x_0 > 0$ gilt für alle $x \in (x_0, x_0 + r)$

Also: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + r)$

Folgt: $\lim\limits_{x \to x_0} \underbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = f'(x_0) \geq 0$

Denn: $g(x) \geq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + r)$

Wäre $L = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) < 0$, so wähle zu $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2} > 0$ ein
passendes $\delta > 0$



so dass

$|g(x) - L| < \varepsilon = \dfrac{|L|}{2}$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subseteq (x_0, x_0 + r)$

Für $x = x_0 + \dfrac{\delta}{2}$ gilt $|g(x) - L| < \dfrac{|L|}{2}$, also $g(x) < 0$ – das geht nicht. Folgt: $L \geq 0$.

Gezeigt: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

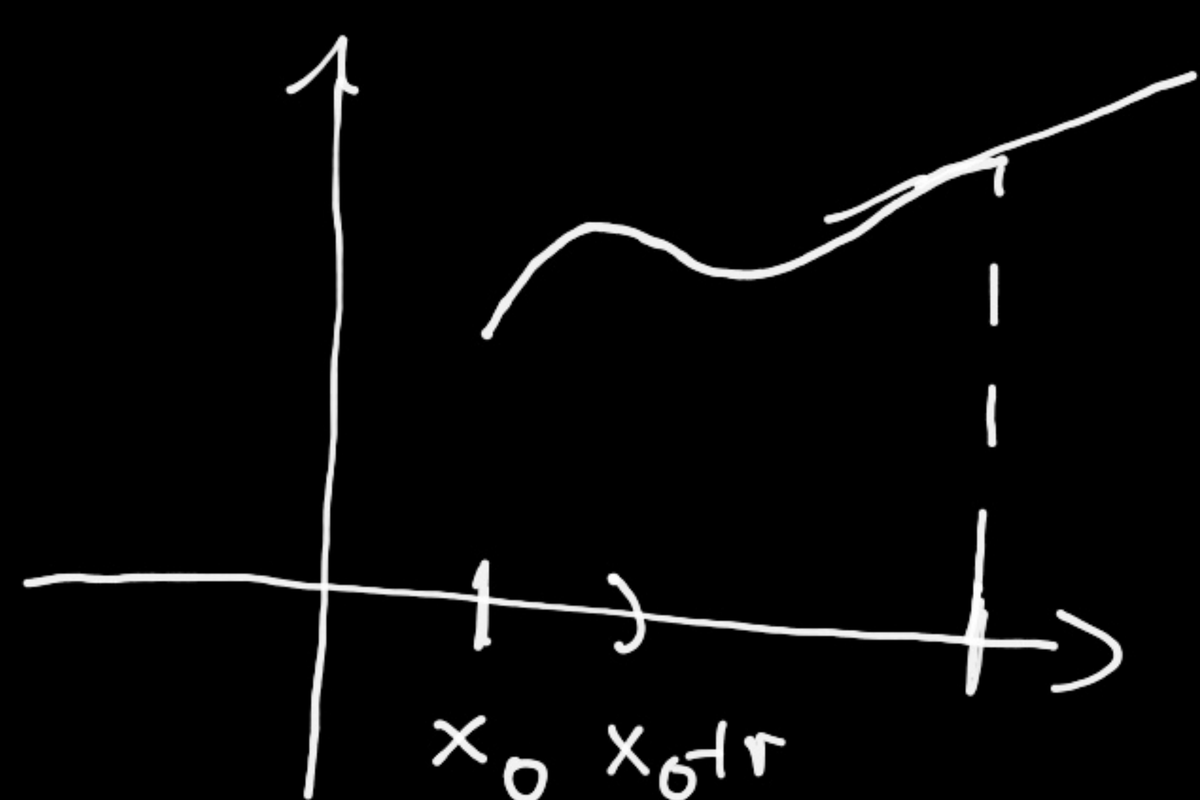
Analog mit Betrachtung von $(x_0 - r, x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 .$$

Zusammen: $f'(x_0) \geq 0$ <u>und</u> $f'(x_0) \leq 0$

Das zeigt $f'(x_0) = 0$. $\square$

<u>Notiz</u>



$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar

a lokales Min $\longrightarrow$ $f'(a) \geq 0$

a lokales Max. $\longrightarrow$ $f'(a) \leq 0$

b lokales Min $\longrightarrow$ $f'(b) \geq 0$

b lokales Max $\longrightarrow$ $f'(b) \geq 0$

2.17 Der Satz von Rolle

Vorgelegt ist eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

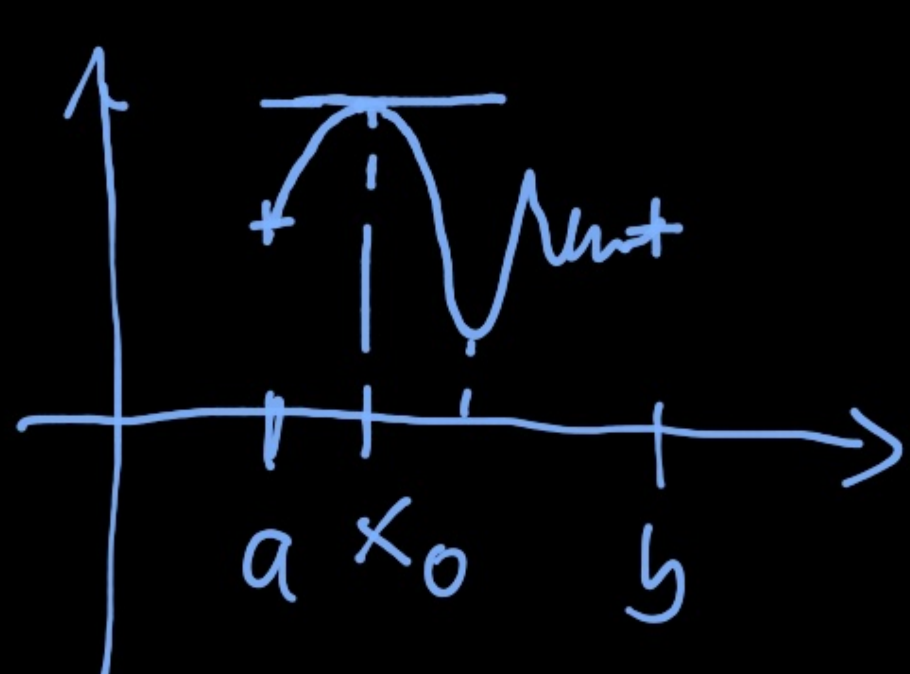
Definitionsbereich ist abgeschlossenes Intervall

Voraussetzungen an f:

- f ist stetig auf $[a, b]$
- f ist differenzierbar auf (a, b)
- $f(a) = f(b)$

Dann gibt es eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweisidee: Min/Max: Es gibt $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ mit $f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$ für alle x.



Falls $x_{min} \in (a, b)$, so folgt $f'(x_{min}) = 0$ nach 2.16

Falls $x_{max} \in (a, b)$, —"— $f'(x_{max}) = 0$ —"—

$x_{min}, x_{max} \in \{a, b\}$: Dann $f(x_{min}) = f(x_{max}) = f(a) = f(b)$

Also ist f konstant, d.h. $f'(x) = 0$ für alle x

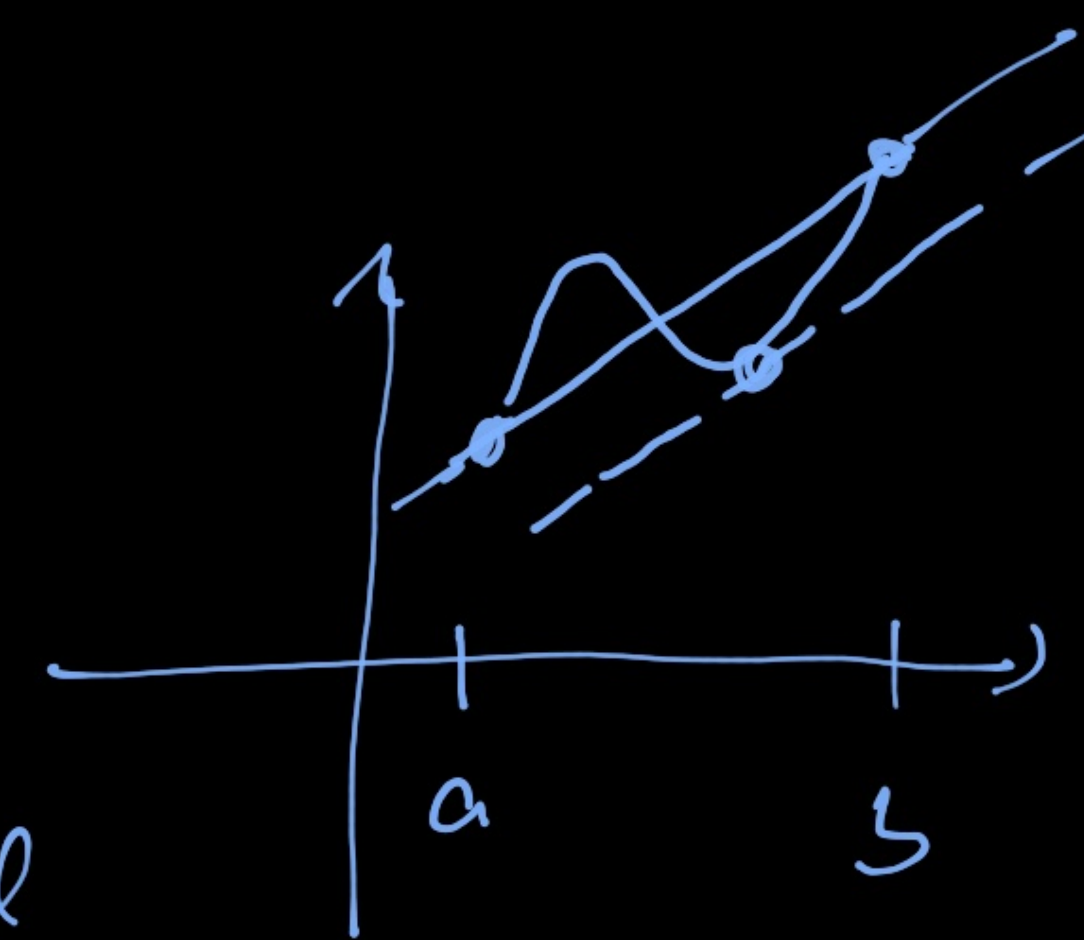
Nehme $x_0 = \frac{a+b}{2}$; $f'(x_0) = 0$.

2.18 MWS-D – der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Vorgelegt ist eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Voraussetzungen
- f ist auf $[a,b]$ stetig
- f ist auf (a,b) differenzierbar

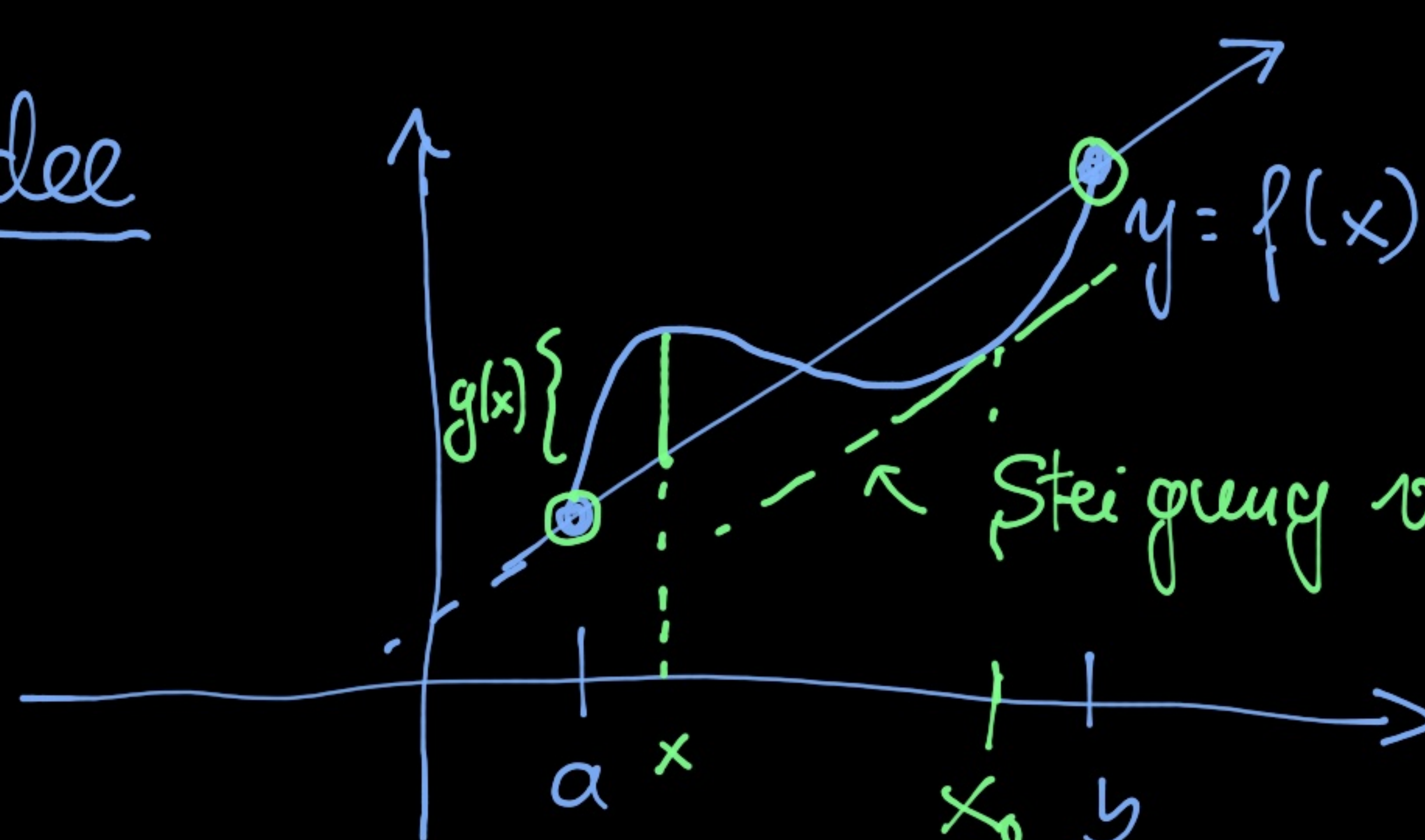
Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit



$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Tangente in x_0 und Sekante sind parallel

Beweisidee



Steigung von $g = 0$

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a)\right]$$

stetig auf $[a,b]$, diff'bar auf (a,b). $g(a) = 0 = g(b)$.

Rolle: $g'(x_0) = 0$ für passendes x_0

$$\Leftrightarrow f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\blacksquare$

2.19 Satz (Anwendung des MWS-D)

Vorgelegt ist ein Intervall I und eine differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) f ist genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$.

(b)(i) f ist genau dann monoton wachsen, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

(ii) f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

(c) (i) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.

(ii) Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton fallend.

⚠ $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend,

aber: $f'(0) = 0$ (also nur $f'(x) \geq 0$ erfüllt)

Anwendung: $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ differenzierbar auf $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \sin' x - \cos' x \, \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x > 0$$

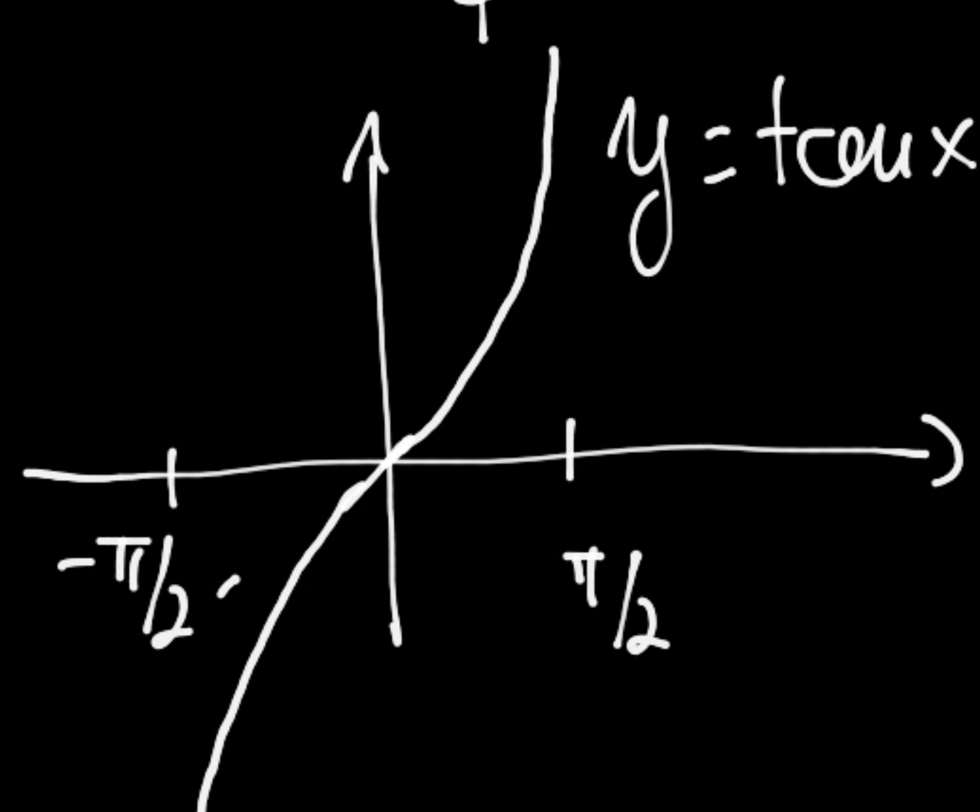
Folglich: $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend

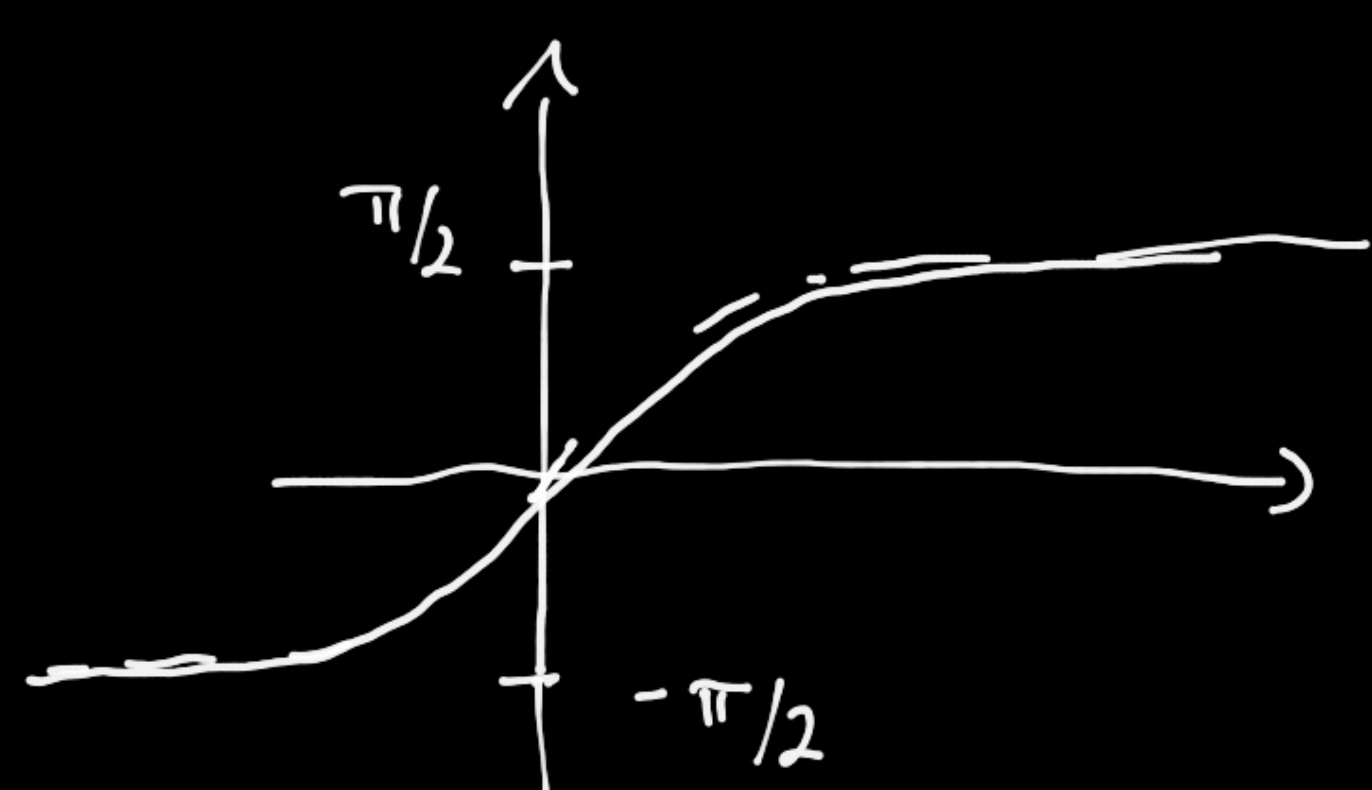
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ (x < \pi/2)}} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty \; ; \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$$

ZWS: $\{ f(x) \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \}$ ist ein Intervall, nämlich $\mathbb{R}$

f ist umkehrbar mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$





Beweisskizze von (2.19):

(a) Ist f konstant, so gilt $f'(x) = 0$ f. alle x.

Gelte $f'(x) = 0$ für alle x.

Sind $a, b \in I$, $a < b$, so gibt es nach dem MWS-D ein $x_0 \in (a,b) \subseteq I$ mit $0 \underset{\text{Vor.}}{=} f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, also $f(a) = f(b)$.

(b) f monoton wachsend bedeutet: alle Sekantensteigungen sind ≥ 0, also auch alle Tangentensteigungen $f'(x) \geq 0$

Umgekehrt: $f'(x) \geq 0$ gilt für alle x

Sind $a, b \in I$, $a < b$, so gibt es $x_0 \in (a,b) \subseteq I$ mit $0 \leq f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{\underbrace{b - a}_{> 0}}$. Folgt: $f(a) \leq f(b)$

(c) Genauso wie 2. Teil von (b): $f'(x) > 0$ f alle x

… $0 < f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Folgt $f(a) < f(b)$

Hausaufgabe 06 A:

Vorgelegt ist ein Intervall I sowie eine auf I differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Ist f monoton fallend, so gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

(b) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton fallend.

(c) Ist $I = [a, b]$ und gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf I streng monoton fallend.

2.20 Erkennen von lokalen Extrema

Situation: $\quad a < x_0 < b$

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$

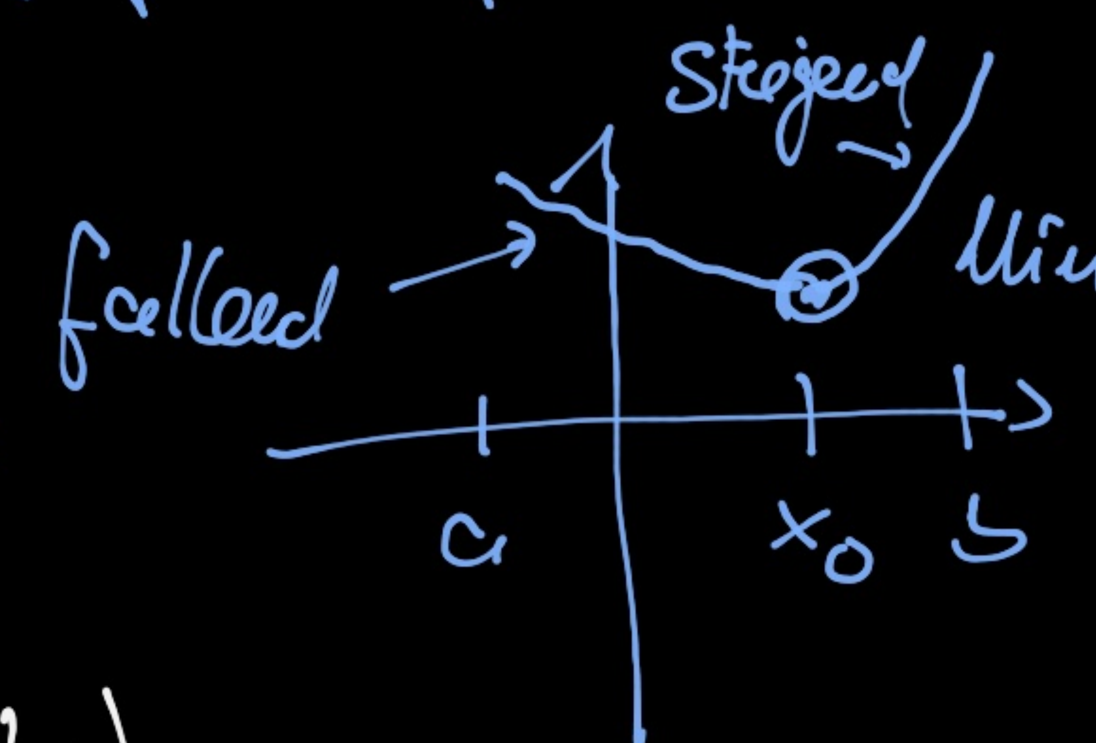
d.h. x_0 ist ein Kandidat für ein lokales Extremum.

(a) Gilt $f'(x) \geq 0$ für $x \in (a, x_0]$
und $f'(x) \leq 0$ für $x \in [x_0, b)$,
so ist $f(x_0)$ der größte Wert
von f auf dem Intervall (a,b)

f mon. wachsend auf $(a, x_0]$,
also $f(x) \leq f(x_0)$ für
$a < x \leq x_0$

$f(x) \leq f(x_0)$ für $x_0 \leq x < b$

(b) Gilt $f'(x) \leq 0$ für $x \in (a, x_0]$
und $f'(x) \geq 0$ für $x \in [x_0, b)$,
so ist $f(x_0)$ der kleinste Wert von f auf (a,b)



Anwenden:

Suche lokale Extrema der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$.

Kandidat $x_0 \in D_f$ mit $f'(x_0) = 0$ schon gefunden.

(x_0 mit $f'(x_0) = 0$: kritischer Punkt von f)

Sprechweise: f' hat in $x = x_0$ einen Nulldurchgang von $+$ nach $-$, falls es ein $r > 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D_f$
- $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0 - r; x_0)$
- $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0, x_0 - r)$

Dann ist x_0 ein lokales Maximum.

Analog: Besitzt f' in x_0 einen Nulldurchgang von $-$ nach $+$, so ist x_0 ein lokales Minimum.

Beispiel: Gesucht sind die lokalen Extrema von

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-3}$$

Def.bereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Ableitung: $$f'(x) = \frac{(x-3)\cdot(2x+1) - (x^2+x+1)}{(x-3)^2}$$ Quotientenregel

$$= \frac{2x^2-6x+x-3-x^2-x-1}{(x-3)^2}$$

nicht ausmultiplizieren

$$= \frac{x^2-6x-4}{(x-3)^2}$$

Nullstellen: $x^2-6x-4 = 0$ für $x = 3 \pm \sqrt{13}$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\substack{>0 \\ (x \neq 3)}} \underbrace{\left(x-(3-\sqrt{13})\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x<3-\sqrt{13} \\ >0 \text{ für } x>3-\sqrt{13}}} \cdot \underbrace{\left(x-(3+\sqrt{13})\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x<3+\sqrt{13} \\ >0 \text{ für } x>3+\sqrt{13}}}$$

Beispiel: Gesucht sind die lokalen Extrema von

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-3}$$

Nullstellen von f': $x = 3 \pm \sqrt{13}$

trägt zum Vorzeichen von f' nichts bei

Ableitung:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\substack{>0 \\ (x \neq 3)}} \underbrace{\left(x-\left(3-\sqrt{13}\right)\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x<3-\sqrt{13} \\ >0 \text{ für } x>3-\sqrt{13}}} \cdot \underbrace{\left(x-\left(3+\sqrt{13}\right)\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x<3+\sqrt{13} \\ >0 \text{ für } x>3+\sqrt{13}}}$$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{13}$		3		$3+\sqrt{13}$		∞
$f'(x)$		$+$	$\uparrow$	$-$		$-$	$\uparrow$	$+$	

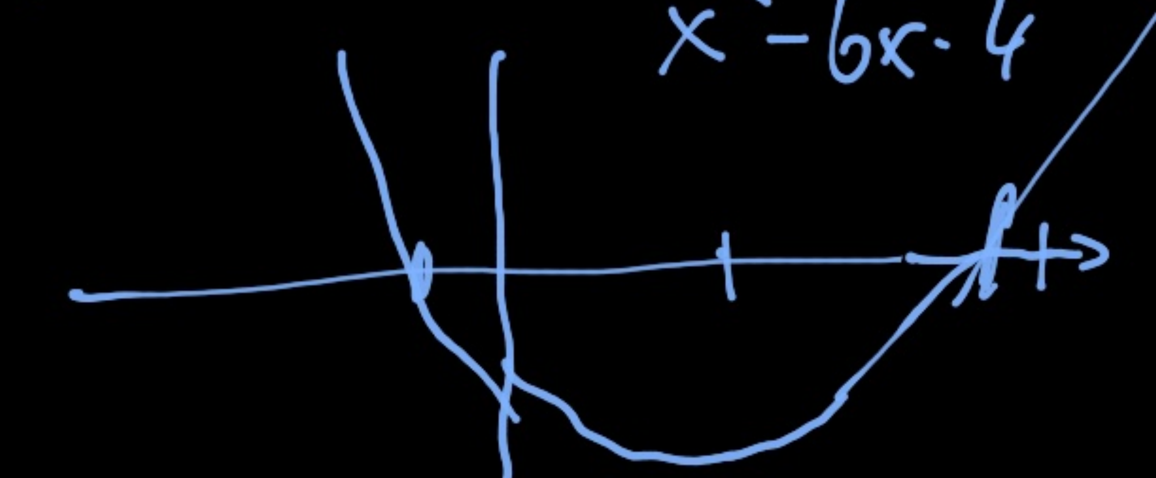
Nulldurchgang $+ \to -$: lokales Maximum

Nulldurchgang $- \to +$: lokales Minimum

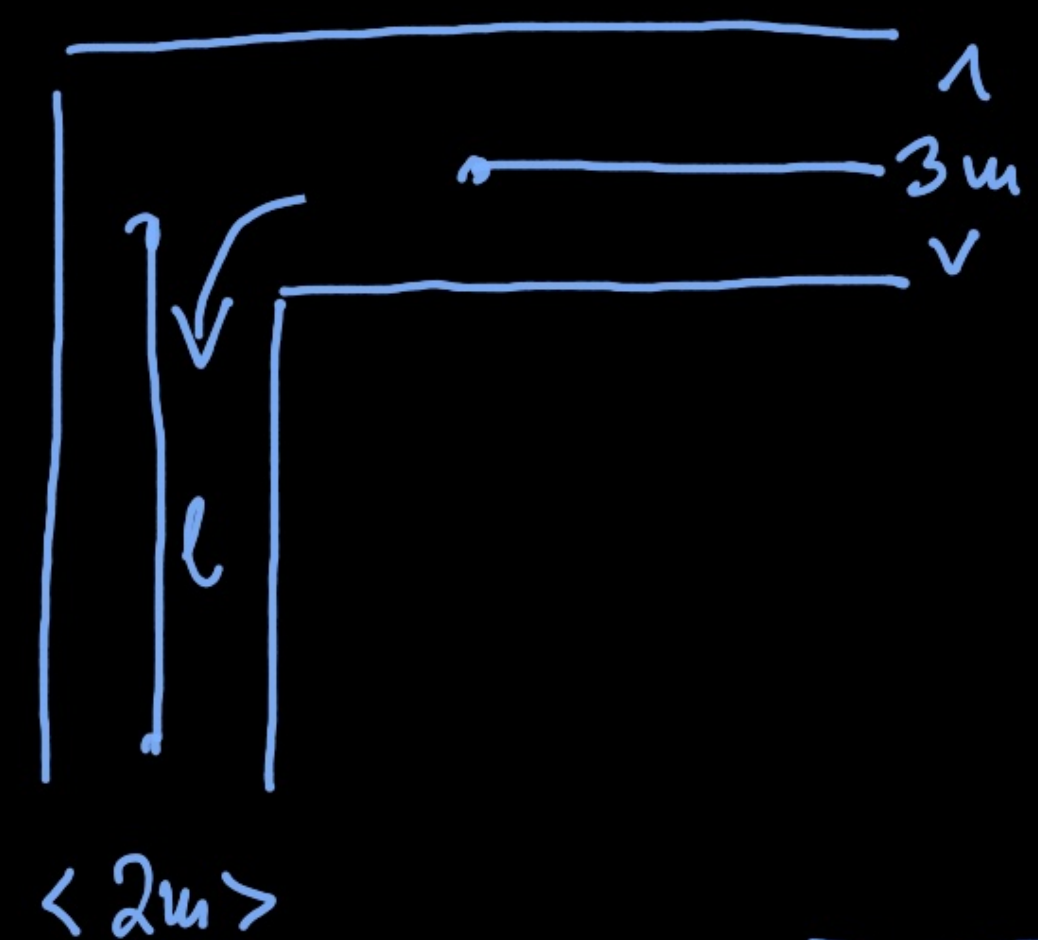
$$f'(x) = \frac{x^2-6x-4}{(x-3)^2}$$

x^2-6x-4 nach oben geöffnete Parabel

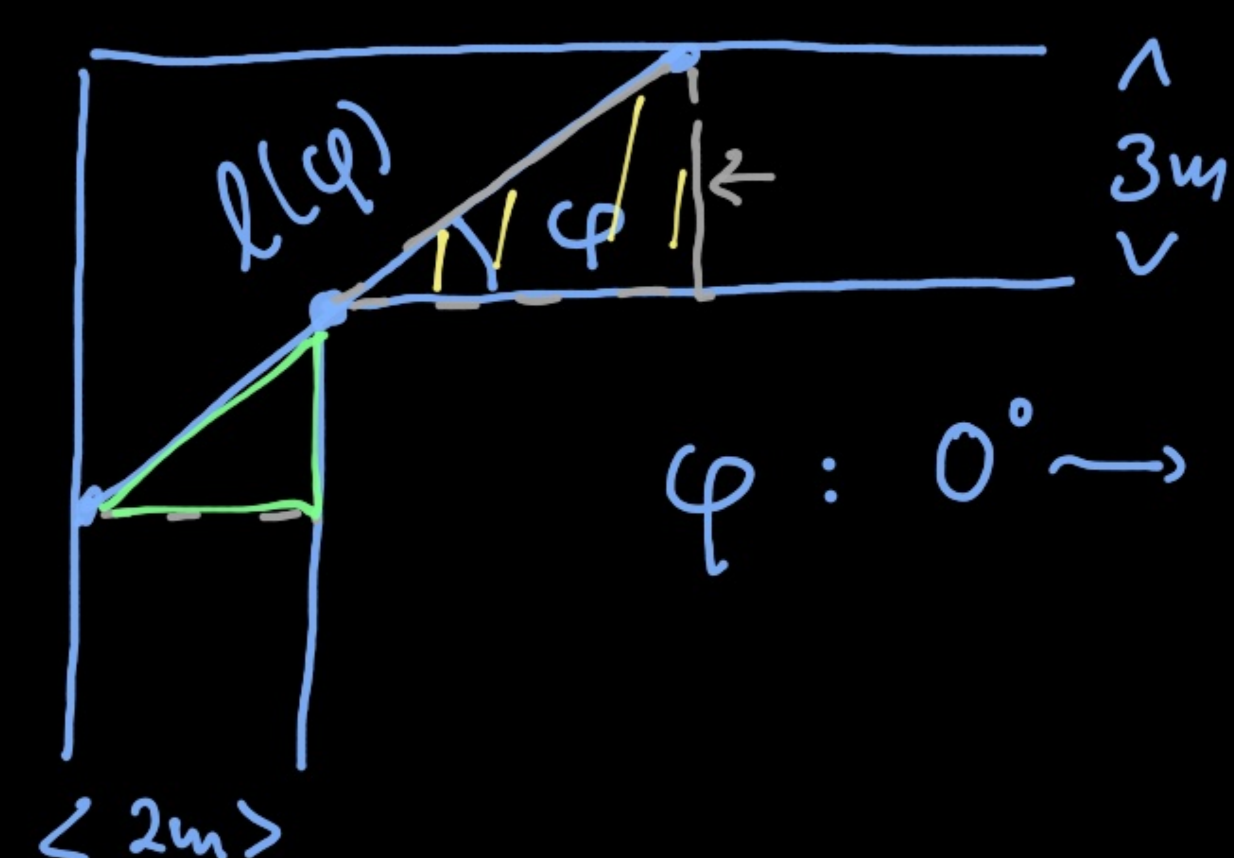
x^2-6x-4



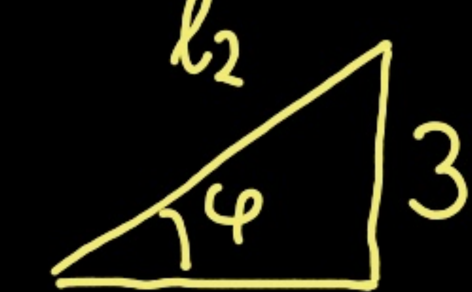
Aufgabe



Möchte eine lange Eisenstange über den Flur transportieren (2D ; 3D wird's schlimmer)
Wie lang kann die Stange sein?

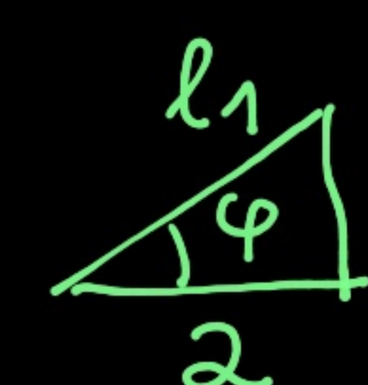


$\varphi : 0^\circ \longrightarrow 90^\circ$



$$\frac{3}{l_2} = \sin\varphi$$

also $$l_2 = \frac{3}{\sin\varphi}$$



$$\frac{2}{l_1} = \cos\varphi$$

bzw. $$l_1 = \frac{2}{\cos\varphi}$$

Insgesamt: $$l(\varphi) = \frac{2}{\cos\varphi} + \frac{3}{\sin\varphi}$$

Gesucht: Minimale $l(\varphi)$ für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (Bogenmaß!)

Gesucht: Kleinster Funktionswert von

$$\ell(\varphi) = \frac{2}{\cos\varphi} + \frac{3}{\sin\varphi} \quad \text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\ell'(\varphi) = \frac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{3\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \overset{!}{=} 0 \qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

falls $2\sin^3\varphi = 3\cos^3\varphi$

bzw. $\dfrac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi} = \dfrac{3}{2}$ bzw. $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt[3]{3/2}$

bzw. $\varphi = \varphi_0 = \arctan\sqrt[3]{3/2}$ einziger kritischer Punkt

Also $\underline{\text{ist}}$ φ_0 das globale Minimum von $\ell(\varphi)$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$,

d.h. $\ell = \ell(\varphi_0) = \underbrace{\dfrac{2}{\cos\sqrt[3]{3/2}} + \dfrac{3}{\sin\sqrt[3]{3/2}}}_{\longrightarrow \text{ Taschenrechner}}$ längste Stange, die man transportieren.

Hausaufgabe 06 B:

Gesucht sind die lokalen und globalen Extrema von

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}; \quad -1 \leq x \leq 1$$

(a) Wieso besitzt f globale Extrema?

(b) Warum ist 0 der kleinste Funktionswert? Wo wird er angenommen?

(c) Wieso besitzt die Funktion $g: (0,\infty) \to (0,\infty)$, $g(x) = x^2$ eine Umkehrfunktion? Wenn diese w lautet ($w(x) = \sqrt{x}$), wie lautet dann die Ableitung $w'(x)$?

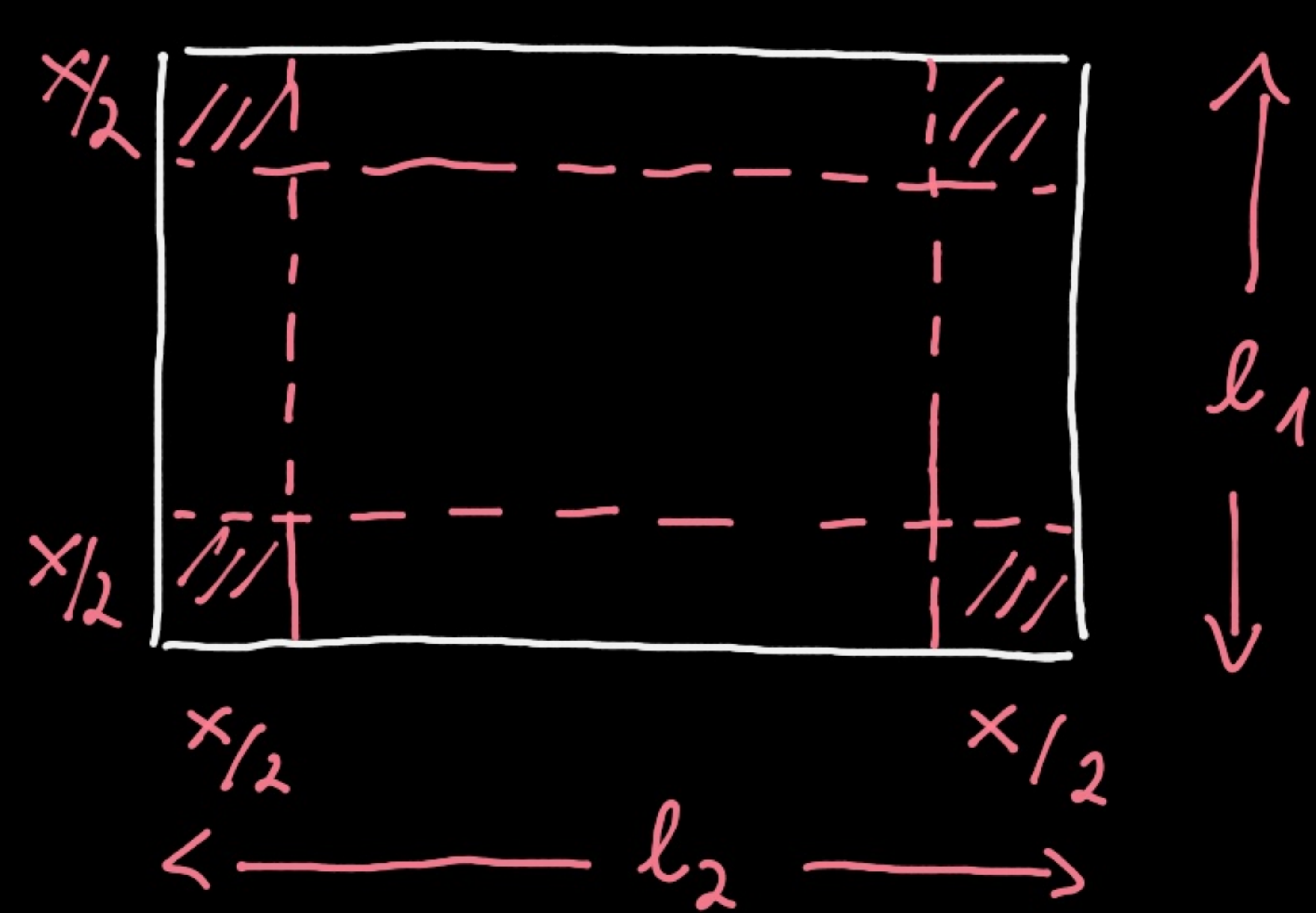
(d) Berechne $f'(x)$ und finde die kritischen Punkte von f.

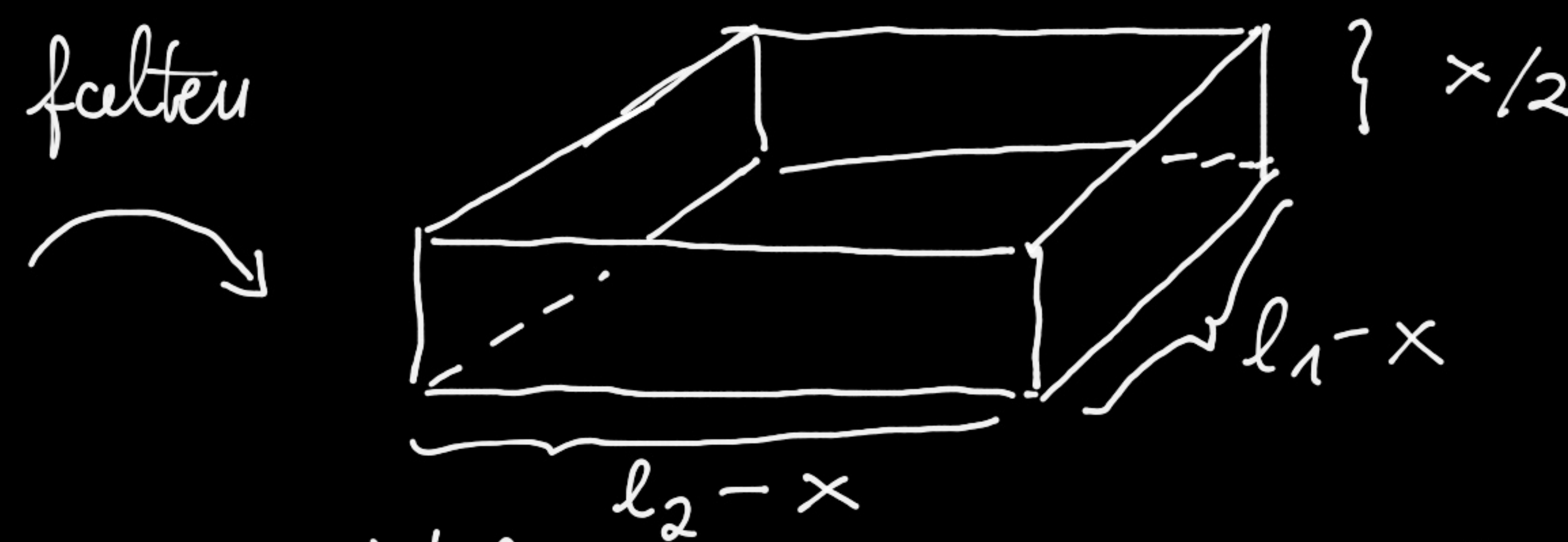
(e) Welche lokalen Maxima / Minima besitzt f?

(f) Bestimme den größten Funktionswert $f(x)$.

Übungen:

1





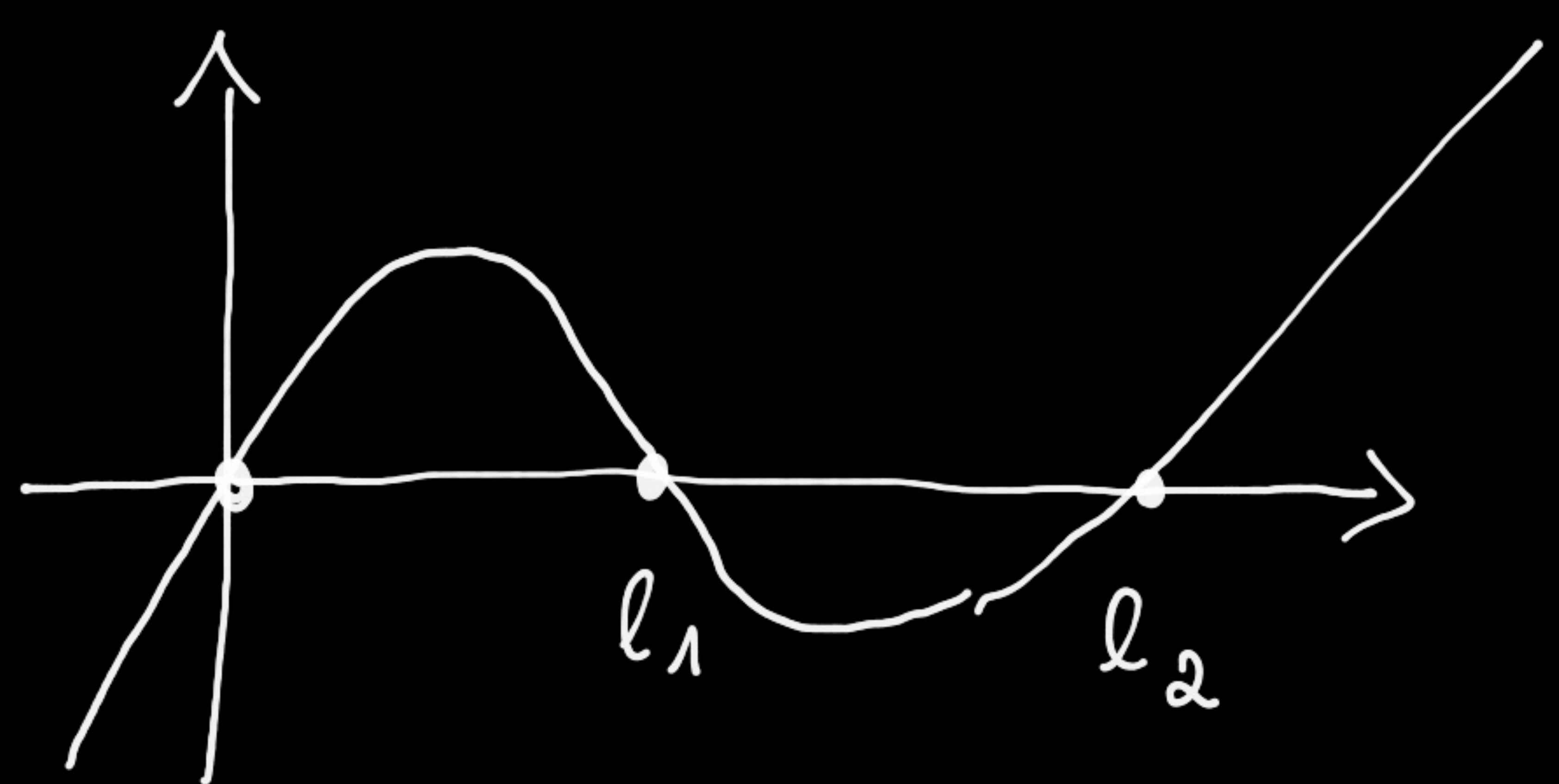
Volumen soll maximal sein.
Welches x soll man nehmen?

l_1, l_2 vorgegeben

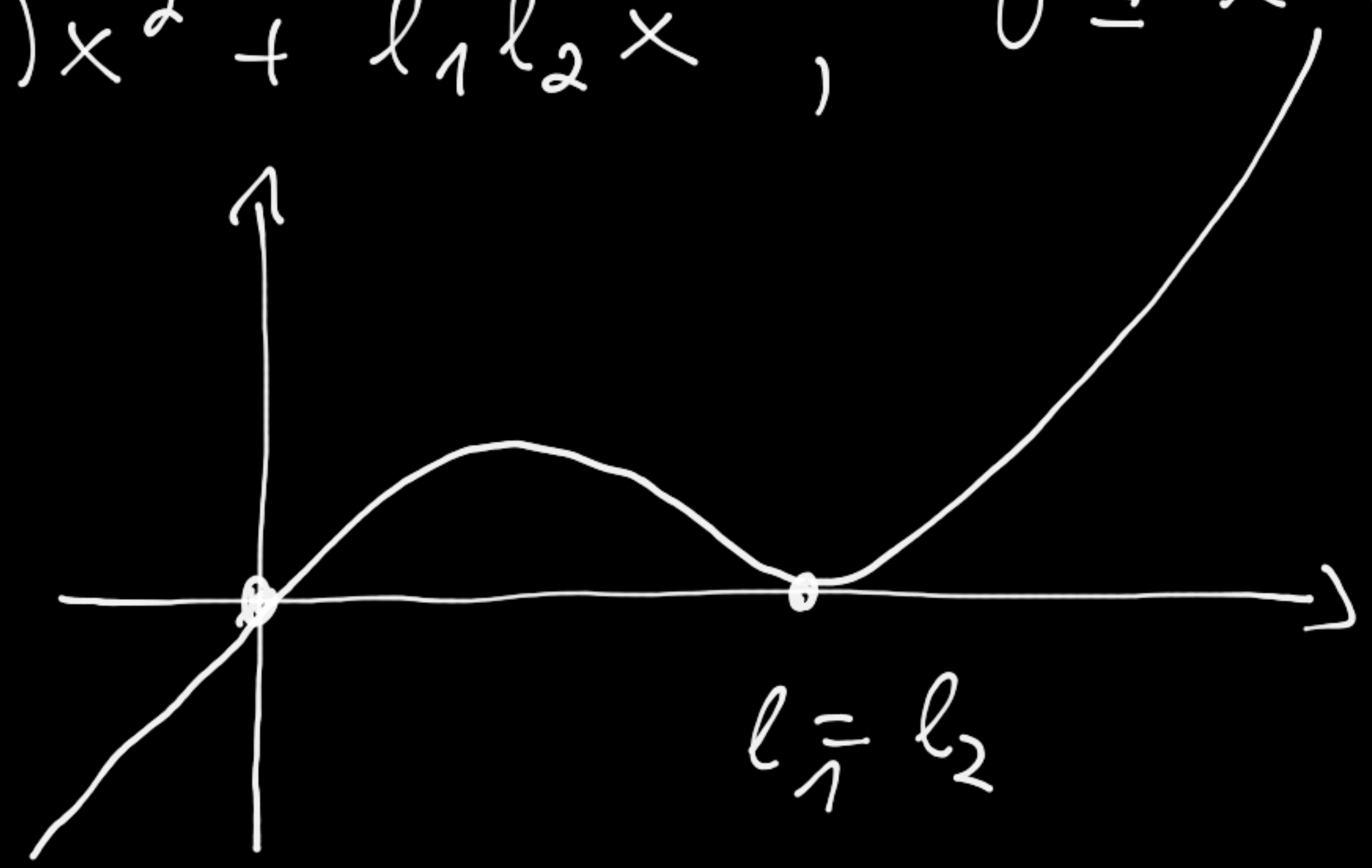
$l_1 \leq l_2$

$$f(x) = 2 \cdot \mathrm{Vol} = 2(l_1 - x)\cdot(l_2 - x)\,\frac{x}{2} = (l_1 - x)\cdot(l_2 - x)\cdot x$$

$$= x^3 - (l_1 + l_2)x^2 + l_1 l_2 x\,, \quad 0 \leq x \leq l_2$$



oder $l_1 = l_2$

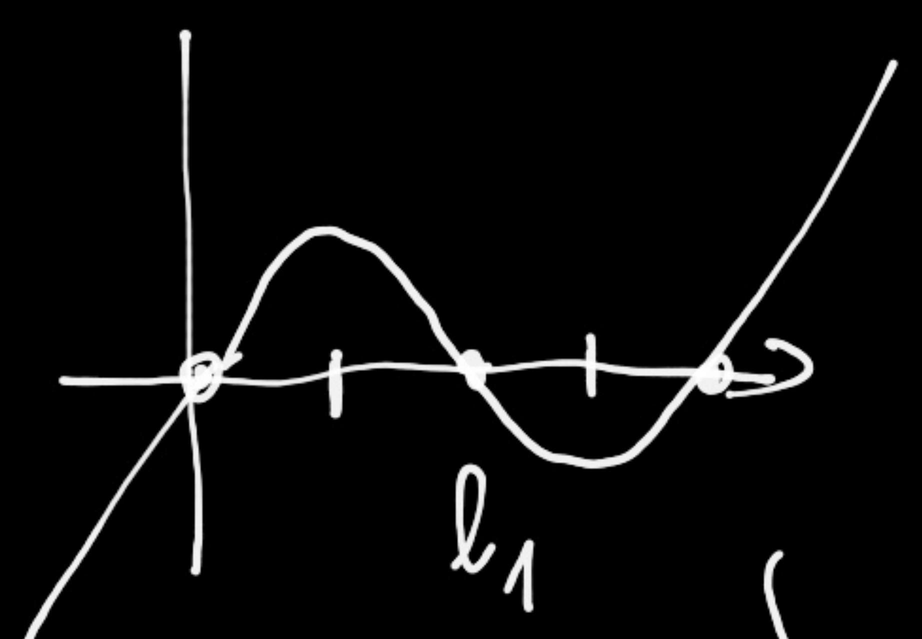


$$f(x) = (x-l_1)\cdot(x-l_2)\cdot x$$
$$= x^3 - (l_1+l_2)\cdot x^2 + l_1 l_2 x\,, \qquad 0 \le x \le l_1 \le l_2$$

Gesucht ist das Maximum:

$$f'(x) = 3x^2 - 2(l_1+l_2)x + l_1 l_2 = 0 \qquad \Big|\,:3$$
$$x^2 - \frac{2}{3}(l_1+l_2)\cdot x + \frac{1}{3}\cdot l_1 l_2 = 0$$

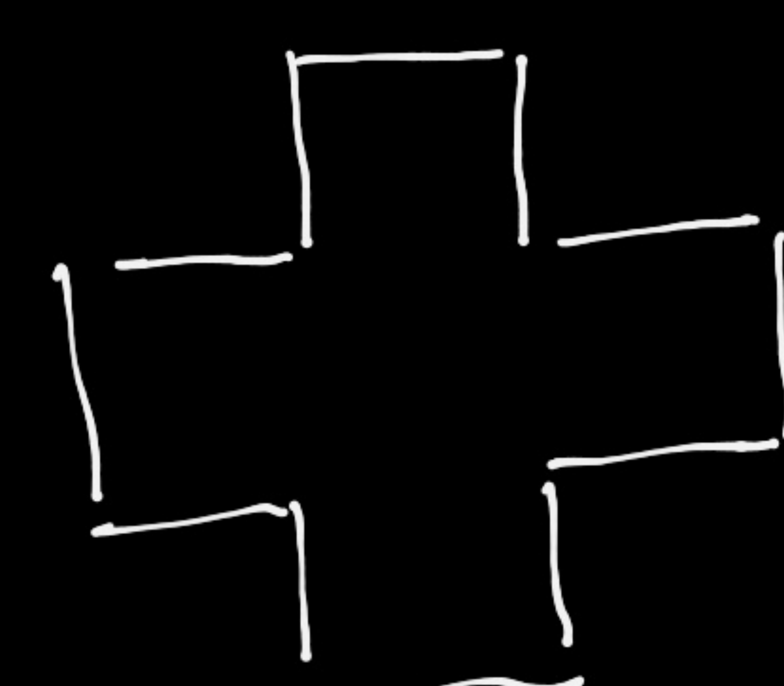
$$x = \frac{1}{3}(l_1+l_2) \pm \sqrt{\frac{1}{9}(l_1+l_2)^2 - \frac{3}{9}\cdot l_1 l_2}$$
$$= \frac{1}{3}(l_1+l_2) \pm \frac{1}{3}\sqrt{(l_1+l_2)^2 - 3\,l_1 l_2}$$



$$\longrightarrow \quad x = \frac{1}{3}(l_1+l_2) - \frac{1}{3}\sqrt{(l_1+l_2)^2 - 3 l_1 l_2}$$

Spezialfall $l_1 = l_2 = l \;\leadsto\; x = \frac{1}{3}\, l$

Volumen $\dfrac{l^3}{54}$ ist maximal



$\leadsto$  Würfel

§2 / S.72

② 

Volumen soll 330 ml = 330 cm³ sein.
Bestimme r, h so, dass die Oberfläche des Zylinders minimal ist.

Volumen : $\pi r^2 h = 330\,\text{cm}^3 = V$ $\quad$ (r, h in cm)

Oberfläche : $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \overset{!}{=}$ minimal

$V = \pi r^2 h \rightsquigarrow \pi r h = V/r$ und $h = V/(\pi r^2)$

$A = A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \longrightarrow$ min! $\quad$ $A(r) \longrightarrow \infty$ für $r \to \infty$ und $r \to 0+$

$0 = A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$ bzw. $r^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{V}{2\pi}$

Also : $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ einzige Chance für Minimum

ALSO IST ES DAS MINIMUM !

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3 \cdot \left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2 \cdot r$$

Für $V = 330\,ml$ ergibt sich

$$2r = h \approx 7{,}5\,cm$$

Tatsächlich: $2r = 6{,}61\,cm$, $h = 11{,}5\,cm$

$$\text{"Volumen"} = \frac{1}{4}\pi \cdot 6{,}61^2 \cdot 11{,}5 \approx 395\,ml$$

Europaletten: $120\,cm \times 80\,cm$

Tray: 6×4 Dosen
Lage: 3×3 Trays
passt mit $2r = 6{,}61\,cm$ genau

Palette: 11 Lagen

Gewicht 891 kg

40-Tonner: 25 t Zuladung, $p \leq 34$ Europaletten

p Paletten je a Lagen; Gewicht eine Lage: 81 kg

$p \cdot a \cdot 81\,kg \leq 25\,000$ und $a \cdot 81\,kg \leq 1000\,kg$

$\leadsto$ $p \cdot a \leq 308{,}\dots$, $a \leq 12{,}\dots$; $308 = 4 \cdot 7 \cdot 11$

$a = 11$, $p = 4 \cdot 7 = 28$ $\leadsto$ passt alles

③ Sinus und Kosinus

$(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = \sin$

$((\sin x)')' = (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

Umgestellt: $(\sin x)'' + \sin x = 0$

Analog $(\cos x)'' + \cos x = 0$

Also: $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ lösen

$$f''(x) + f(x) = 0$$ "Schwingungs-Differentialgleichung"

$$f(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } f = \sin \\ 1 & \text{für } f = \cos \end{cases}$$

$$f'(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } f = \sin \\ 0 & \text{für } f = \cos \end{cases}$$

Satz Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren 2. Ableitung $f'' = (f')'$ existiert, und gilt $f''(x) + f(x) = 0$ für alle x, so gilt

$$f(x) = f(0) \cdot \cos x + f'(0) \cdot \sin x$$

für alle x.

Also: $f(x) = s \cdot \cos x + v \cdot \sin x$ ist die einzige Lösung von $\boxed{f''(x) + f(x) = 0}$ (*) mit $f(0) = s$, $f'(0) = v$.

Beweis:

$$g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$$

$$g'(x) = 2 f(x) f'(x) + 2 f'(x) f''(x) = 2 f'(x) \cdot [f(x) + f''(x)] = 0$$

da f die Gleichung * erfüllt

$g'(x) = 0$ für alle x, $\mathbb{R}$ ist ein Intervall

Folglich ist $g(x)$ konstant.

$$h(x) = f(x) - f(0)\cdot\cos x - f'(0)\cdot\sin x$$
$$h(0) = f(0) - f(0) = 0$$
$$h'(x) = f'(x) + f(0)\cdot\sin x - f'(0)\cdot\cos x$$
$$h'(0) = 0$$
$$h''(x) = f''(x) + f(0)\cdot\cos x + f'(0)\cdot\sin x$$
$$= -[f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\cdot\sin x] = -h(x)$$

Also: h löst (*)

Folgt: $0 = \left[(h(x))^2 + (h'(x))^2\right]'$

bzw. $(h(x))^2 + (h'(x))^2$ ist konstant

d.h. $(h(x))^2 + (h'(x))^2 = (h(0))^2 + (h'(0))^2 = 0$

für alle x

Folgt $0 = h(x) = f(x) - f(0)\cdot\cos x - f'(0)\cdot\sin x$

für alle x

Umstellen $f(x) = f(0)\cos x + f'(0)\sin x$ ∎

4 Die Additionstheoreme

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y \end{aligned}}$$

Betrachte $f(x) = \cos(x+y)$ (y konstant)

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} -\sin(x+y) \cdot \underbrace{(x+y)'}_{=1}$$

$$f''(x) = -\cos(x+y) = -f(x)$$

Folgt: $f(x) = \cos(x+y)$ erfüllt ⊛

Demnach $f(x) = f(0) \cdot \cos x + f'(0) \cdot \sin x$

$$= \cos y \cdot \cos x - \sin y \cdot \sin x$$

(2. Gleichung geht ähnlich ...)

(5) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 + (\tan x)^2 > 0$

Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
ist differenzierbar

$x = \tan(\arctan x)$ nach Kettenregel differenzieren:

$$1 = \tan'(\arctan x) \cdot (\arctan x)'$$
$$= (1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot (\arctan x)'$$
$$= (1 + x^2) \cdot (\arctan x)'$$

Folgt: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Differenziere mit der Kettenregel: $\left(\arctan \frac{1}{x}\right)'$

$$\left(\arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2+1} = -(\arctan x)'$$

Folgt: $\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)' = 0$ für $x \neq 0$

d.h. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = c_1$ für $x > 0$

$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = c_2$ für $x < 0$

$x = 1$: $c_1 = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = 2 \cdot \arctan 1$

$\arctan 1 = \,?$, $\tan(?) = 1$

$= \frac{\sin(?)}{\cos(?)} \rightsquigarrow \sin(?) = \cos(?)$

$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1 \rightsquigarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Folgt: $c_1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ für alle } x > 0}$

und analog: $\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \text{ für } x < 0}$

Wieso gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle x?

Wieso folgt hieraus:

Sind u, v Zahlen mit $u^2 + v^2 = 1$,
so gibt es ein x mit $u = \cos x$, $v = \sin x$?

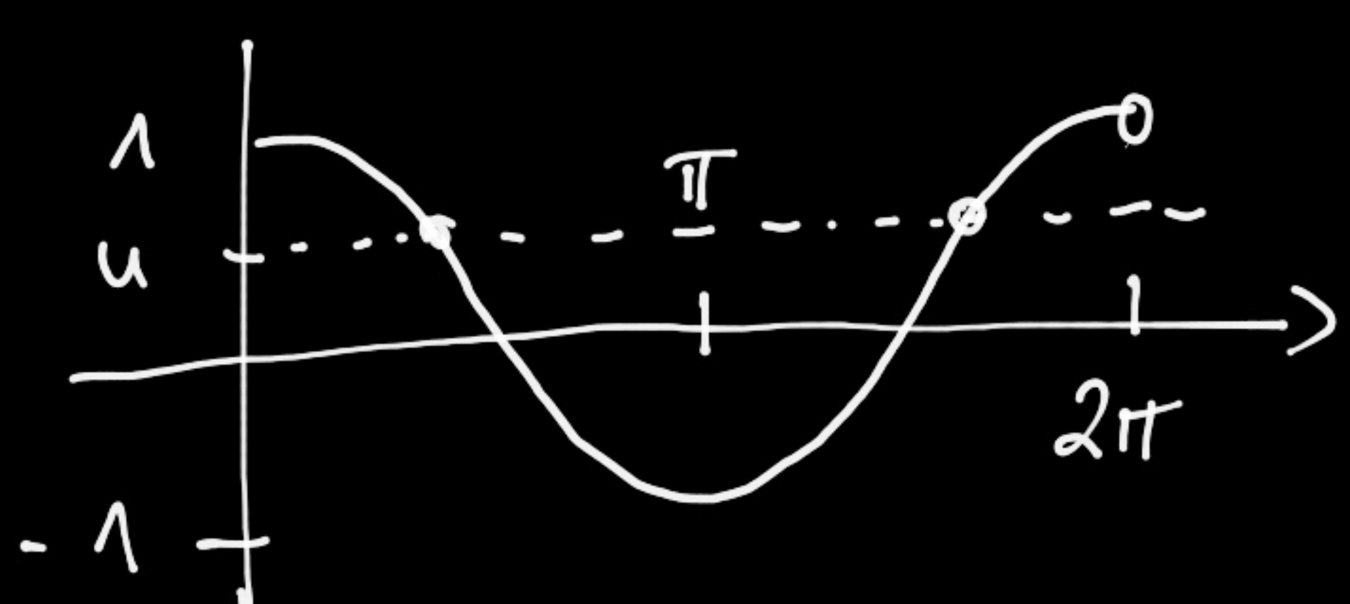
Lösung: $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$f'(x) = 2\cos x \sin x - 2\cos x \sin x = 0$

d.h. $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1$ f. alle x.

$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ für $0 \le x \le \pi$

$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$ für $\pi \le x \le 2\pi$



$u = \cos x = \cos(2\pi - x)$

$v = \pm\sqrt{1 - u^2} =$

"+": nimm x, "−": nimm $2\pi - x$

$u^2 + v^2 = 1$, speziell: $-1 \le u \le 1 \rightsquigarrow$ exist $\arccos u = x$

Hausaufgabe 06C:

(a) Zeige: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x) = f(x)$ für alle x, so gilt

$$f(x) = f(0) \cdot e^x \quad \text{für alle } x.$$

Anleitung: Differenziere die Funktion $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$

(b) Zeige: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

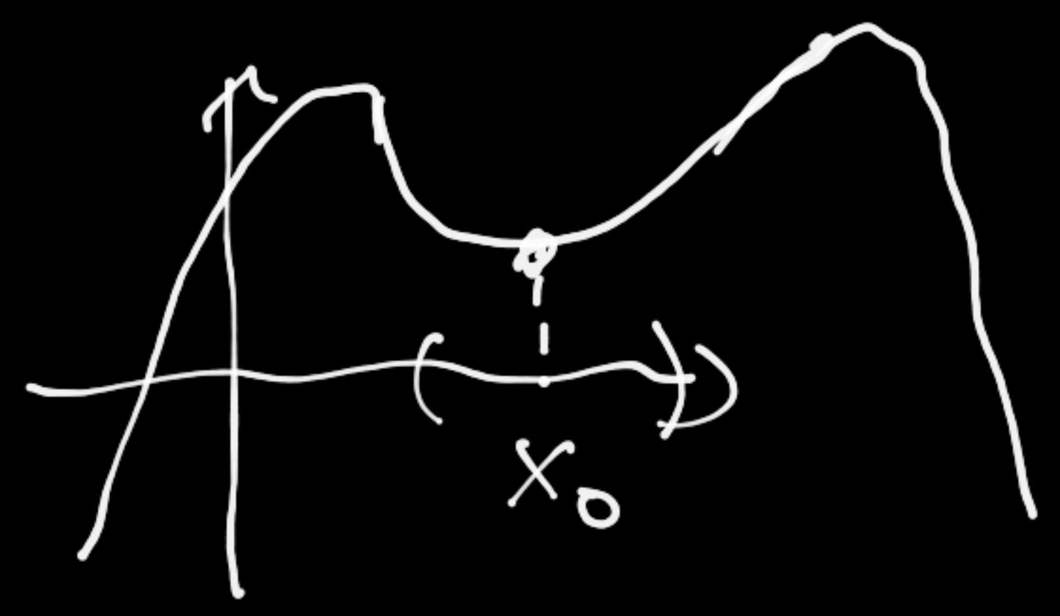
Wir wissen von e^x nur, dass $e^0 = 1$ und $(e^x)' = e^x$ ist.

2.21 Einige Sprachregelungen:

$f : D \to \mathbb{R}$ Funktion

(a) x_0 striktes lokales Minimum von f, falls:

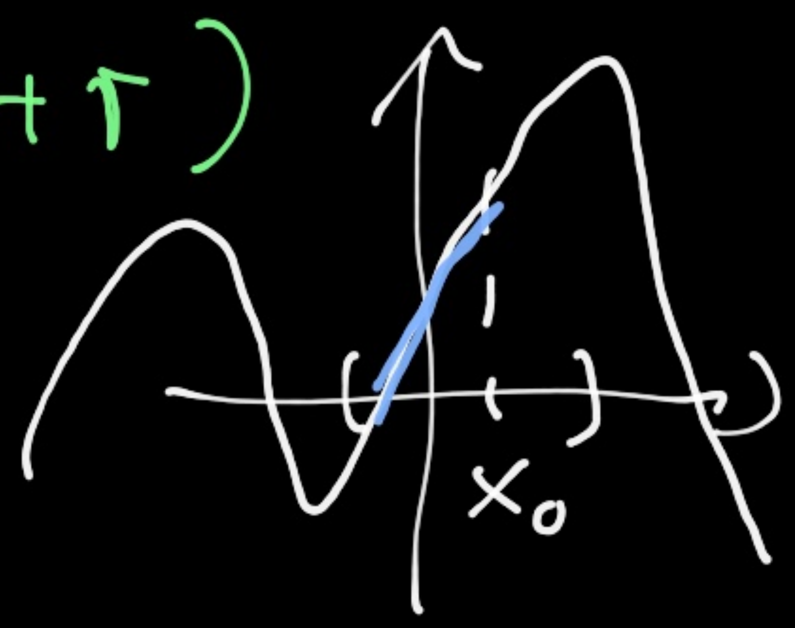
Es gibt $r > 0$ mit $f(x_0) < f(x)$ für alle $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$, $x \neq x_0$



Striktes lokales Maximum: genauso!

(b) f heißt in x_0 lokal streng monoton wachsend, falls:

Es gibt $r > 0$ für das f auf $D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ streng monoton wachsend ist.



In x_0 lokal streng monoton fallend: analog.

Übergeordnete Begriffe:

- striktes lokales Extremum (Max. oder Min.)
- lokal streng monoton (wachsend oder fallend)

2.22 Ein nützlicher Hilfssatz:

Vorgelegt ist ein offenes Intervall I sowie eine auf I differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, deren Ableitung in einem $x_0 \in I$ verschwindet ($f'(x_0) = 0$).

(1.) Gilt $f'(x_0 + h) \cdot h > 0$ für $0 < |h| < r$ (r passend), so ist x_0 ein striktes lokales Minimum von f.

Bem.: Die Voraussetzung ist erfüllt, falls

a) f' lokal streng monoton wachsend bei x_0

oder

b) $f''(x_0)$ existiert und $f''(x_0) > 0$

Denn: $f'(x_0+h) = \underbrace{f'(x_0)}_{=0} + \underbrace{\varphi(h)}_{>0} \cdot h$

(2.) Ist x_0 ein striktes lokales Minimum von f', so ist f lokal streng monoton wachsend.

(2.22: Beweis)

(1.) Gilt $f'(x_0+h)\cdot h > 0$ für $0<|h|<r$ (r passend), so ist x_0 ein striktes lokales Minimum von f.

Voraussetzung bedeutet: $f'(x_0+h) \begin{cases} <0 & \text{f. } h<0 \\ >0 & \text{f. } h>0 \end{cases}$

Also: f ist auf $[x_0-r, x_0]$ streng fallend, also $f(x) > f(x_0)$ für $x_0 - r < x < x_0$, analog: $f(x) > f(x_0)$ für $x_0 < x < x_0 + r$ ✓

(2.) Ist x_0 ein striktes lokales Minimum von f', so ist f lokal streng monoton wachsend.

Folgt: $f'(x_0+h) > f'(x_0) \underset{\text{Vor.}}{=} 0$ für $0<|h|<r$

Liefert: f ist streng wachsend auf $[x_0-h, x_0]$ und auf $[x_0, x_0+h)$ ✓

2.23 Höhere Ableitungen

Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ist f differenzierbar, so erhalte eine Funktion $f': D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ist f' ebenfalls differenzierbar, so erhalte weitere Funktion

$f'' := (f')' : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, die zweite Ableitung von f.

In diesem Fall nennt man f zweimal differenzierbar.

Und so weiter ...

Die n-te Ableitung schreibe $f^{(n)}: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, also

$$f^{(1)} = f'$$
$$f^{(2)} = f''$$
$$f^{(3)} = (f'')' = f'''$$
$$\vdots$$

falls es $f^{(n)}$ gibt, so heißt f n-mal differenzierbar.

2.24 Satz über das lokale Verhalten

Vorgelegt
- ein offenes Intervall I
- eine Stelle $x_0 \in I$
- eine $(n-1)$-mal diff'bare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$

Voraussetzungen:
- $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
- $f^{(n)}(x_0)$ existiert und ist von 0 verschieden

Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten

1.) n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$: x_0 ist striktes lokales Min.

2.) n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$: x_0 ist striktes lokales Max.

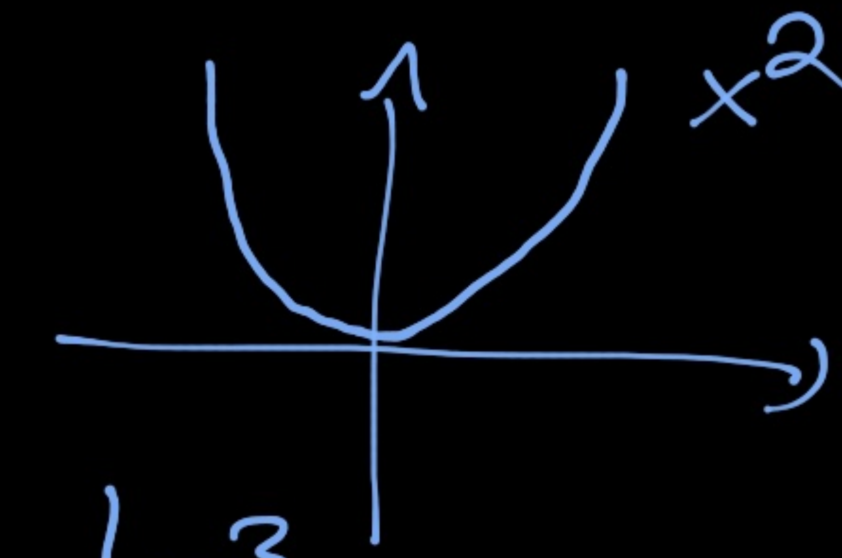
3.) n ungerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$: f lokal streng wachsend bei x_0.

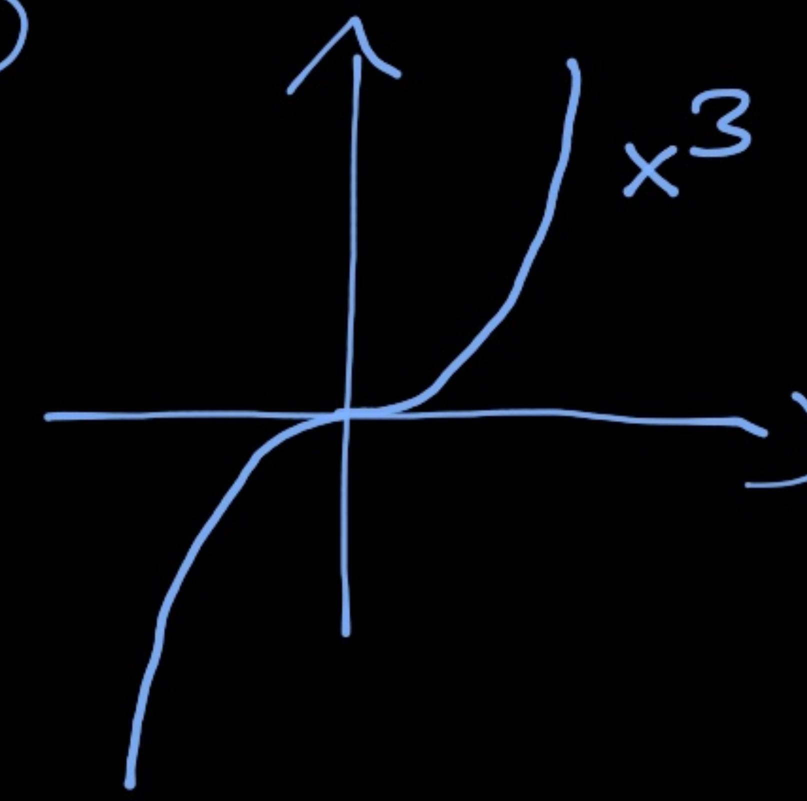
4.) n ungerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$: f lokal streng fallend bei x_0.

Merkhilfe: $f(x) = x^n$, $x_0 = 0$

$f(x) = x^2$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 > 0$

$f(x) = x^3$, $f'(0) = 0 = f''(0)$, $f'''(0) = 6 > 0$





⚠ Der Satz hilft nicht, wenn:

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0)$ gibt es nicht
- $f^{(n)}(x_0) = 0$ für alle x

(Beispiele nachholen)

§2 | S. 88

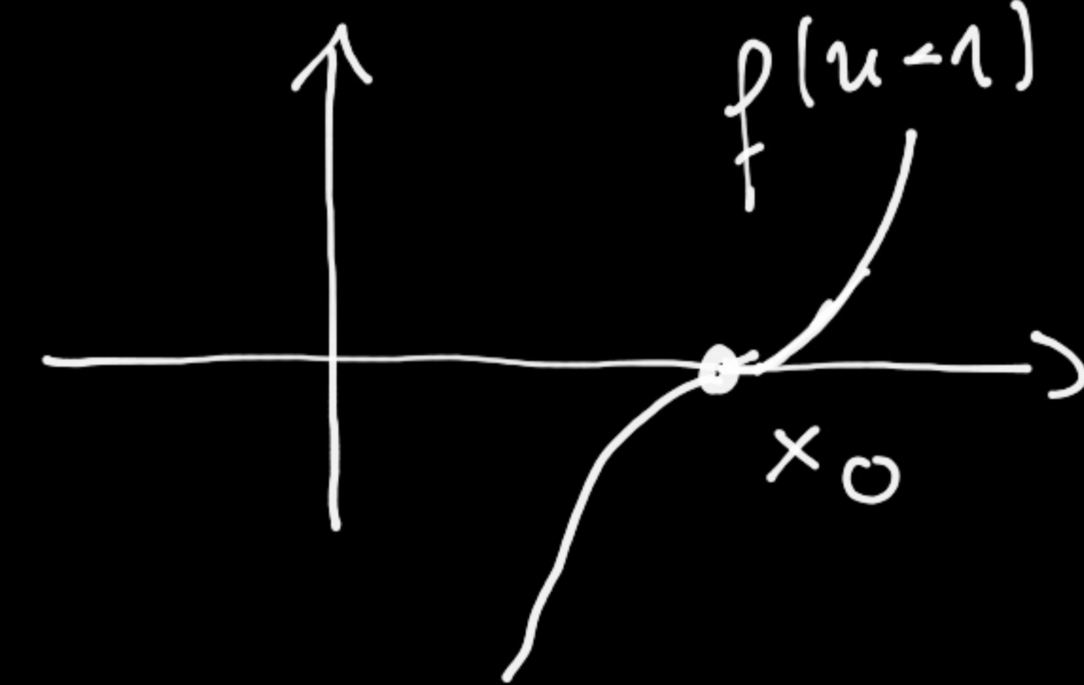
(2.24: Beweis)

$(f^{(n-1)})'$

Nur für $f^{(n)}(x_0) > 0$ (sonst $-f(x)$ ansehen ...)

(2.22 (1)): $f^{(n-1)}$ ist bei x_0 lokal streng wachsend

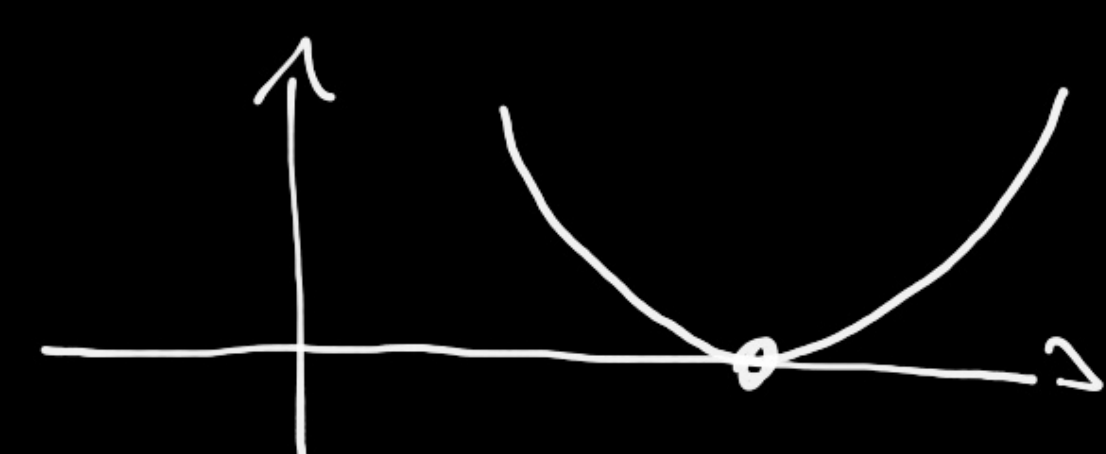
$= (f^{(n-2)})'$



und $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ (Vor.)

(2.22 (2)): $f^{(n-2)}$ hat in x_0 striktes lokales Min

$= (f^{(n-3)})'$



$f^{(n-2)} \rightsquigarrow f^{(n-2)}(x_0+h) > 0$ für $0 < |h| < r$

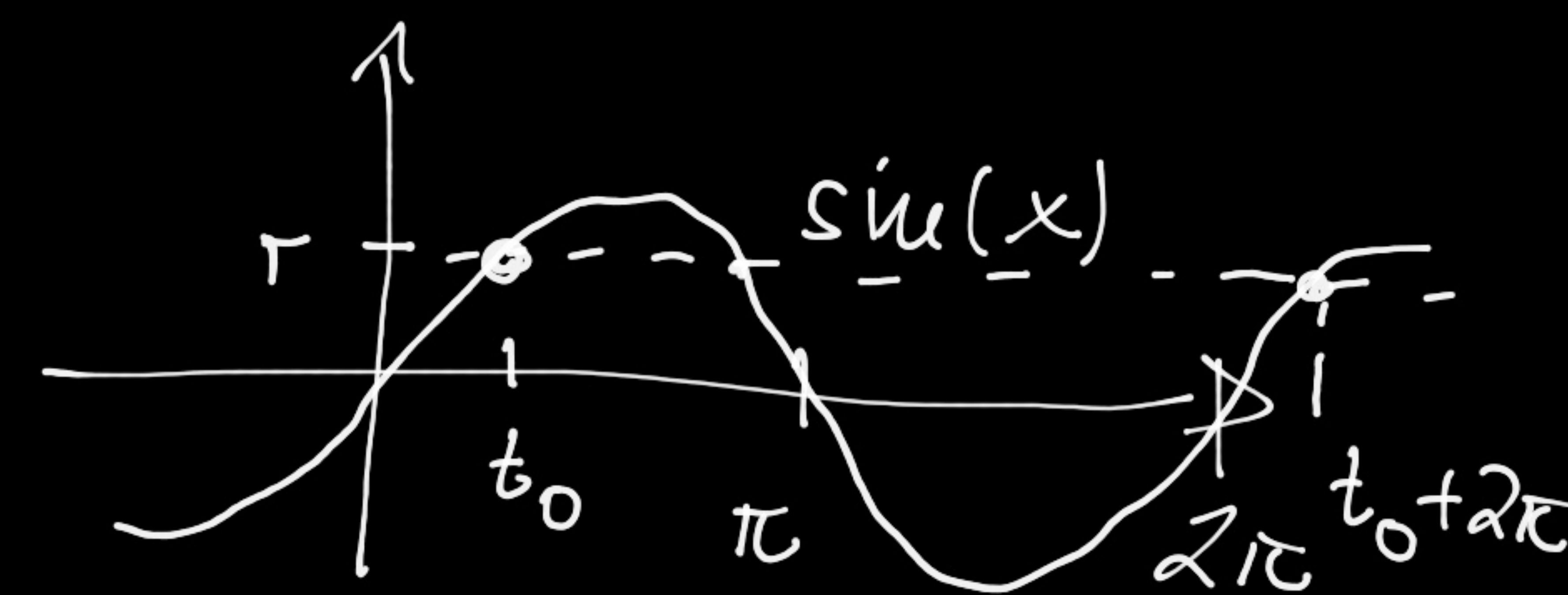
(2.22 (1)): $f^{(n-3)}$ lokal streng monoton wachsend bei x_0

etc. ...

✓

Verrückte Funktionen

① $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$



$r \in [-1,1]$ f ist in 0 unstetig.

Es gibt t_0 mit $\sin(t_0) = r$

und dann $\sin(t_0 + 2\pi z) = r$ mit $z \in \mathbb{Z}$ Menge der ganzen

Also: Für $x = \dfrac{1}{t_0 + 2\pi z}$ (mit $t_0 \neq -2\pi z$)

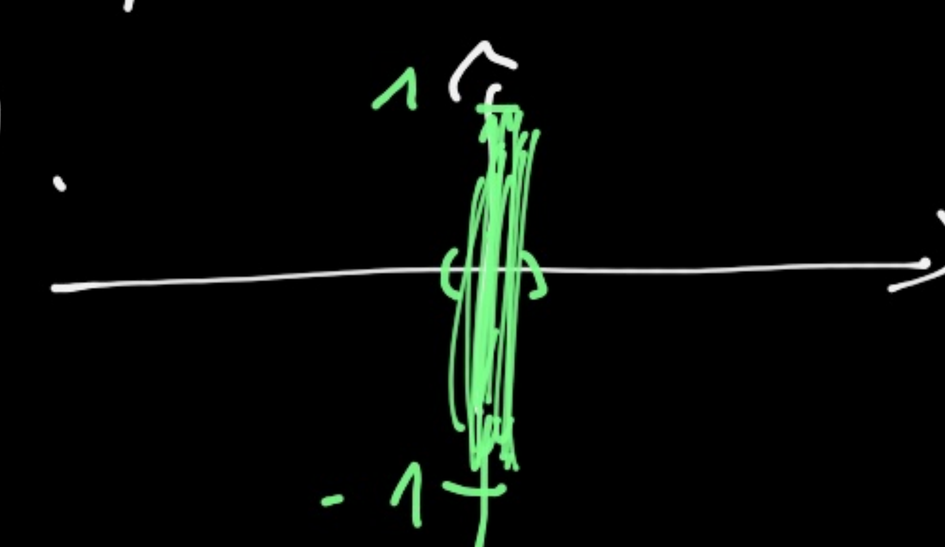
gilt $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin(t_0 + 2\pi z) = r$

für alle z:

Ist $\delta > 0$, so gilt: $\dfrac{1}{t_0 + 2\pi z} \in (-\delta, \delta)$ für große $z \in \mathbb{Z}$,

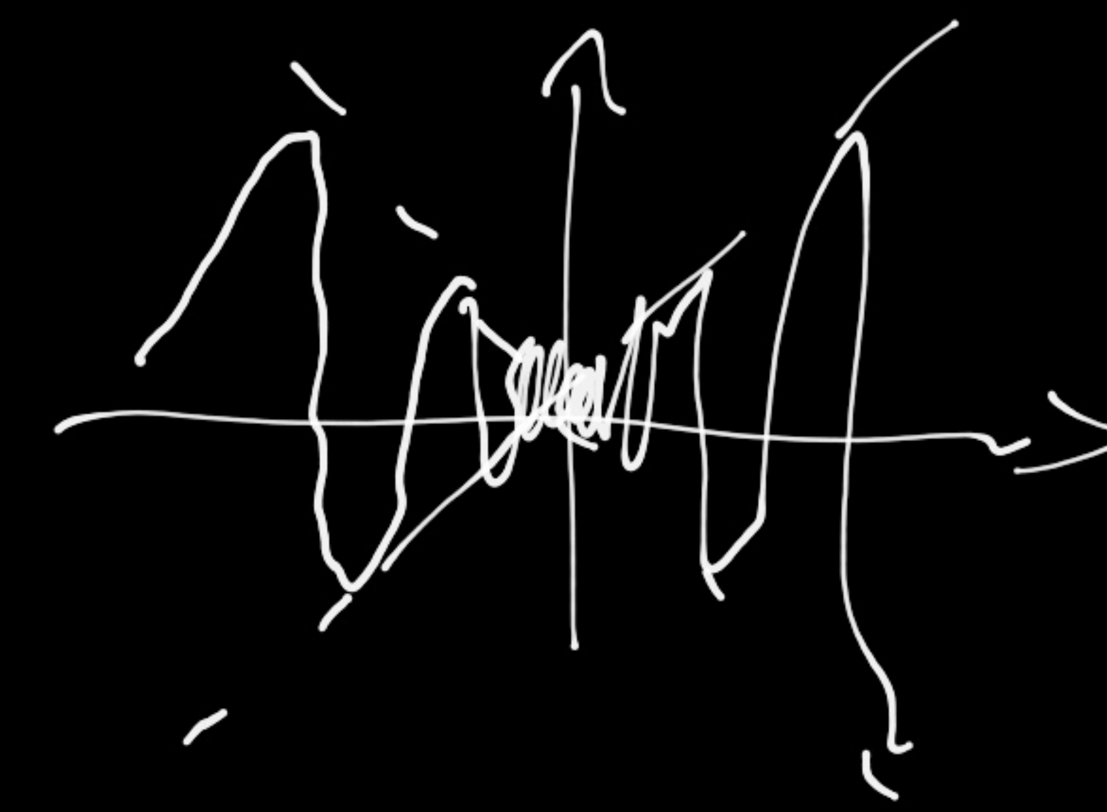
d.h. r kommt als Funktionswert von f auf $(-\delta, \delta)$ vor

Gilt für jedes $r \in [-1,1]$ und für jedes $\delta > 0$.



② $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

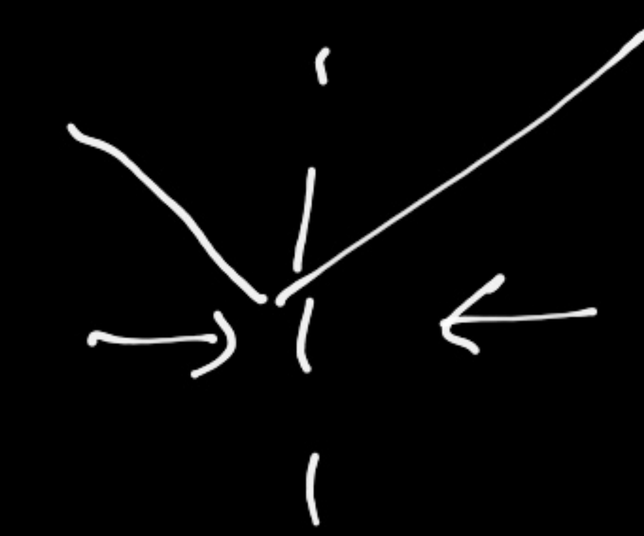
ist in $x = 0$ stetig. Warum?



z.z.: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Setze $\delta = \varepsilon$.



Betrachte $x \neq 0$, $|x| < \delta$.

Dann $|f(x) - 0| = |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = |x| \cdot |\sin \frac{1}{x}|$

$\leq |x| < \delta = \varepsilon$ ✓

$|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$

Aber: $f(x)$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar,

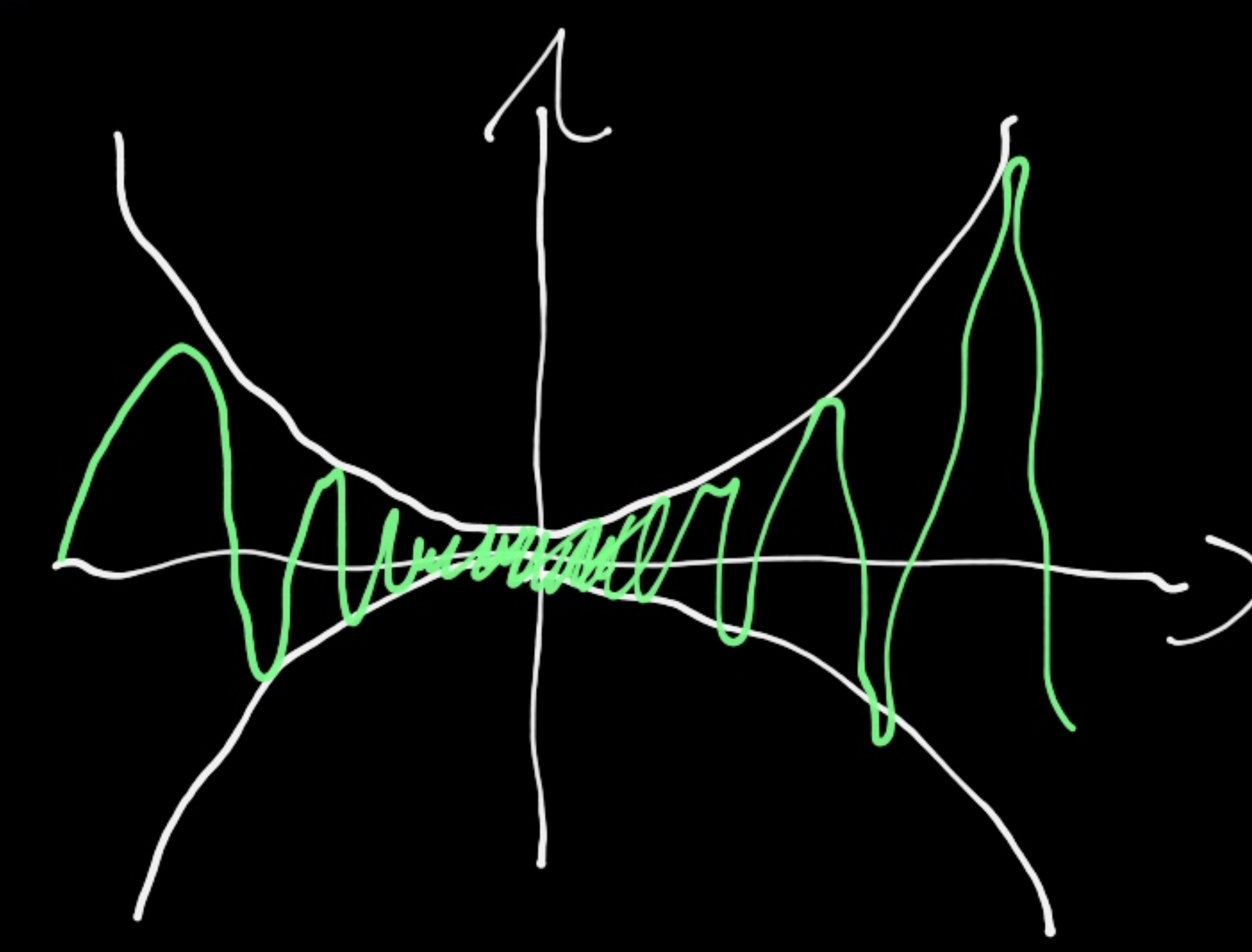
denn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

gibt es nicht.

$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos \frac{1}{x}$

§2 / S. 91

③ $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$



- ist stetig (auch in $x = 0$)
- ist differenzierbar

für $x \neq 0$ sowieso;

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

für $x = 0$ auch:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

Also: $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

f' ist in $x = 0$ unstetig, also gibt es $f''(0)$ nicht!

f ist in $x = 0$ <u>weder</u> extremal <u>noch</u> monoton

④ $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f ist beliebig häufig diff'bar,

$f^{(n)}(0) = 0$ für <u>alle</u> n

f besitzt in $x = 0$ ein (sogar ein globales) Min.

$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ -e^{-1/x^2} & x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

g ist lokal streng monoton in 0;

alle $g^{(n)}(0) = 0$.

$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

2.25 Konvexe und konkave Funktionen

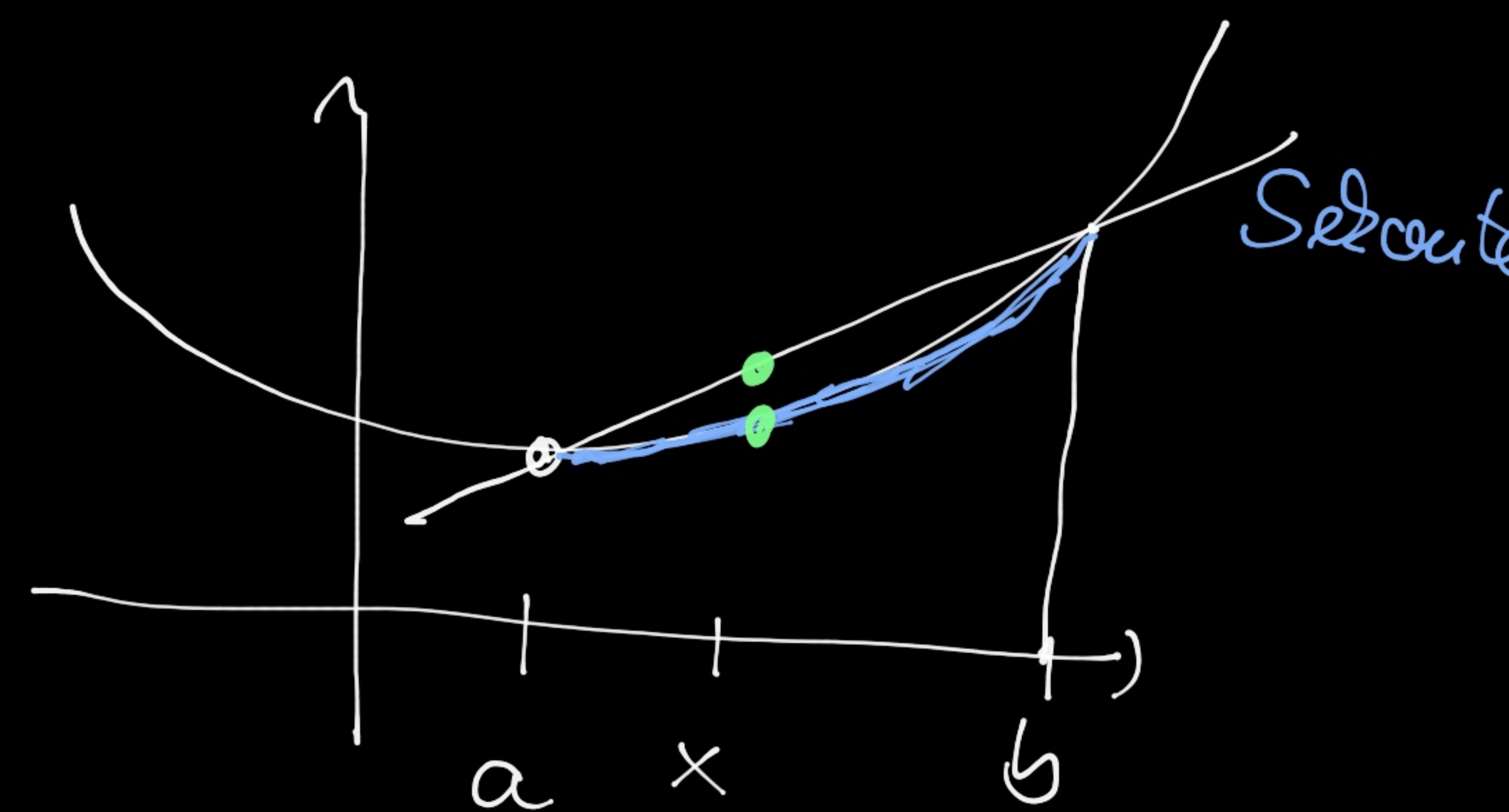
Vorgelegt ist ein Intervall I und eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$

- Dann heißt f **konvex** auf I, falls:

Ist $a < b$ aus I, so verläuft der Graph von f zwischen a und b unterhalb der Sekante.

D.h. für $a < x < b$ gilt

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$



- f **konkav** auf I, falls:

Ist $a < b$ aus I, so verläuft der Graph von f zwischen a und b oberhalb der Sekante.

2.2.6 Satz

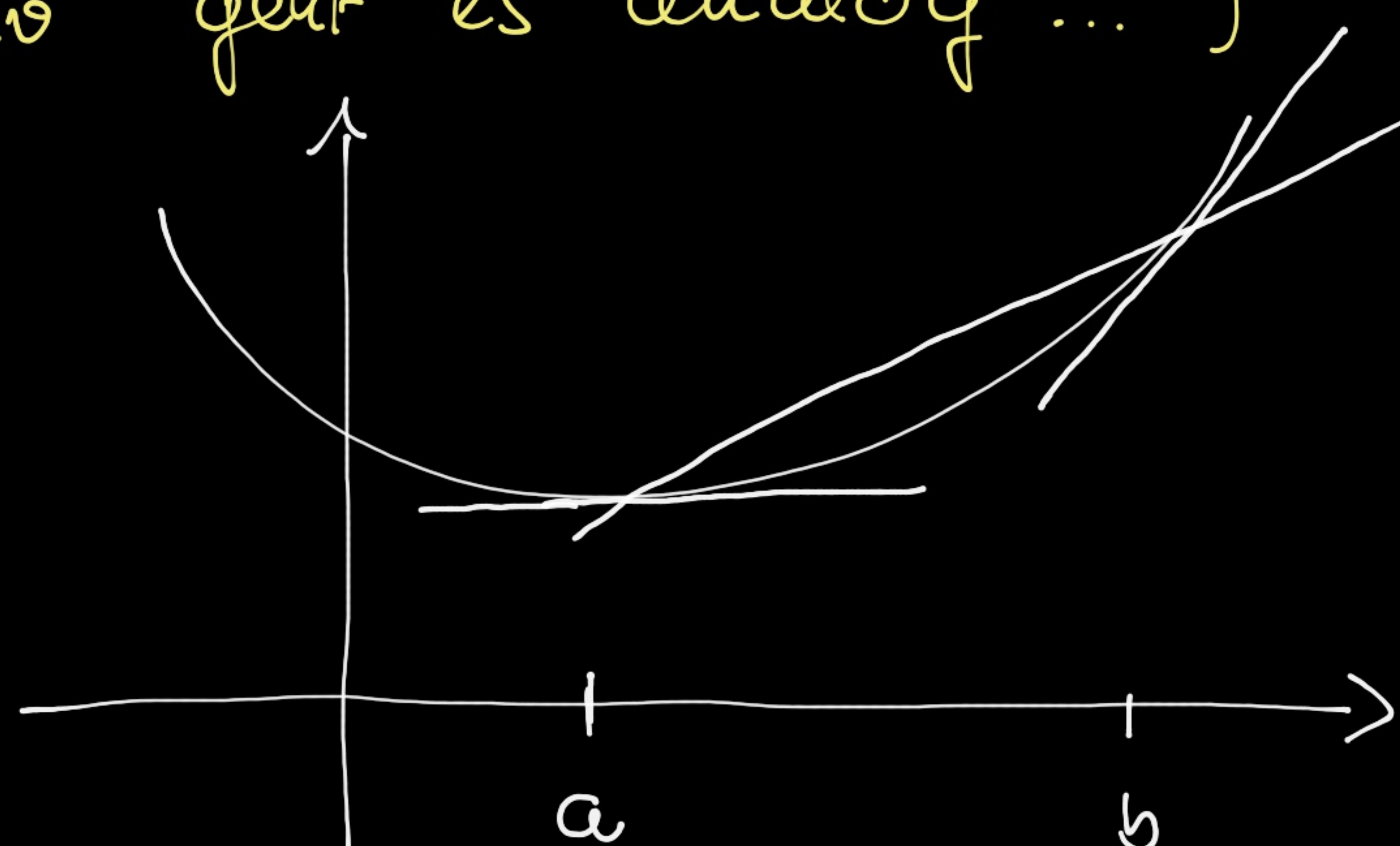
Vorgelegt ist ein Intervall I und eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$

(a) Ist f diff'bar, so ist f genau dann konvex, wenn f' auf I monoton wächst.

(b) Ist f zweimal diff'bar, so ist f genau dann konvex, wenn $f'' \geq 0$.

(mit "konkav" geht es analog ...)

Beweisidee

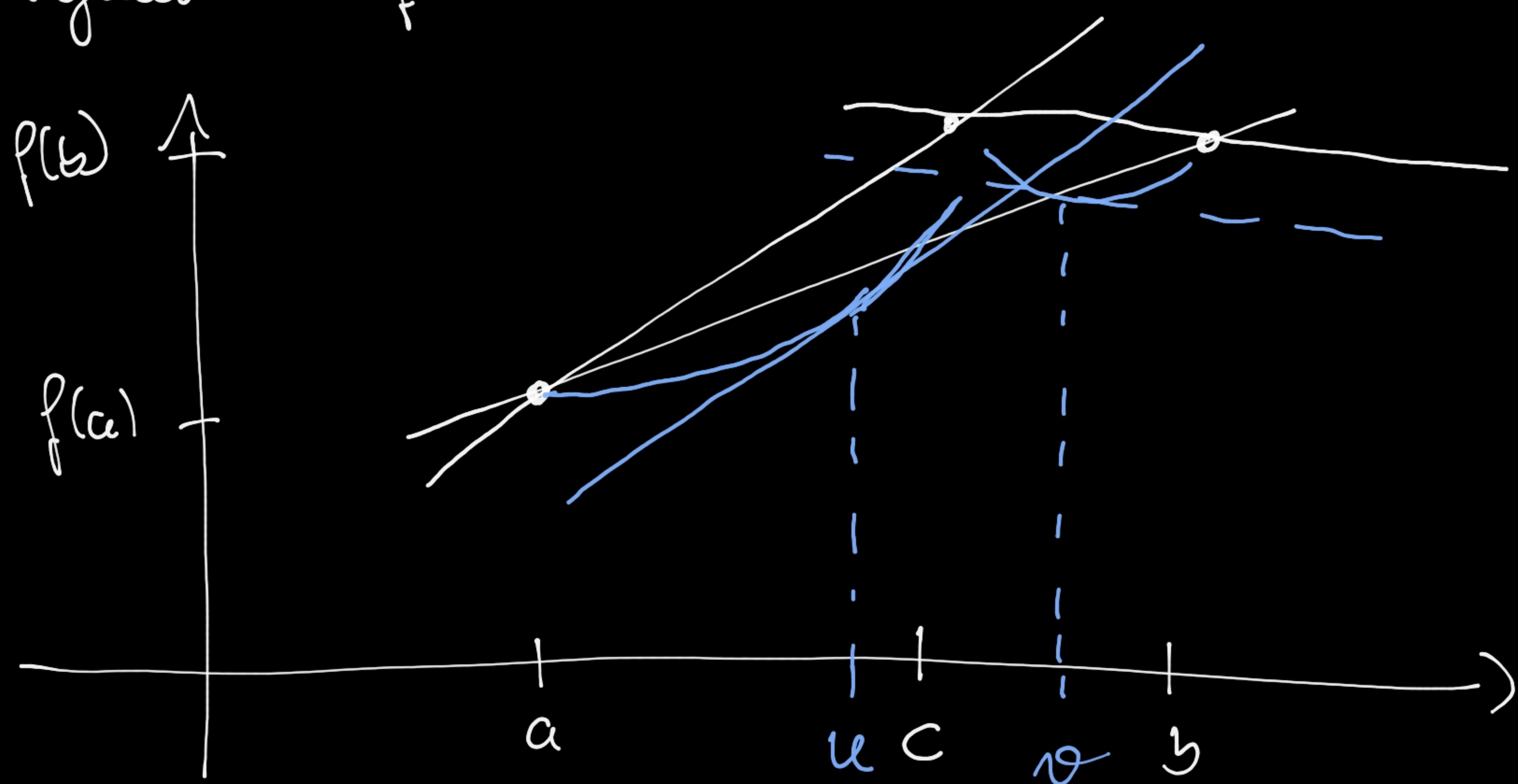


Für $a < x < b$ gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Grenzübergang: $\underline{f'(a)} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \underline{f'(b)}$

Umgekehrt: f' ist monoton wachsend



$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

MWS-D $\longrightarrow$ $\quad \| \qquad\qquad \|$

Es gibt u, v: $\quad f'(u) \quad > \quad f'(v)$; f' nicht wachsend

$$a < u < c \qquad\qquad c < v < a$$

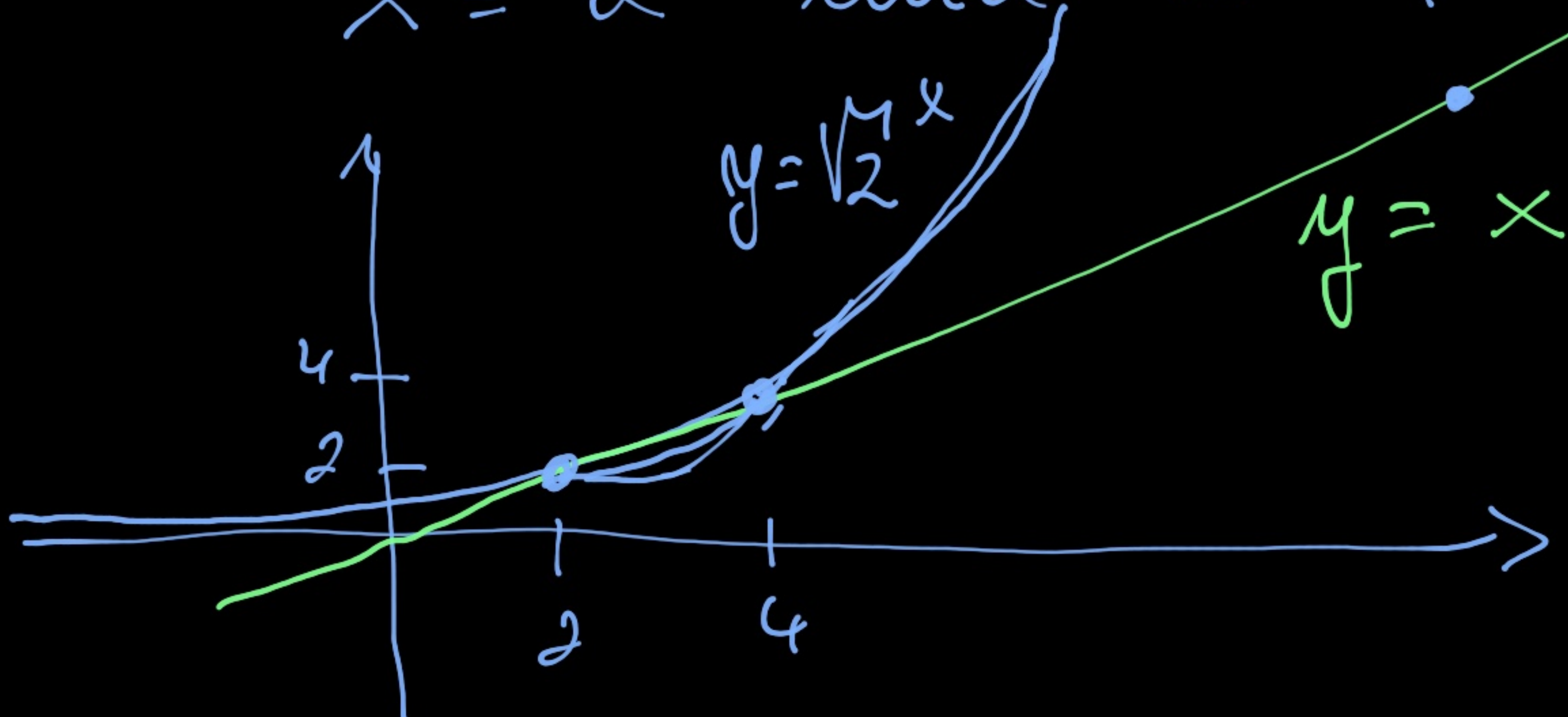
$\blacksquare$

Übung: Bestimme alle x mit

$$\sqrt{2}^{\,x} = x$$

$$\sqrt{2}^{\,2} = 2 \;, \quad \sqrt{2}^{\,4} = \left((\sqrt{2})^2\right)^2 = 2^2 = 4$$

$x = 2$ und $x = 4$ sind die einzigen Lösungen



Weise nach: f ist "strikt" konvex bzw. $f'' > 0$

Variante: $g(x) = \sqrt{2}^{\,x} - x$
$g''(x) = (\ln \sqrt{2})^2 \sqrt{2}^{\,x}$ hat keine Nullstelle. Rolle:
$g(x)$ hat max. 2 Nullstellen

$$\sqrt{2}^{\,x} = \left(e^{\ln\sqrt{2}}\right)^x = e^{x \ln \sqrt{2}}$$

$$\left(\sqrt{2}^{\,x}\right)'' = \left(e^{x \ln\sqrt{2}}\right)'' = \ln\sqrt{2}\left(e^{x\ln\sqrt{2}}\right)'$$

$$= \underbrace{(\ln\sqrt{2})^2}_{>0} \cdot \underbrace{e^{x\ln\sqrt{2}}}_{>0} > 0$$

Hausaufgabe 07 ("Wenn heute Klausur wäre"):

(a) Zeige ausschließlich mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass $f(x) = x^2 + x + 1$ die Ableitung $f'(x) = 2x + 1$ besitzt. (5P)

(b) Zeige ausschließlich mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums: (8P)

$$\lim_{x \to 1} (x^2+1) = 2$$

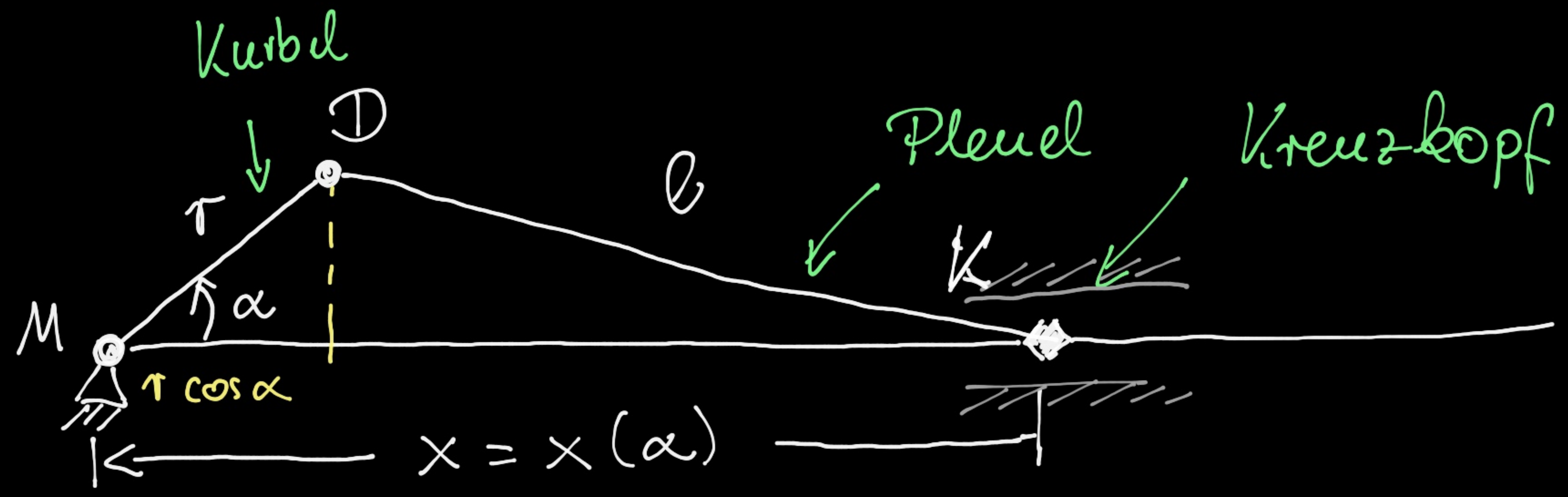
(c) Bestimme die lokalen Extrema von $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+4}$ (7P)

(d) Weise nach, dass $f(x) = x^4 + x^3 + 1$ auf $(0, \infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt, und bestimme $(f^{-1})'(3)$. (8P)

Versuche nicht, die Umkehrfunktion auszurechnen!

$28/85$ P

Das Schubkurbelgetriebe:



$l > 2r$

Gesucht $x(\alpha)$, α im Bogenmaß

Kosinussatz: $l^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\alpha$

Umstellen: $x^2 - 2(r\cos\alpha)\cdot x + r^2 - l^2 = 0$

p-q-Formel: $x = r\cos\alpha \pm \sqrt{(r\cos\alpha)^2 - (r^2 - l^2)}$

Geometrie: $\underline{x = r\cos\alpha + \sqrt{r^2(\cos^2\alpha - 1) + l^2}} = x(\alpha)$

Kurbel bewegt sich "gleichförmig" mit $1\,\frac{\text{rad}}{s}$,
also $\alpha = t$ (Zeit)

$$x(t) = r\cos t + \sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}$$

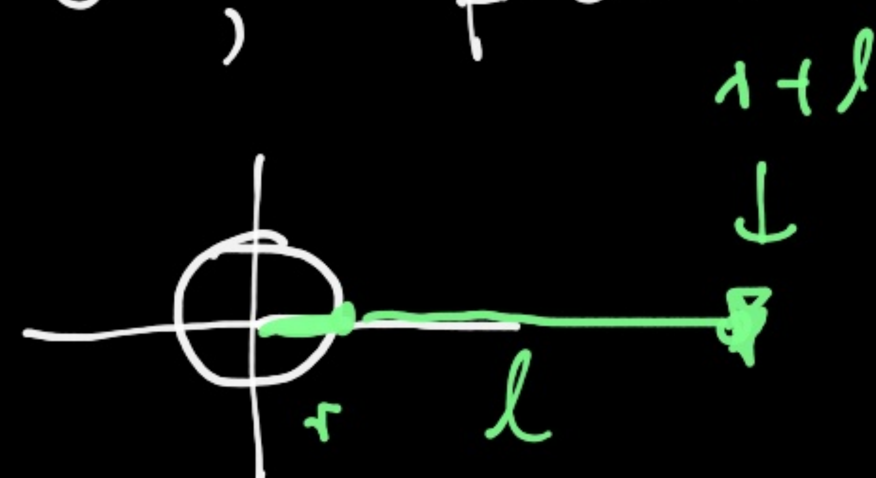
Gesucht: Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ ("•": Ableitung nach der Zeit)

Beschleunigung $\ddot{x}(t)$.

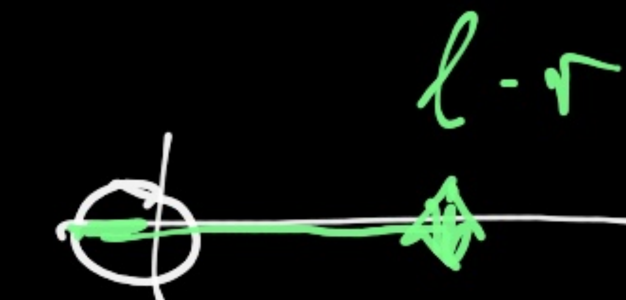
$$\dot{x}(t) = -r\sin t + \frac{-\cancel{2}\, r^2 \sin t \cos t}{\cancel{2}\sqrt{\dots}}$$

$$\dot{x}(t) = -r\sin t - \frac{r^2 \sin t \cos t}{\sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}}$$

$\dot{x}(t) = 0$, falls $\sin t = 0$ (d.h. Winkel $t = 0, \pi$)



: $t = 0 \leadsto$ Max, $t = \pi \leadsto$ Min.



oder $-r - \dfrac{r^2 \cos t}{\sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}} = 0$

bzw. $-1 = \dfrac{r\cos t}{\sqrt{\dots}}$ bzw. $(-\sqrt{\dots})^2 = r^2\cos^2 t$ bzw. $l^2 - r^2 = 0$

$\leadsto$ keine weitere Lsg.

$x(0) = l + r, \quad x(\pi) = l - r, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = -r - \frac{r^2}{l}$

$y(t) = a + b\cos t + c \cdot \cos(2t)$ als Annäherung

mit $y(0) = x(0), \quad y(\pi) = x(\pi), \quad \dot{y}(0) = \dot{x}(0), \quad \ddot{y}(0) = \ddot{x}(0)$

$a + b + c = y(0) = x(0) = l + r \quad (1)$

$a - b + c = y(\pi) = x(\pi) = l - r \quad (2)$

$\dot{y}(t) = -b\sin t - 2c\sin(2t), \quad \dot{y}(0) = 0 = \dot{x}(0)$ ✓

$\ddot{y}(t) = -b\cos t - 4c\cos(2t)$

$\underline{-b} - 4c = \ddot{y}(0) = \ddot{x}(0) = \underline{-r} - \frac{r^2}{l} \quad (3)$

(1) − (2) $\quad 2b = 2r, \quad \boxed{b = r}$

(3) liefert $\quad 4c = \frac{r^2}{l}$ bzw. $\boxed{c = \frac{r^2}{4l}}$

(1) liefert : $\quad a + \cancel{r} + \frac{r^2}{4l} = l + \cancel{r}; \quad \boxed{a = l - \frac{r^2}{4l} = \frac{4l^2 - r^2}{4l}}$

$$x(t) = r\cos t + \sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + \ell^2}$$

$$y(t) = \frac{4\ell^2 - r^2}{4\ell} + r\cos t + \frac{r^2}{4\ell}\cos(2t)$$

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2\ell}\sin(2t)$$ Geschwindigkeit

$$\ddot{y}(t) = -r\cos t - \frac{r^2}{\ell}\cos(2t)$$ Beschleunigung

$$\dddot{y}(t) = r\sin t + 2\frac{r^2}{\ell}\sin(2t)$$ Ruck

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t)$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$

$$0 = \ddot{y}(t) = -r\cos t - \frac{r^2}{\ell}(2\cos^2 t - 1) \qquad \Big| : (-r)$$

$$0 = \cos t + 2\frac{r}{\ell}\cos^2 t - \frac{r}{\ell} \qquad \Big| : 2\frac{r}{\ell}$$

$$0 = (\cos t)^2 + \frac{\ell}{2r}\cos t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos t = -\frac{\ell}{4r} \pm \sqrt{\frac{\ell^2}{16r^2} + \frac{1}{2}} = -\frac{\ell}{4r} \pm \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2 + 8r^2}$$

$$x(t) = r\cos t + \sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}$$

$$y(t) = \frac{4l^2 - r^2}{4l} + r\cos t + \frac{r^2}{4l}\cos(2t)$$

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2l}\sin(2t)$$ Geschwindigkeit

$$\ddot{y}(t) = -r\cos t - \frac{r^2}{l}\cos(2t)$$ Beschleunigung

$$\dddot{y}(t) = r\sin t + 2\frac{r^2}{l}\sin(2t)$$ Ruck

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t)$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$

$$0 = \ddot{y}(t) = -r\cos t - \frac{r^2}{l}(2\cos^2 t - 1) \quad \Big| : (-r)$$

$$0 = \cos t + 2\frac{r}{l}\cos^2 t - \frac{r}{l} \quad \Big| : 2\frac{r}{l}$$

$$0 = (\cos t)^2 + \frac{l}{2r}\cos t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos t = -\frac{l}{4r} \pm \sqrt{\frac{l^2}{16r^2} + \frac{1}{2}} = -\frac{l}{4r} \pm \frac{1}{4r}\sqrt{l^2 + 8r^2}$$

Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2\ell}\sin(2t)$$

(Nullstellen von $\ddot{y}(t) = \frac{r^2}{\ell} - r\cos t - 2\frac{r^2}{\ell}\cos^2 t$)

$$\cos t = -\frac{\ell}{4r} \pm \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2 + 8r^2} \in [-1, 1]$$

$$= -\frac{\ell}{4r}\cdot\left(1 \mp \sqrt{1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}}\right)$$

gilt genau dann, wenn

$$1 \mp \sqrt{1 + \frac{8r^2}{\ell^2}} \in \left[-\frac{4r}{\ell}, \frac{4r}{\ell}\right]$$

"–" :

$$\sqrt{1 + \frac{8r^2}{\ell^2}} \leq \frac{4r}{\ell} - 1$$

$$\cancel{1+}\frac{8r^2}{\ell^2} \leq \left(\frac{4r}{\ell} - 1\right)^2 = 16\frac{r^2}{\ell^2} - 8\frac{r}{\ell}\cancel{+1}$$

gdw. $\frac{r}{\ell} \leq \frac{r^2}{\ell^2}$ bzw. $1 \leq \frac{r}{\ell}$ bzw. $\ell \leq r$

Aber: $\ell > 2r$ nach Vor. $\rightsquigarrow$ KNIF

Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2\ell}\sin(2t)$$

(Nullstellen von $\ddot{y}(t) = \frac{r^2}{\ell} - r\cos t - 2\frac{r^2}{\ell}\cos^2 t$)

"+": $$\boxed{\cos t = -\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2 + 8r^2}} \overset{?}{\in} [-1,1]$$

$$= -\frac{\ell}{4r}\cdot\left(1 - \sqrt{1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}}\right)$$

gilt genau dann, wenn

$$0 > 1 - \sqrt{1 + \frac{8r^2}{\ell^2}} \in \left[-\frac{4r}{\ell}, \frac{4r}{\ell}\right]$$

gdw $$1 - \sqrt{1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}} \geq -\frac{4r}{\ell}$$

gdw $$1 + \frac{4r}{\ell} \geq \sqrt{1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}}$$

gdw. $$1 + 8\frac{r}{\ell} + 16\frac{r^2}{\ell^2} = \left(1 + \frac{4r}{\ell}\right)^2 \geq 1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}$$

bzw. $$8\frac{r}{\ell} + 8\frac{r^2}{\ell^2} \geq 0 \quad \checkmark$$

§21 S. 105

Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot y(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2l}\sin(2t)$$

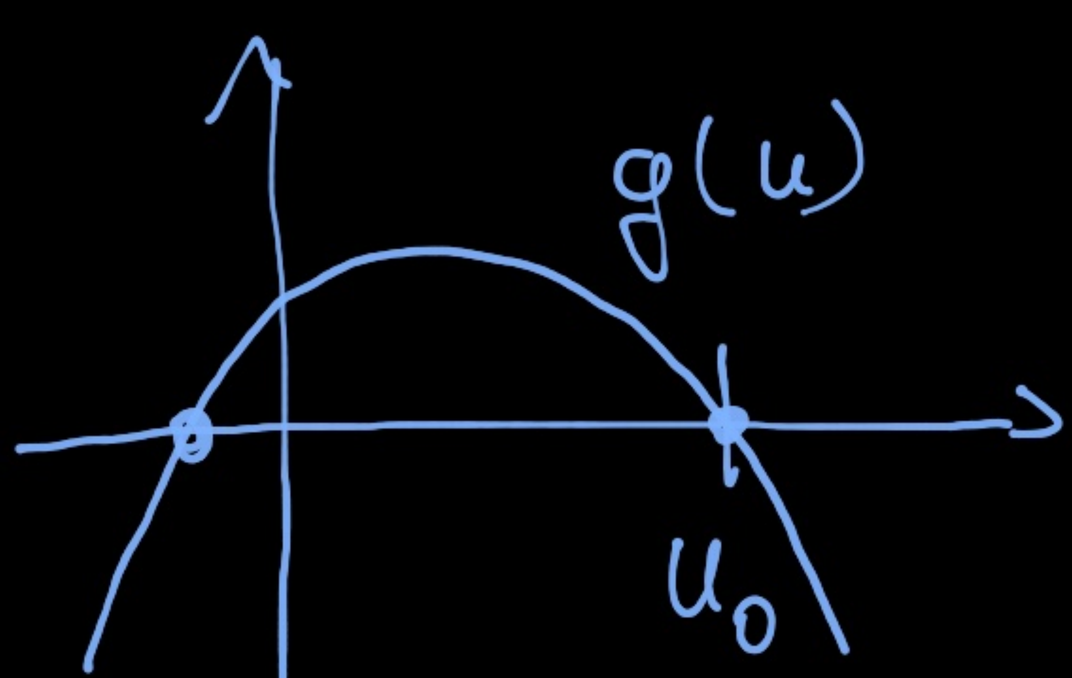
(Nullstellen von $\ddot y(t) = \frac{r^2}{l} - r\cos t - 2\frac{r^2}{l}\cos^2 t$)

$$\boxed{\cos t = -\frac{l}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{l^2+8r^2}}$$

$$t = \pm \arccos\left(-\frac{l}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{l^2+8r^2}\right) \quad (+\,2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

$$\ddot y = \frac{r^2}{l} - r\cdot u - 2\frac{r^2}{l}u^2 = g(u) \qquad (u = \cos t)$$

$$u = u_0 = -\frac{l}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{l^2+8r^2}$$ rechte Nullstelle



$g(u)$ wechselt von + nach −

$\ddot y(t)$ wechselt in $\underbrace{t = +\arccos(\dots)}_{\text{Min.}}$ von − nach +

Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2\ell}\sin(2t)$$

(Nullstellen von $\ddot{y}(t) = \frac{r^2}{\ell} - r\cos t - 2\frac{r^2}{\ell}\cos^2(t)$)

$$\boxed{\cos t = -\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2 + 8r^2}}$$

$$t_\pm = \pm\arccos\left(-\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2+8r^2}\right) \left(+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$\ddot{y}$ ist stetig, also: zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen ist $\ddot{y}$ entweder positiv oder negativ

$$\ddot{y}(0) = \frac{r^2}{\ell} - r - 2\frac{r^2}{\ell} = -r - \frac{r^2}{\ell} < 0$$

Zwischen t_- und t_+ gilt $\ddot{y} > 0$.

$t = \pi$ liegt zwischen t_+ und $t_- + \pi$ (aufeinanderfolgende NSt)

und $\ddot{y}(\pi) = \frac{r^2}{\ell} + r - 2\frac{r^2}{\ell} = r - \frac{r^2}{\ell} = \frac{r}{\ell}\underbrace{(\ell - r)}_{>0} > 0$

$= \ddot{y}(-\pi)$

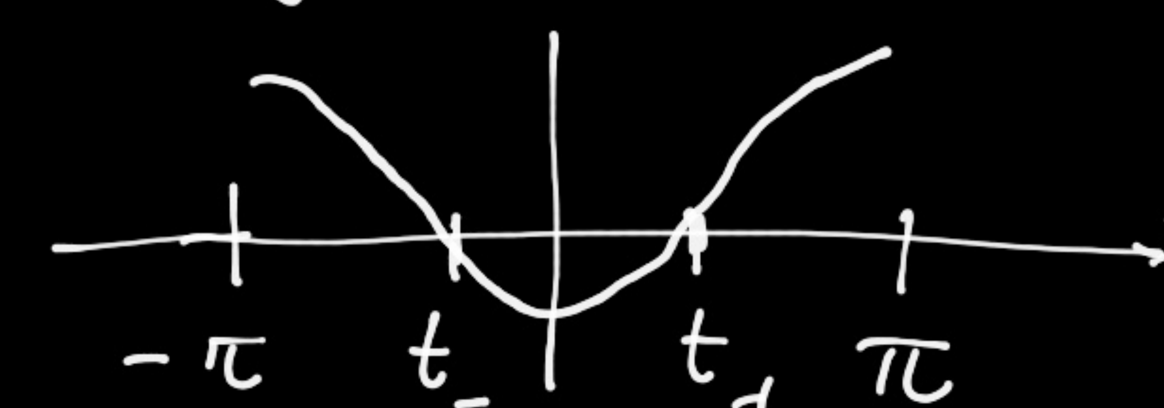
Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2\ell}\sin(2t)$$

(Nullstellen von $\ddot{y}(t) = \frac{r^2}{\ell} - r\cos t - 2\frac{r^2}{\ell}\cos^2(t)$)

$$t_\pm = \pm\arccos\left(-\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2+8r^2}\right) \quad (+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

- $-\pi < t_- < 0 < t_+ < \pi$
- t_+, t_- sind die einzigen Nullstellen von $\ddot{y}$ in $[-\pi,\pi]$
- $\ddot{y}(-\pi) = \ddot{y}(\pi) > 0 > \ddot{y}(0)$



Also: $\ddot{y} > 0$ auf $[-\pi, t_-)$

$\ddot{y} < 0$ auf (t_-, t_+)

$\ddot{y} > 0$ auf $(t_+, \pi]$

Folgt: t_- Maximum

t_+ Minimum

$$\dddot{y}(t) = r \sin t + 2\frac{r^2}{\ell}\sin(2t) = 0$$

$$\sin(2t) = 2\cos t \sin t$$

$$r\sin t + 4\frac{r^2}{\ell}\sin t\cdot\cos t = 0$$

also: $\sin t = 0$ oder $1 + 4\frac{r}{\ell}\cdot\cos t = 0$

bzw. $\sin t = 0$ oder $\cos t = -\frac{\ell}{4r} \overset{?}{\in} [-1, 0]$

$\downarrow$ kritische Punkte:
$t = k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\downarrow$ 1. Fall: $\ell > 4r \rightsquigarrow$ keine weiteren Lsg.

$\ell = 4r$: Lsg. fallen zusammen

$(2r <)\ \ell < 4r$: weitere Lsg, nämlich $t = \pm\arccos\left(-\frac{\ell}{4r}\right)$
$(+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$

$$\dddot{y}(t) = r \sin t + 2\frac{r^2}{l}\sin(2t) = 0$$

$$\dddot{y}(t) = r \sin t \cdot \left(1 + 4\frac{r}{l}\cos t\right) = 0$$

Lösungen auf $(-\pi, \pi]$: (reicht! 2π-periodisch)

$t = 0, \pi$, falls $l \geq 4r$

$t = 0, \pi, \pm \arccos\left(-l/4r\right)$, falls $2r < l < 4r$

$\underline{l \geq 4r}$: $\dddot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = r > 0$, $\dddot{y}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -r$

Wechsel $+ \to -$ bei π $\rightsquigarrow$ $t = \pi$ ist ein Max. von $\ddot{y}$

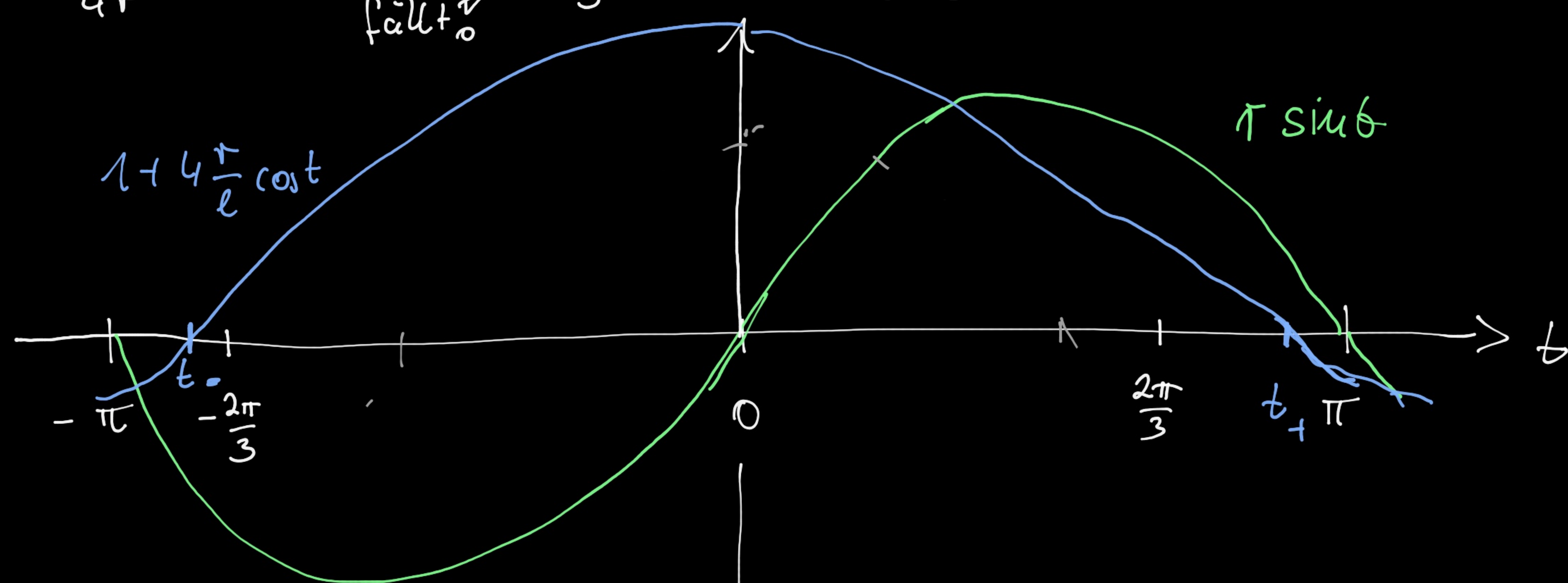
Wechsel $- \to +$ bei 0 $\rightsquigarrow$ $t = 0$ ist ein Min. von $\ddot{y}$

$$\dddot{y}(t) = r\sin t \cdot \left(1 + 4\frac{r}{\ell}\cos t\right) = 0$$

$2r < \ell < 4r$: Nullstellen in $(-\pi, \pi]$ sind $t = 0, \pi$ und $t = t_{\pm} = \pm \arccos\left(-\frac{\ell}{4r}\right)$

$\Big\downarrow : (-4r)$

$$-\frac{1}{2} > -\frac{\ell}{4r} > -1 \quad \underset{\text{fällt!}}{\overset{\arccos}{\rightsquigarrow}} \quad \frac{2\pi}{3} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) < t_+ < \pi$$



$\dddot{y}(t)$ | + | − | + | − | +

t_-, t_+ Maxima, $0, \pi$ Minima