2.14 Die Ableitung als Funktion

Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.
f heißt auf D_f differenzierbar, wenn $f'(x_0)$ für jedes $x_0 \in D_f$ existiert.
Ist f auf D_f differenzierbar, dann ergibt die Zuordnung $x \mapsto f'(x)$ eine neue Funktion $f': D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.
Diese Funktion f' heißt die Ableitung von f.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ hat die Ableitung
$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$

Notz: Falls f' wieder differenzierbar, so setze $f'' = (f')'$
"zweite Ableitung"

Bsp $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$
$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

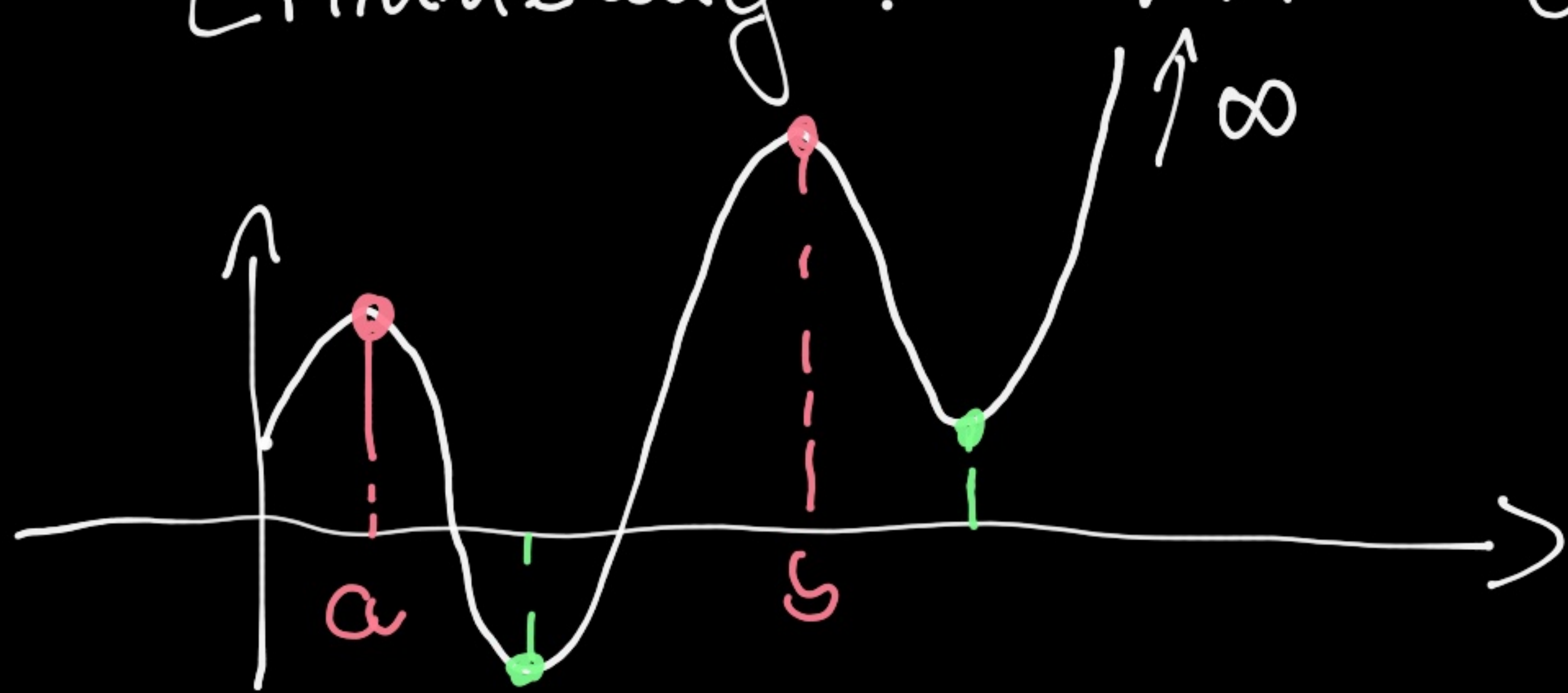
2.15 Lokale Extrema

Vorgelegt ist eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$.

$x_0 \in D_f$ heißt lokales Maximum von f, falls:
Es gibt ein $r > 0$ mit:
$f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D_f$, $|x - x_0| < r$

$x_0 \in D_f$ heißt lokales Minimum von f, falls:
Es gibt ein $r > 0$ mit:
$f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D_f$, $|x - x_0| < r$

Erinnerung: $|x - x_0| < r$ bedeutet $x_0 - r < x < x_0 + r$
bzw. $x \in (x_0 - r; x_0 + r)$

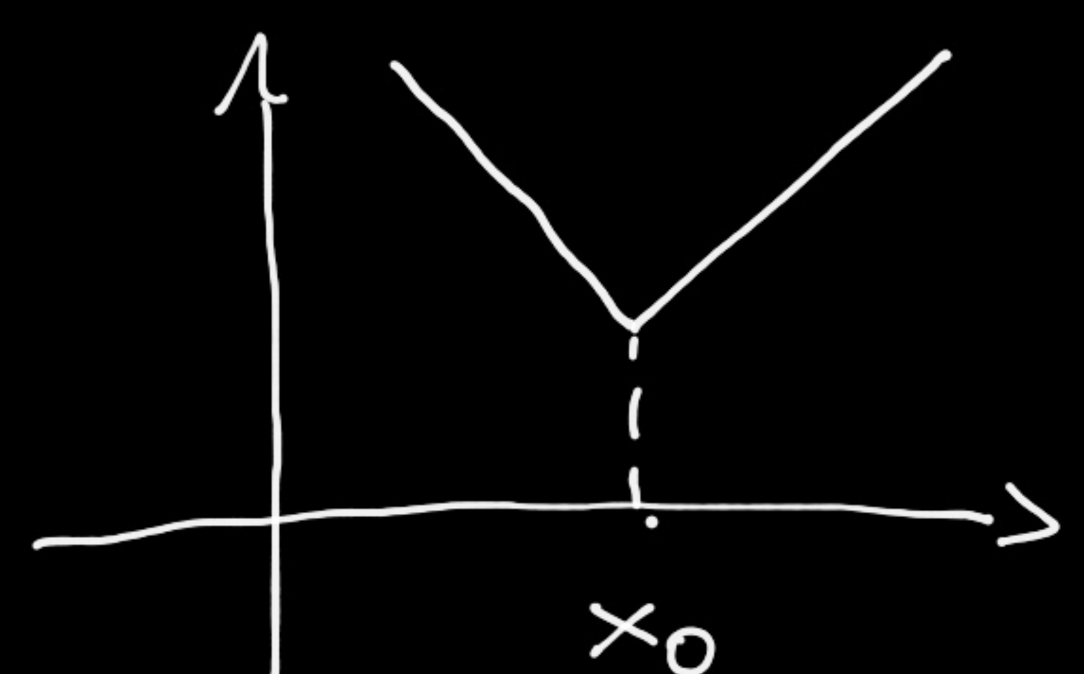


a, b lokale Maxima
(kein globales Maximum)

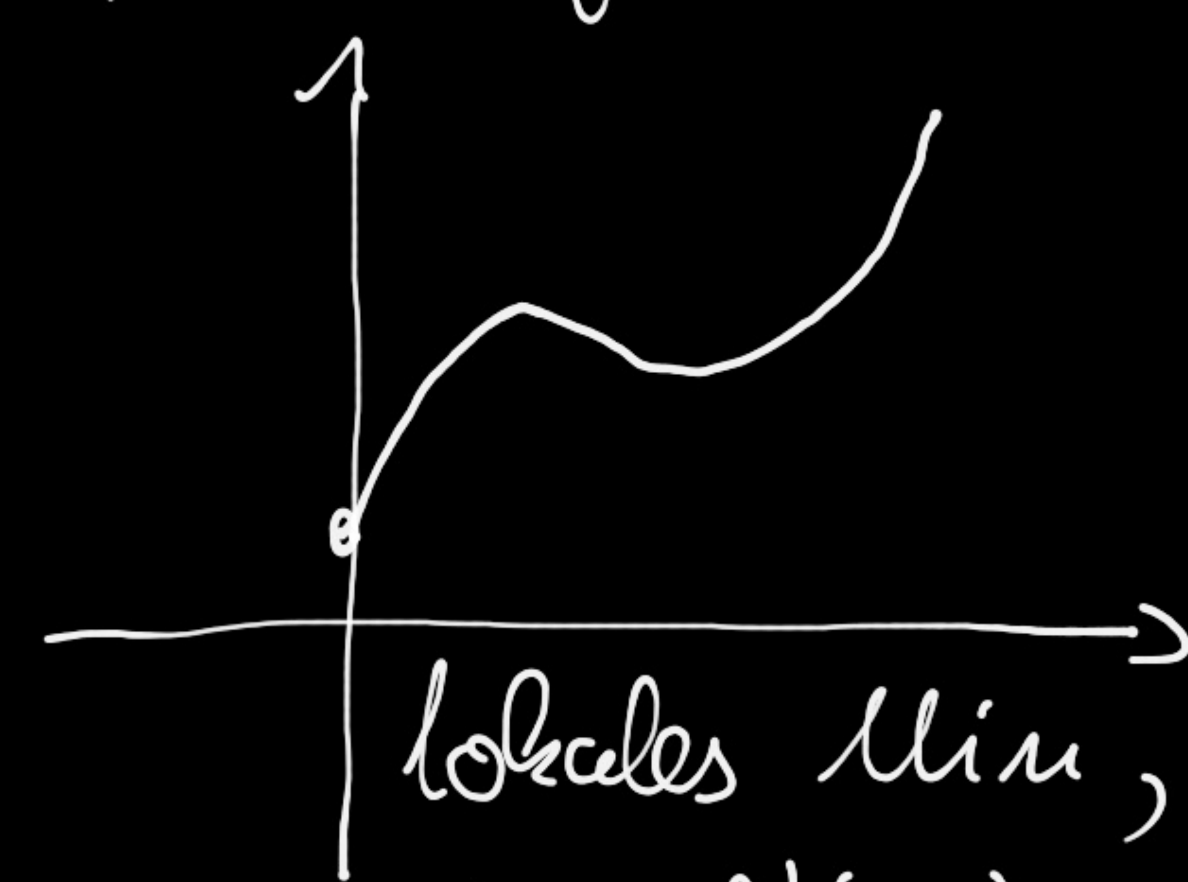
2.16 Notiz

Vorgelegt ist eine differenzierbare Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$.

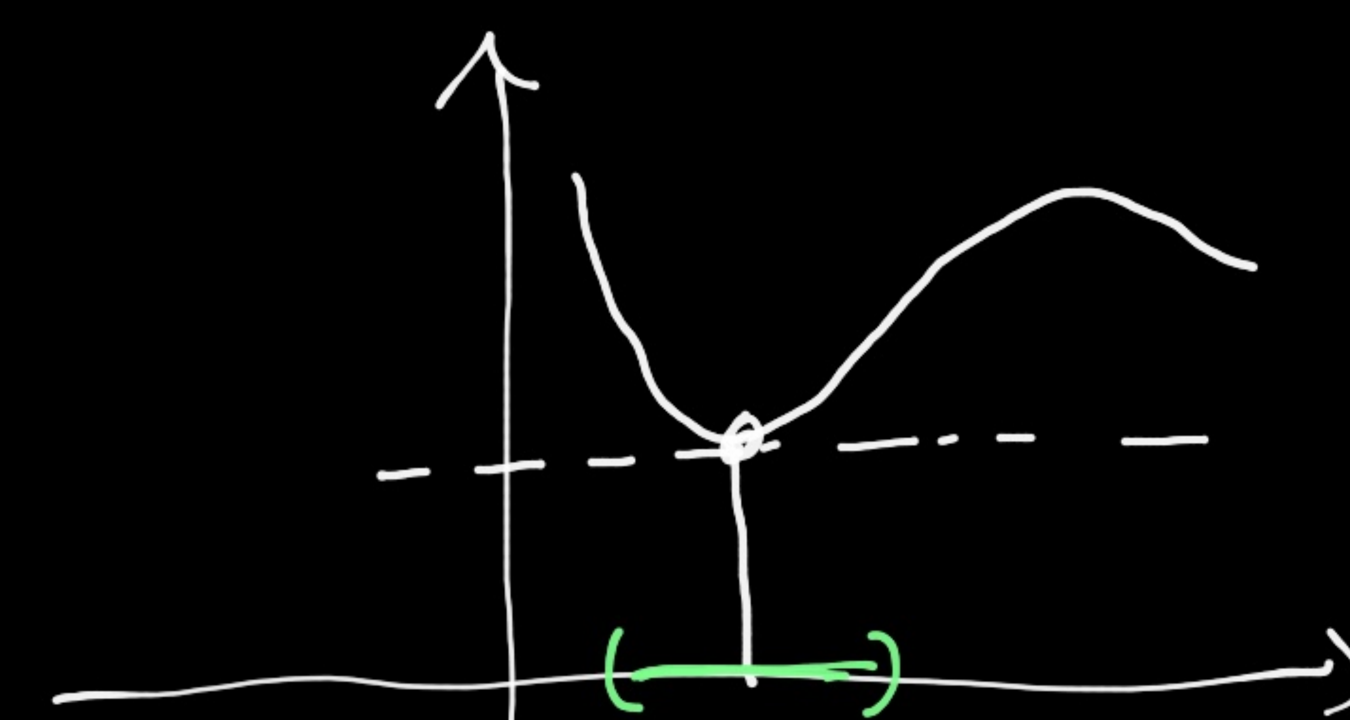
Dann gilt: Ist $x_0 \in D_f$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum, und ist f auf dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ definiert, so gilt $f'(x_0) = 0$.



lokales Min, $f'(x_0)$ existiert nicht



lokales Min, aber $f'(x_0) \neq 0$



lokales Min $f'(x_0) = 0$

Beweis: x_0 lokales Minimum: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f(x) - f(x_0) \geq 0$ für $x \in D_f$, $|x - x_0| < r$

Auf $(x_0, x_0 + r)$ gilt $x - x_0 > 0$, also $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

$f(x) - f(x_0) \geq 0$ gilt für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$
(r klein genug)

$x - x_0 > 0$ gilt für alle $x \in (x_0, x_0 + r)$

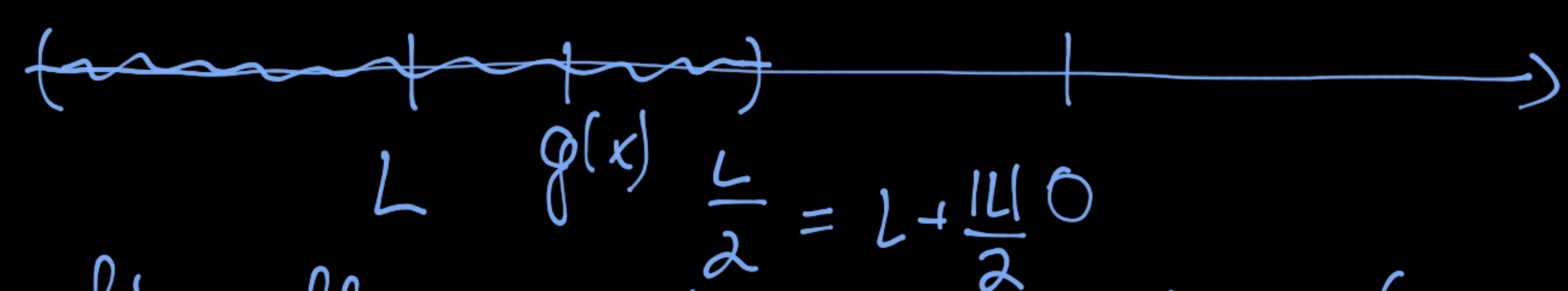
Also: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + r)$

Folgt: $\lim\limits_{x \to x_0} \underbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{} = f'(x_0) \geq 0$

Denn: $g(x) \geq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + r)$

Wäre $L = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) < 0$, so wähle zu $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2} > 0$ ein

passendes $\delta > 0$



so dass

$|g(x) - L| < \varepsilon = \dfrac{|L|}{2}$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subseteq (x_0, x_0 + r)$

Für $x = x_0 + \dfrac{\delta}{2}$ gilt $|g(x) - L| < \dfrac{|L|}{2}$, also $g(x) < 0$ – das geht nicht. Folgt: $L \geq 0$.

Gezeigt: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

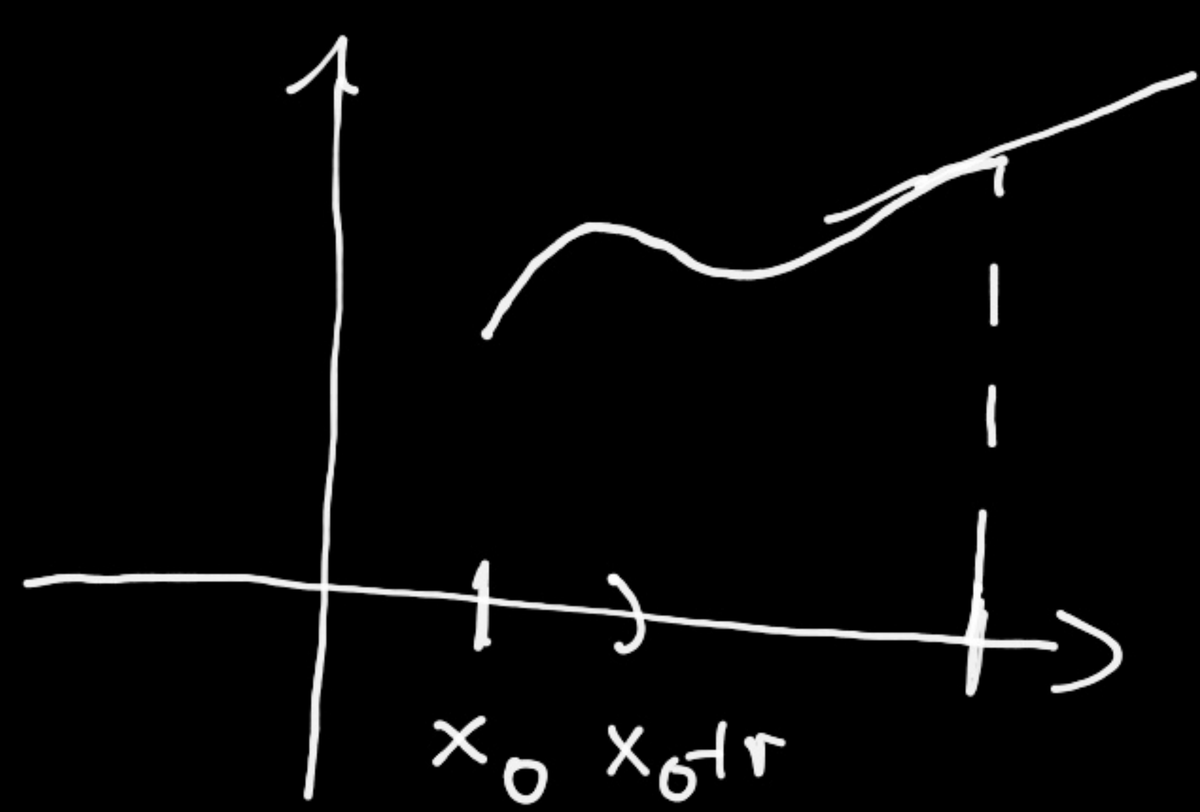
Analog mit Betrachtung von $(x_0 - r, x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 .$$

Zusammen: $f'(x_0) \geq 0$ <u>und</u> $f'(x_0) \leq 0$

Das zeigt $f'(x_0) = 0$. $\square$

<u>Notiz</u>



$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar

a lokales Min $\longrightarrow$ $f'(a) \geq 0$

a lokales Max. $\longrightarrow$ $f'(a) \leq 0$

b lokales Min $\longrightarrow$ $f'(b) \geq 0$

b lokales Max $\longrightarrow$ $f'(b) \geq 0$

2.17 Der Satz von Rolle

Vorgelegt ist eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

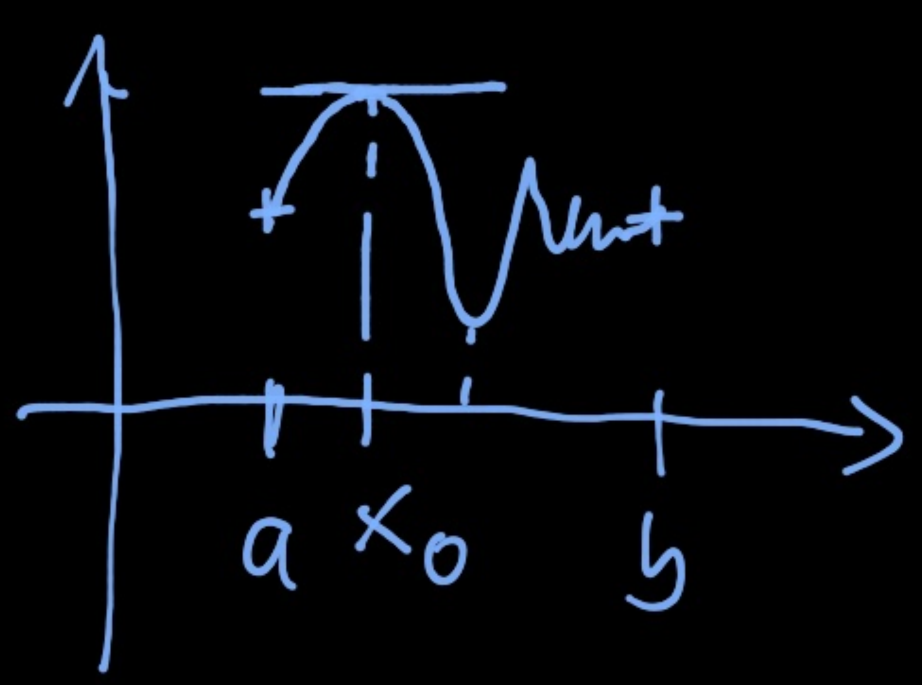
Definitionsbereich ist abgeschlossenes Intervall

Voraussetzungen an f:

- f ist stetig auf $[a,b]$
- f ist differenzierbar auf (a,b)
- $f(a) = f(b)$

Dann gibt es eine Stelle $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweisidee: Min/Max: Es gibt $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit $f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$ für alle x.



Falls $x_{min} \in (a,b)$, so folgt $f'(x_{min}) = 0$ nach 2.16

Falls $x_{max} \in (a,b)$, —"— $f'(x_{max}) = 0$ —"—

$x_{min}, x_{max} \in \{a,b\}$: Dann $f(x_{min}) = f(x_{max}) = f(a) = f(b)$

Also ist f konstant, d.h. $f'(x) = 0$ für alle x

Nehme $x_0 = \frac{a+b}{2}$; $f'(x_0) = 0$.

$\square$

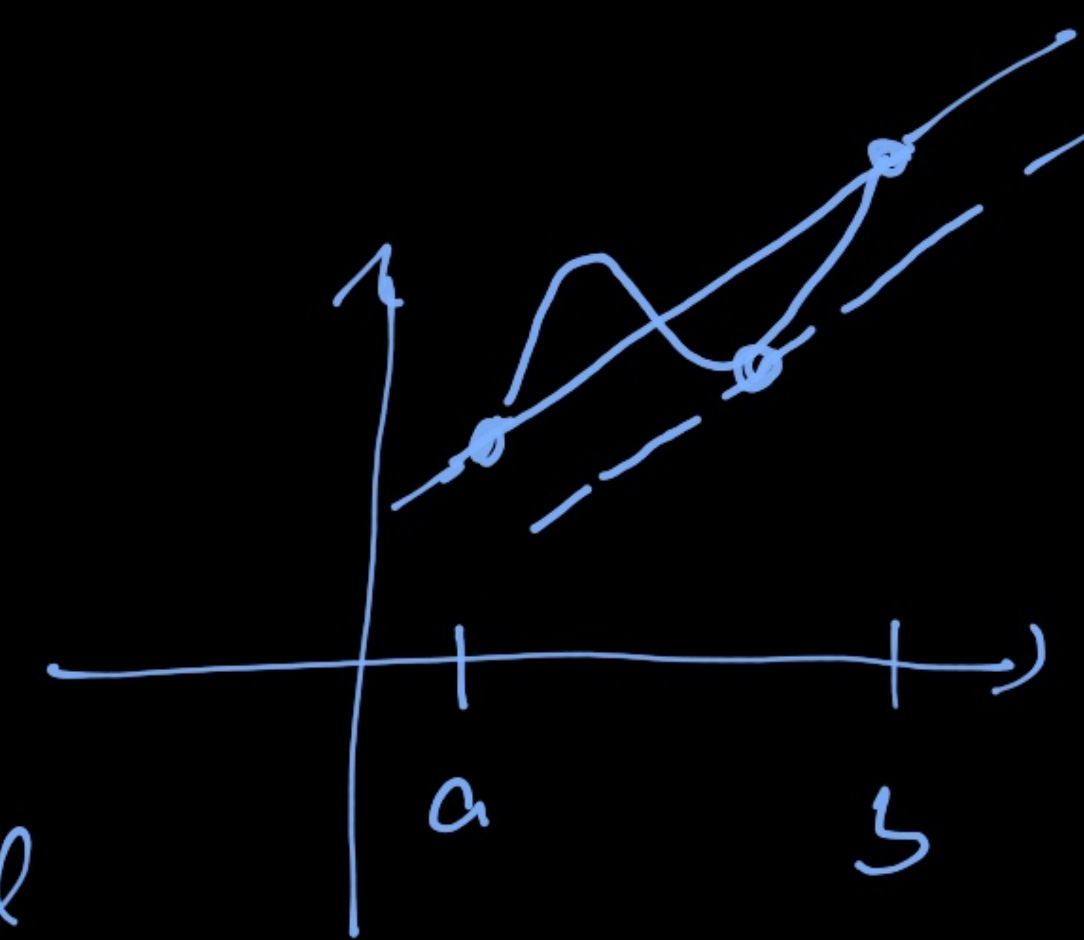
2.18 MWS-D – der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Vorgelegt ist eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Voraussetzungen
- f ist auf $[a,b]$ stetig
- f ist auf (a,b) differenzierbar

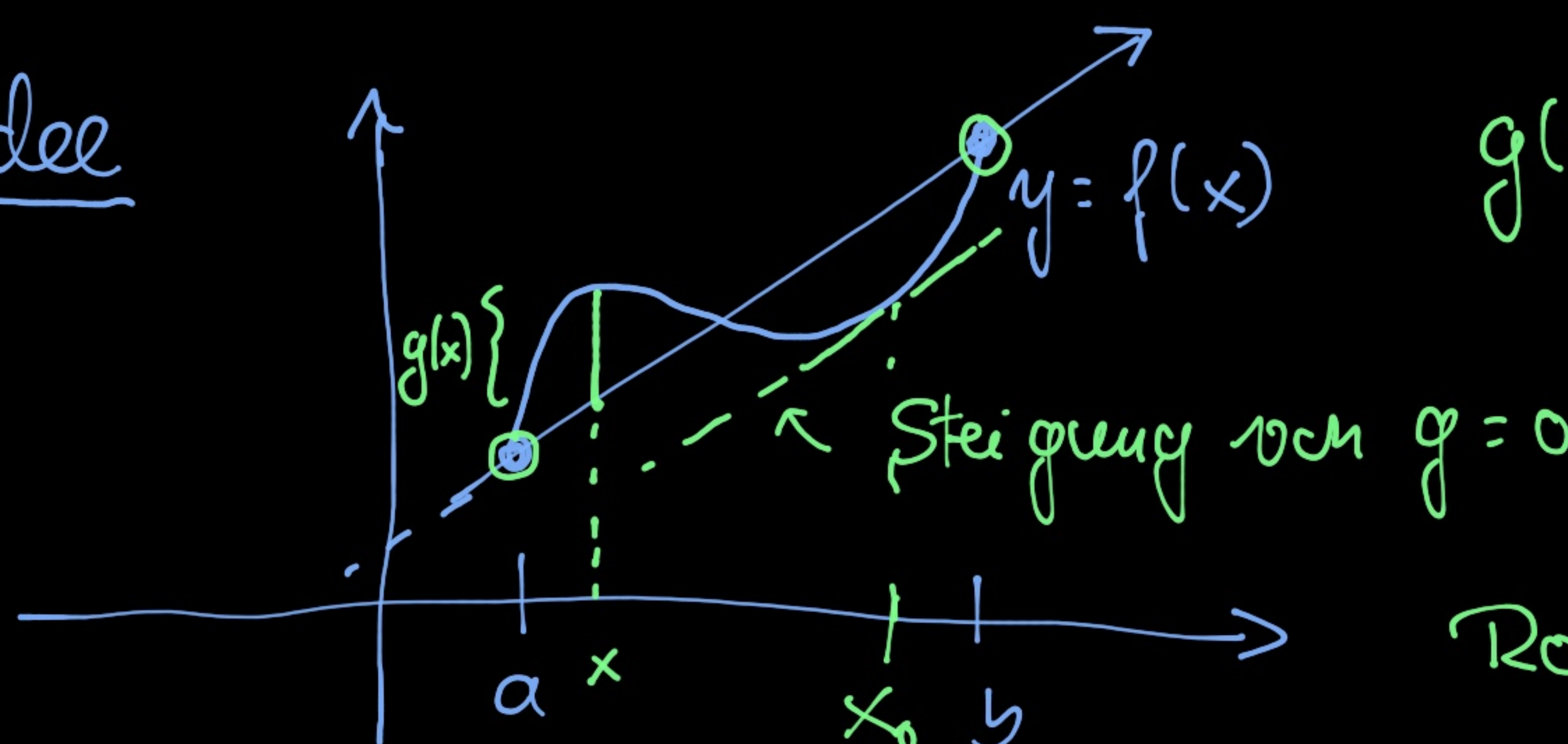
Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Tangente in x_0 und Sekante sind parallel

Beweisidee



$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) + f(a)\right]$$

stetig auf $[a,b]$, diff'bar auf (a,b). $g(a) = 0 = g(b)$.

Rolle: $g'(x_0) = 0$ für passendes x_0

$\Leftrightarrow f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\blacksquare$

2.19 Satz (Anwendung des MWS-D)

Vorgelegt ist ein Intervall I und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) f ist genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$.

(b)(i) f ist genau dann monoton wachsen, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

(ii) f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

(c) (i) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend.

(ii) Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton fallend.

⚠ $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend,
aber: $f'(0) = 0$ (also nur $f'(x) \geq 0$ erfüllt)

Anwendung: $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ differenzierbar auf $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \sin' x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x > 0$$

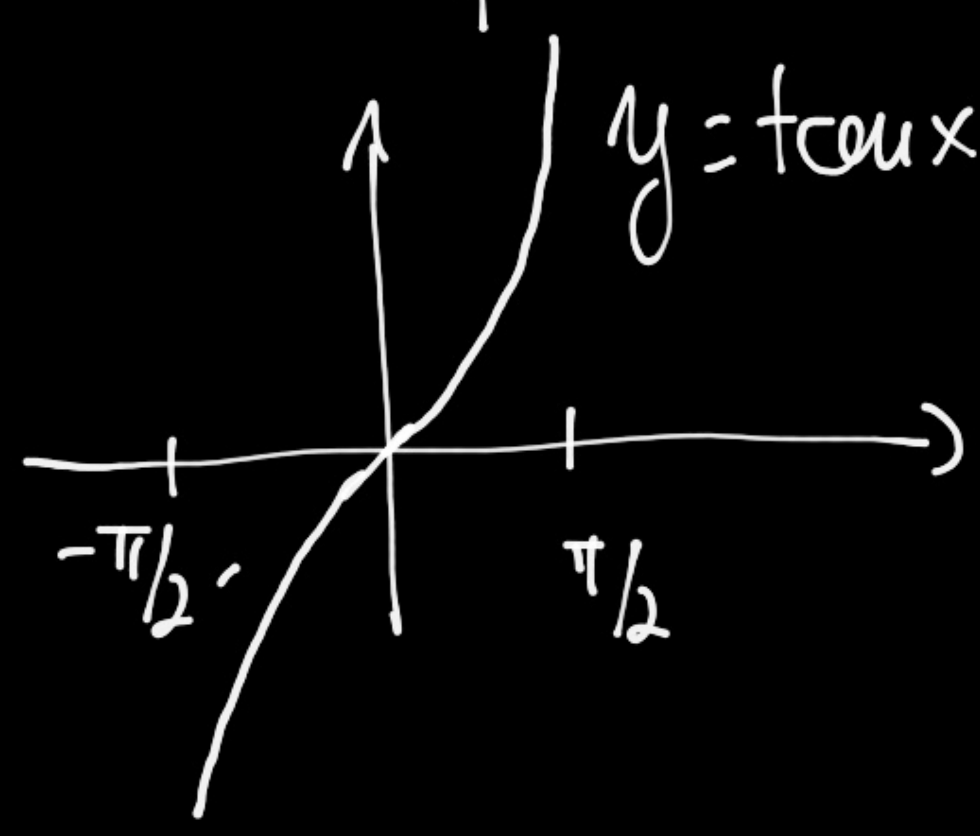
Folglich: $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend

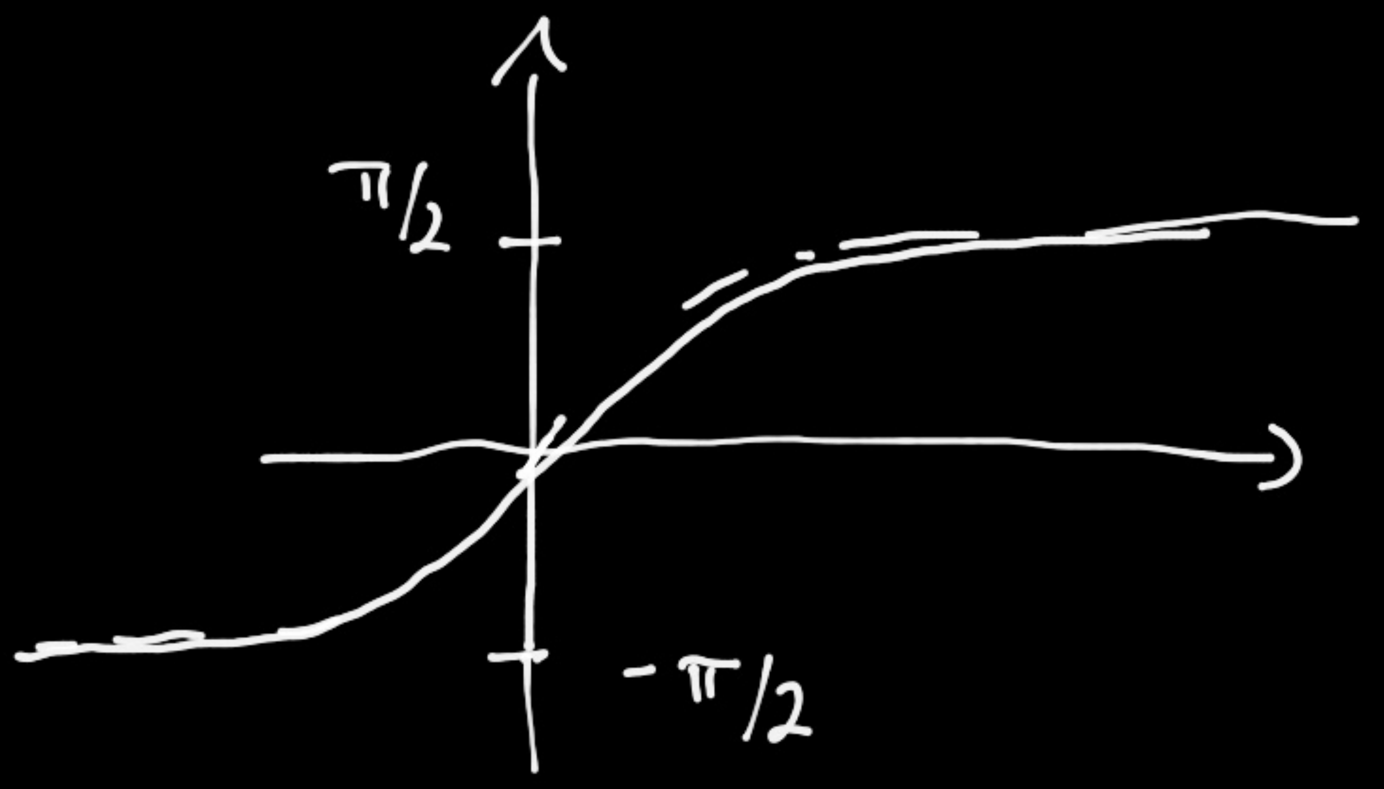
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ (x < \pi/2)}} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty \; ; \; \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$$

ZWS: $\{ f(x) \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \}$ ist ein Intervall, nämlich $\mathbb{R}$

f ist umkehrbar mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$





Beweisskizze von (2.19):

(a) Ist f konstant, so gilt $f'(x) = 0$ f. alle x.

Gelte $f'(x) = 0$ für alle x.

Sind $a, b \in I$, $a < b$, so gibt es nach dem MWS-D
ein $x_0 \in (a,b) \subseteq I$ mit $0 \underset{\text{Vor.}}{=} f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, also $f(a) = f(b)$.

(b) f monoton wachsend bedeutet: alle Sekantensteigungen sind ≥ 0,

also auch alle Tangentensteigungen $f'(x) \geq 0$

Umgekehrt: $f'(x) \geq 0$ gilt für alle x

Sind $a, b \in I$, $a < b$, so gibt es $x_0 \in (a,b) \subseteq I$
mit $0 \leq f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{\underbrace{b-a}_{>0}}$. Folgt: $f(a) \leq f(b)$

(c) Genauso wie 2. Teil von (b): $f'(x) > 0$ f alle x

.... $0 < f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Folgt $f(a) < f(b)$

Hausaufgabe 06 A :

Vorgelegt ist ein Intervall I sowie eine auf I differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Zeige :

(a) Ist f monoton fallend, so gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

(b) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton fallend

(c) Ist $I = [a, b]$ und gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf I streng monoton fallend.

2.20 Erkennen von lokalen Extrema

Situation: $a < x_0 < b$

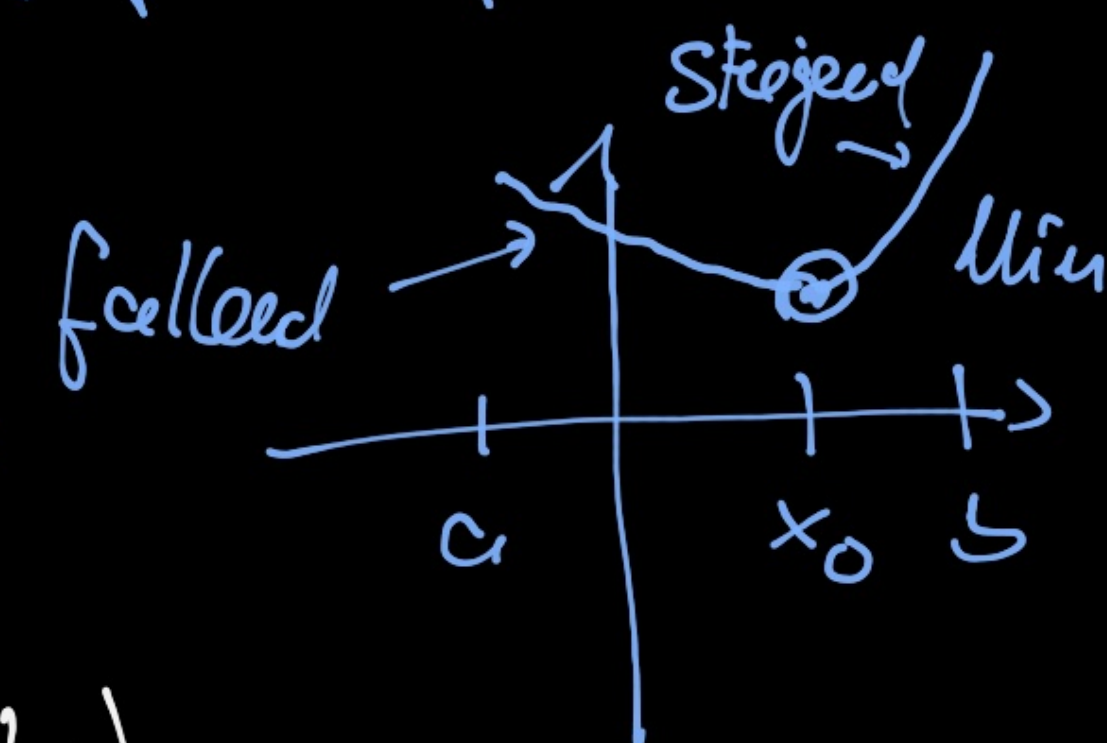
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$

d.h. x_0 ist ein Kandidat für ein lokales Extremum.

(a) Gilt $f'(x) \geq 0$ für $x \in (a, x_0]$
und $f'(x) \leq 0$ für $x \in [x_0, b)$,
so ist $f(x_0)$ der größte Wert
von f auf dem Intervall (a, b)

f mon. wachsend auf $(a, x_0]$,
also $f(x) \leq f(x_0)$ für
$a < x \leq x_0$

$f(x) \leq f(x_0)$ für $x_0 \leq x < b$



(b) Gilt $f'(x) \leq 0$ für $x \in (a, x_0]$
und $f'(x) \geq 0$ für $x \in [x_0, b)$,
so ist $f(x_0)$ der kleinste Wert von f auf (a, b)

Anwenden:

Suche lokale Extrema der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$.

Kandidat $x_0 \in D_f$ mit $f'(x_0) = 0$ schon gefunden.

(x_0 mit $f'(x_0) = 0$: kritischer Punkt von f)

Sprechweise: f' hat in $x = x_0$ einen Nulldurchgang von + nach −, falls es ein $r > 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D_f$
- $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0 - r; x_0)$
- $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0, x_0 - r)$

Dann ist x_0 ein lokales Maximum.

Analog: Besitzt f' in x_0 einen Nulldurchgang von − nach +, so ist x_0 ein lokales Minimum.

Beispiel: Gesucht sind die lokalen Extrema von

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-3}$$

Def. bereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Ableitung: $f'(x) = \dfrac{(x-3)\cdot(2x+1) - (x^2+x+1)}{(x-3)^2}$ Quotientenregel

$$= \frac{2x^2-6x+x-3-x^2-x-1}{(x-3)^2}$$

nicht ausmultiplizieren

$$= \frac{x^2-6x-4}{(x-3)^2}$$

Nullstellen: $x^2-6x-4 = 0$ für $x = 3 \pm \sqrt{13}$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\substack{>0 \\ (x\neq 3)}} \underbrace{\left(x-(3-\sqrt{13})\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x<3-\sqrt{13} \\ >0 \text{ für } x>3-\sqrt{13}}} \cdot \underbrace{\left(x-(3+\sqrt{13})\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x<3+\sqrt{13} \\ >0 \text{ für } x>3+\sqrt{13}}}$$

Beispiel: Gesucht sind die lokalen Extrema von

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-3}$$

Nullstellen von f': $x = 3 \pm \sqrt{13}$

trägt zum Vorzeichen von f' nichts bei

Ableitung:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\substack{>0 \\ (x \neq 3)}} \underbrace{\left(x-(3-\sqrt{13})\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x<3-\sqrt{13} \\ >0 \text{ für } x>3-\sqrt{13}}} \cdot \underbrace{\left(x-(3+\sqrt{13})\right)}_{\substack{<0 \text{ für } x<3+\sqrt{13} \\ >0 \text{ für } x>3+\sqrt{13}}}$$

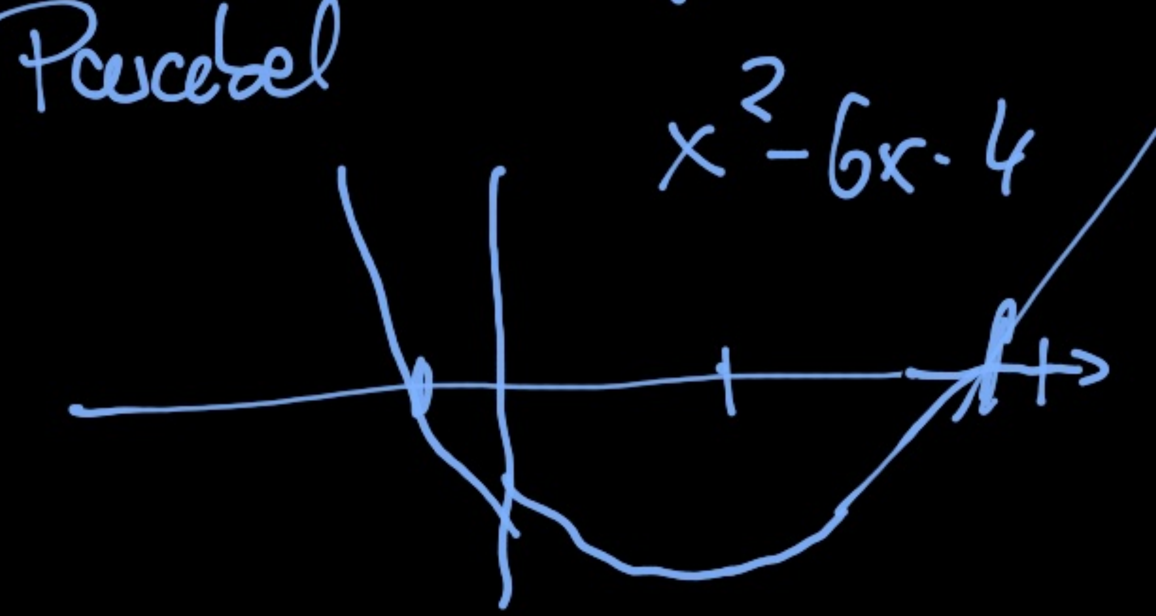
x	$-\infty$		$3-\sqrt{13}$		3		$3+\sqrt{13}$		∞
$f'(x)$		$+$	$\uparrow$	$-$		$-$	$\uparrow$	$+$	

Nulldurchgang $+ \to -$: lokales Maximum

Nulldurchgang $- \to +$: lokales Minimum

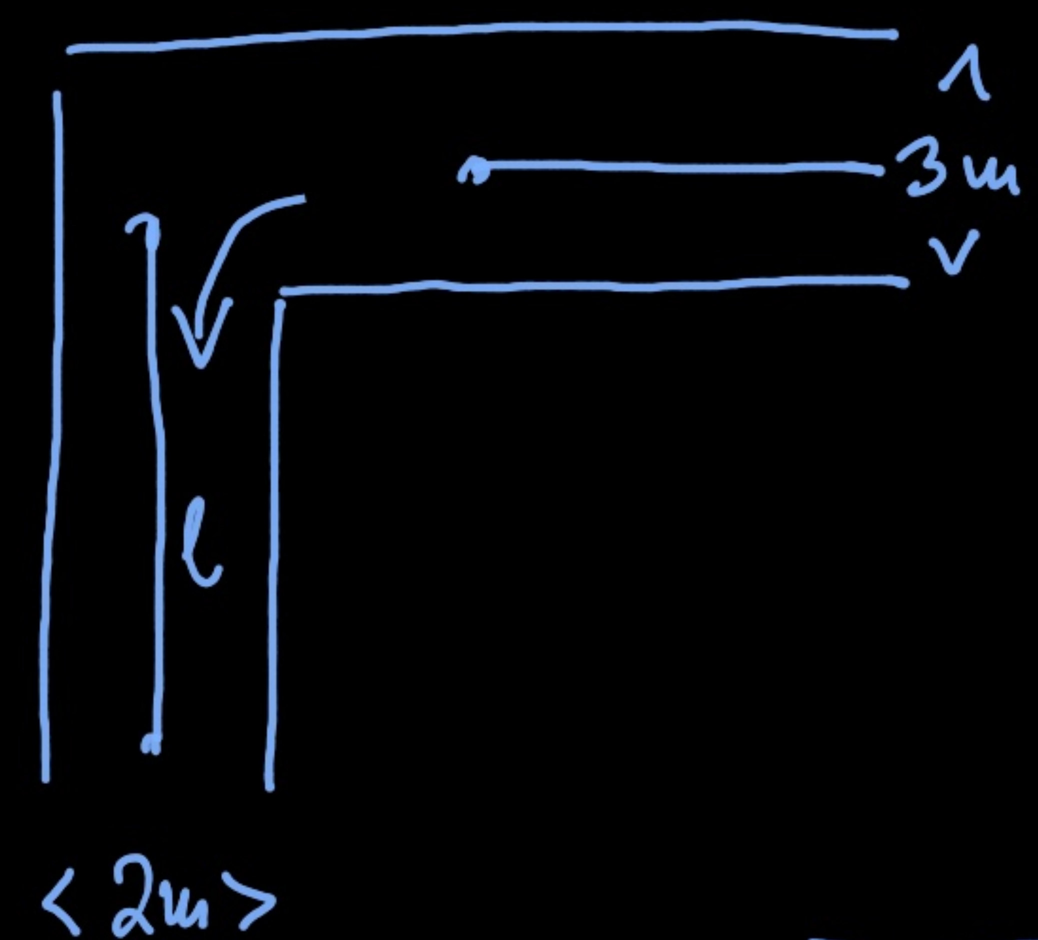
$$f'(x) = \frac{x^2-6x-4}{(x-3)^2}$$

x^2-6x-4 nach oben geöffnete Parabel



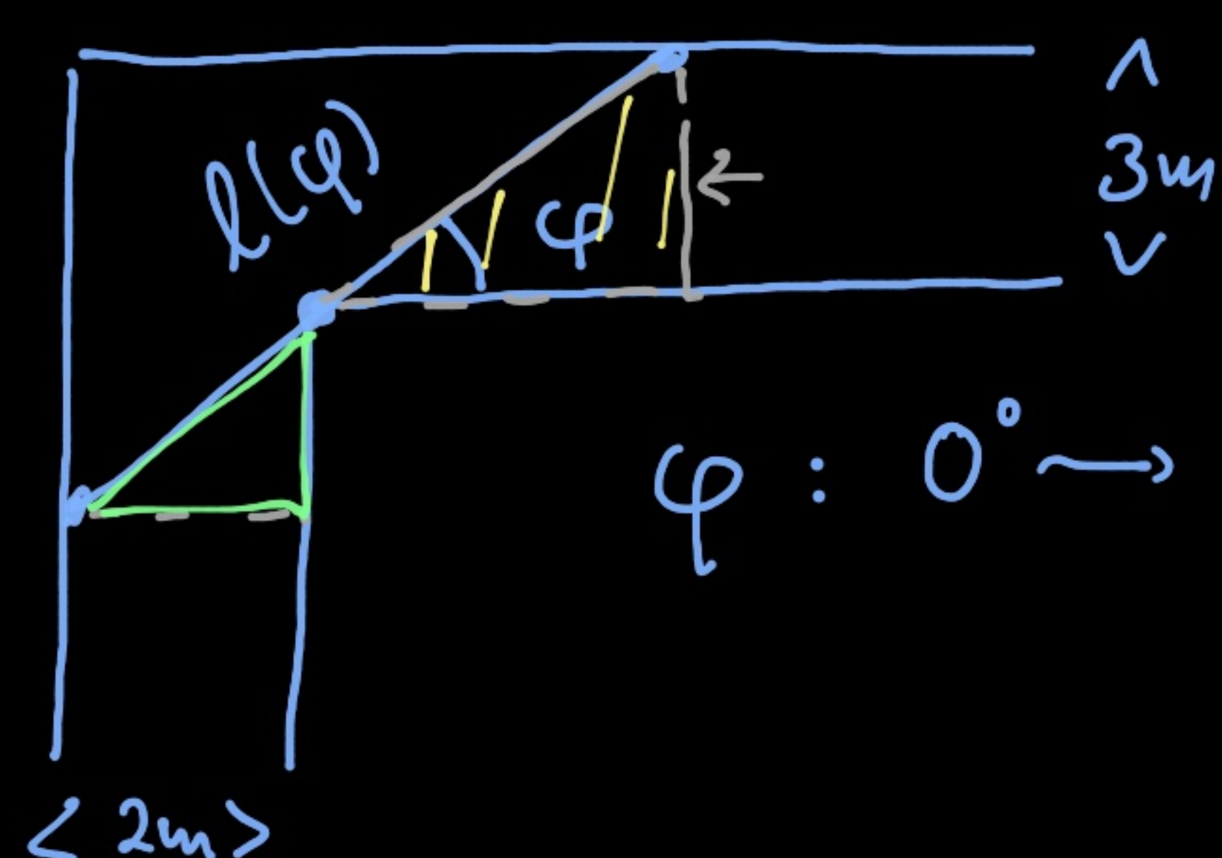
§2 / S. 67

Aufgabe

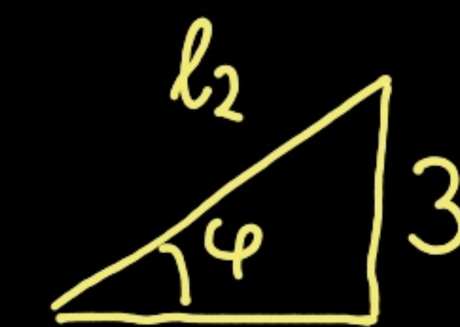


Möchte eine lange Eisenstange über den Flur transportieren (2D; 3D wirds schlimmer)

Wie lang kann die Stange sein?

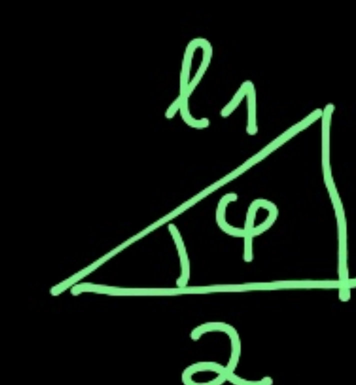


$\varphi : 0^\circ \longrightarrow 90^\circ$



$$\frac{3}{\ell_2} = \sin\varphi$$

also $\ell_2 = \dfrac{3}{\sin\varphi}$



$$\frac{2}{\ell_1} = \cos\varphi$$

bzw. $\ell_1 = \dfrac{2}{\cos\varphi}$

Insgesamt: $\ell(\varphi) = \dfrac{2}{\cos\varphi} + \dfrac{3}{\sin\varphi}$

Gesucht: Minimale $\ell(\varphi)$ für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (Bogenmaß!)

Gesucht: Kleinster Funktionswert von

$$\ell(\varphi) = \frac{2}{\cos\varphi} + \frac{3}{\sin\varphi} \quad \text{für} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\ell'(\varphi) = \frac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{3\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \overset{!}{=} 0 \qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

falls $2\sin^3\varphi = 3\cos^3\varphi$

bzw. $\dfrac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi} = \dfrac{3}{2}$ bzw. $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt[3]{3/2}$

bzw. $\varphi = \varphi_0 = \arctan\sqrt[3]{3/2}$ einziger kritischer Punkt

Also ist φ_0 das globale Minimum von $\ell(\varphi)$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$,

d.h. $\ell = \ell(\varphi_0) = \underbrace{\dfrac{2}{\cos\sqrt[3]{3/2}} + \dfrac{3}{\sin\sqrt[3]{3/2}}}_{\longrightarrow\ \text{Taschenrechner}}$ längste Stange, die man transportieren.

Hausaufgabe 06B:

Gesucht sind die lokalen und globalen Extrema von

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}; \quad -1 \leq x \leq 1$$

(a) Wieso besitzt f globale Extrema?

(b) Warum ist 0 der kleinste Funktionswert? Wo wird er angenommen?

(c) Wieso besitzt die Funktion $g: (0,\infty) \to (0,\infty)$, $g(x) = x^2$ eine Umkehrfunktion? Wenn diese w lautet ($w(x) = \sqrt{x}$), wie lautet dann die Ableitung $w'(x)$?

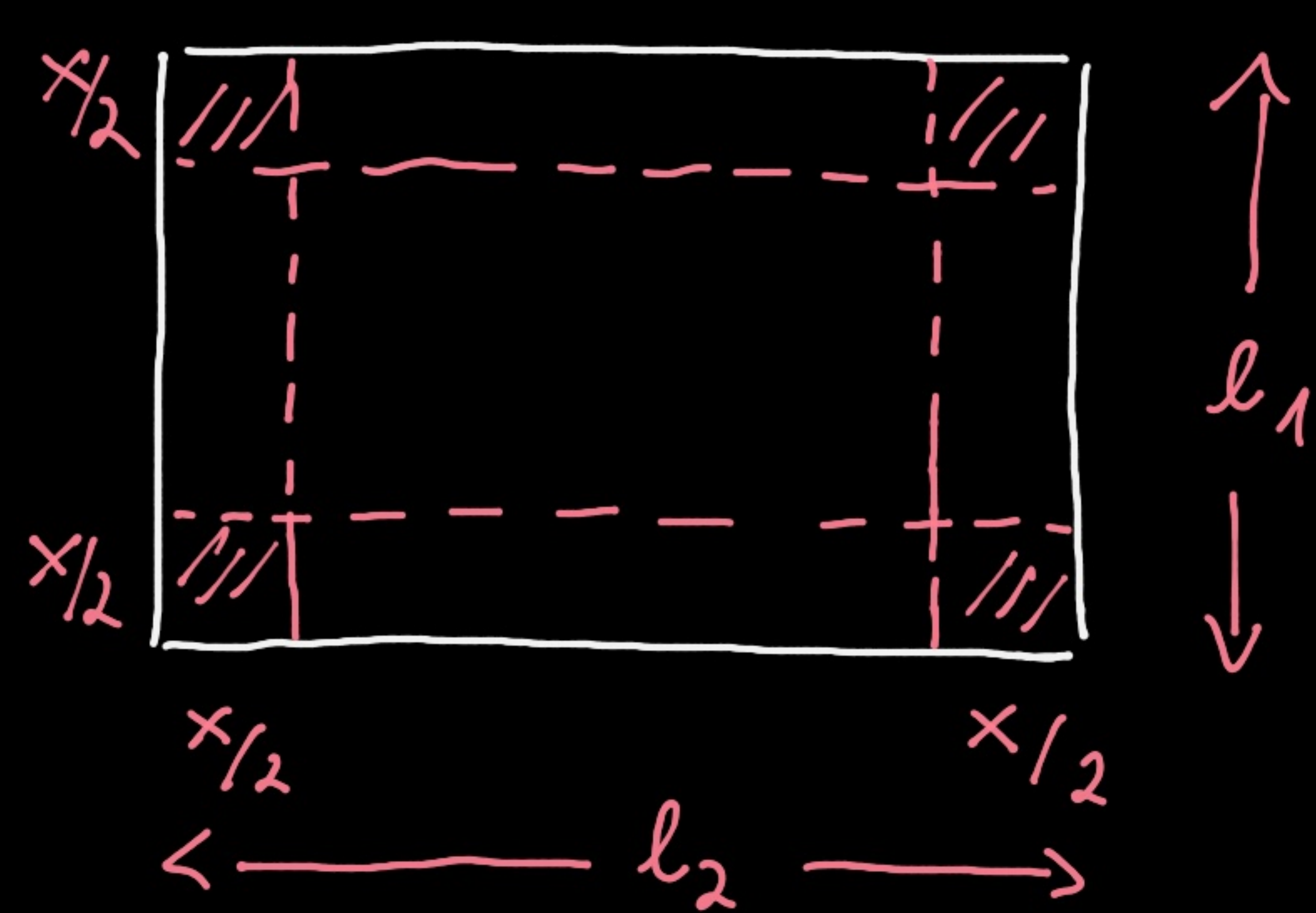
(d) Berechne $f'(x)$ und finde die kritischen Punkte von f.

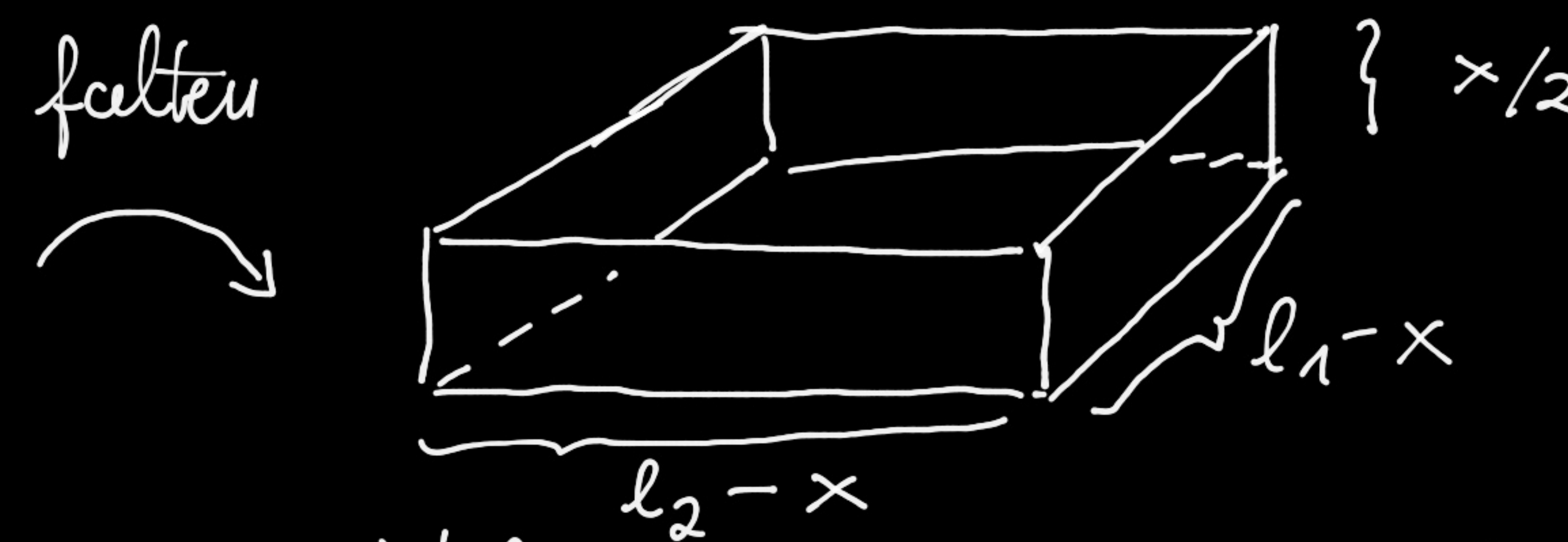
(e) Welche lokalen Maxima / Minima besitzt f?

(f) Bestimme den größten Funktionswert $f(x)$.

Übungen:

1



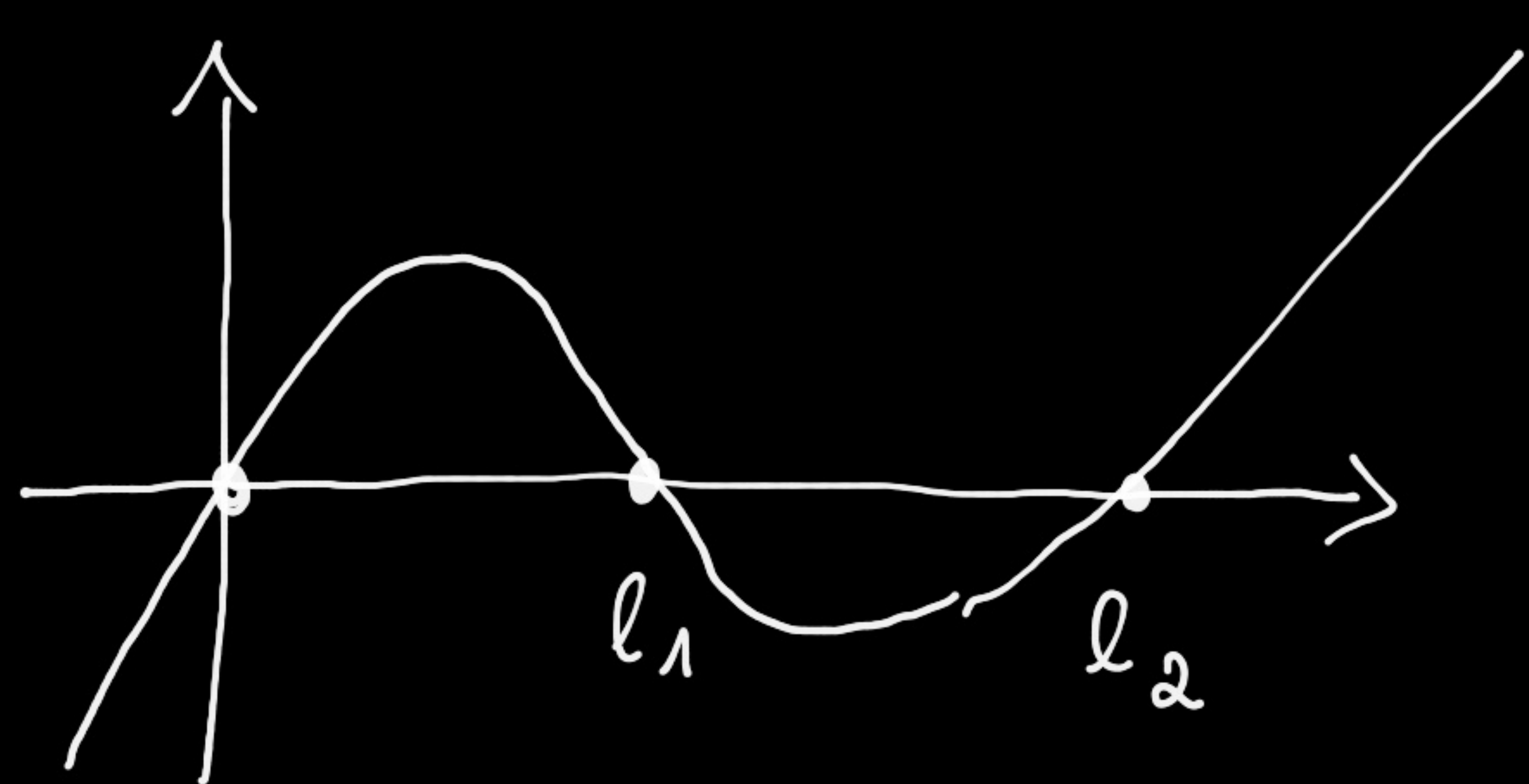


Volumen soll maximal sein.
Welches x soll man nehmen?

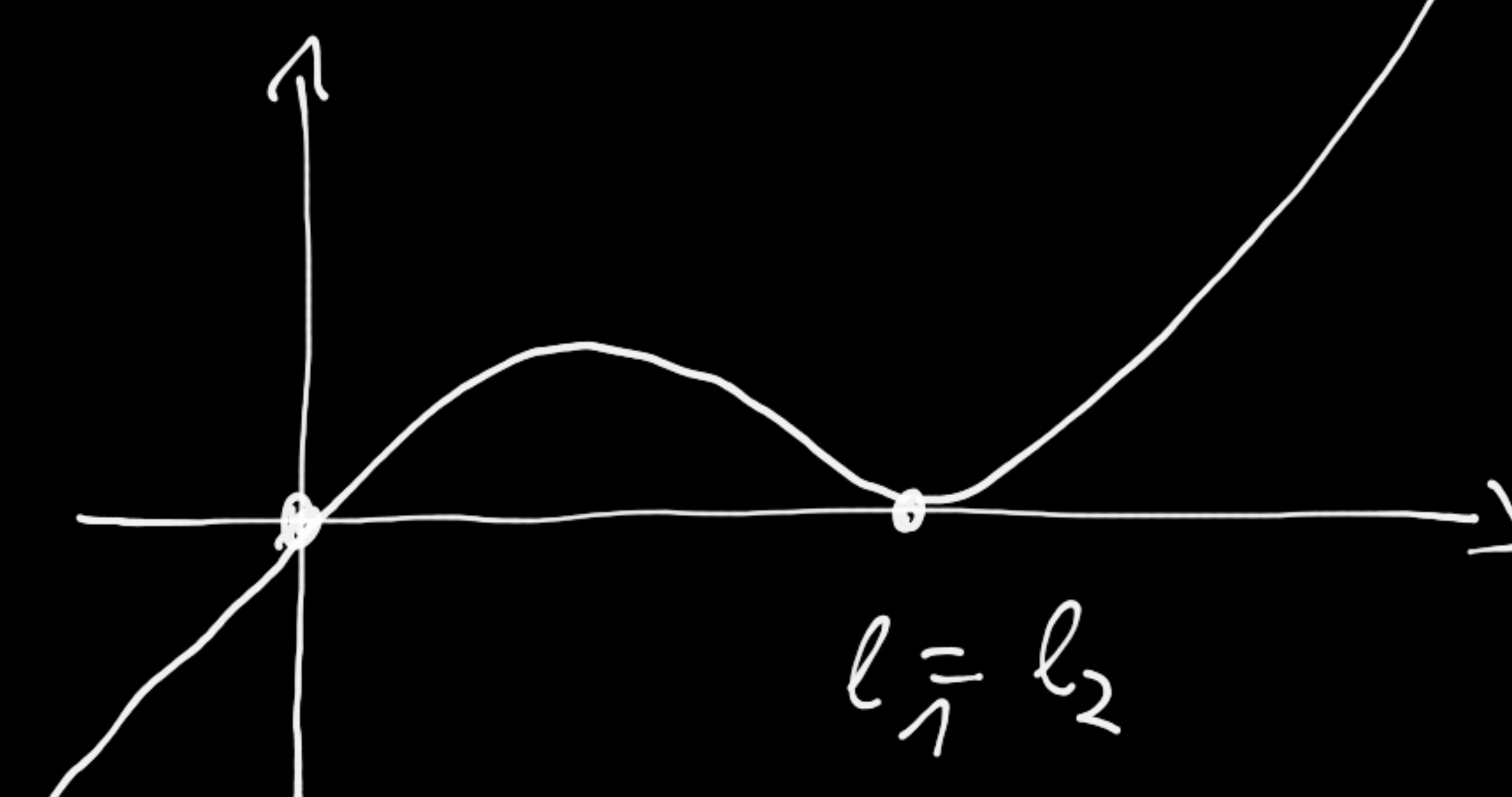
l_1, l_2 vorgegeben
$l_1 \le l_2$

$$f(x) = 2 \cdot \mathrm{Vol} = 2(l_1 - x) \cdot (l_2 - x) \frac{x}{2} = (l_1 - x) \cdot (l_2 - x) \cdot x$$

$$= x^3 - (l_1 + l_2)x^2 + l_1 l_2 x, \quad 0 \le x \le l_2$$



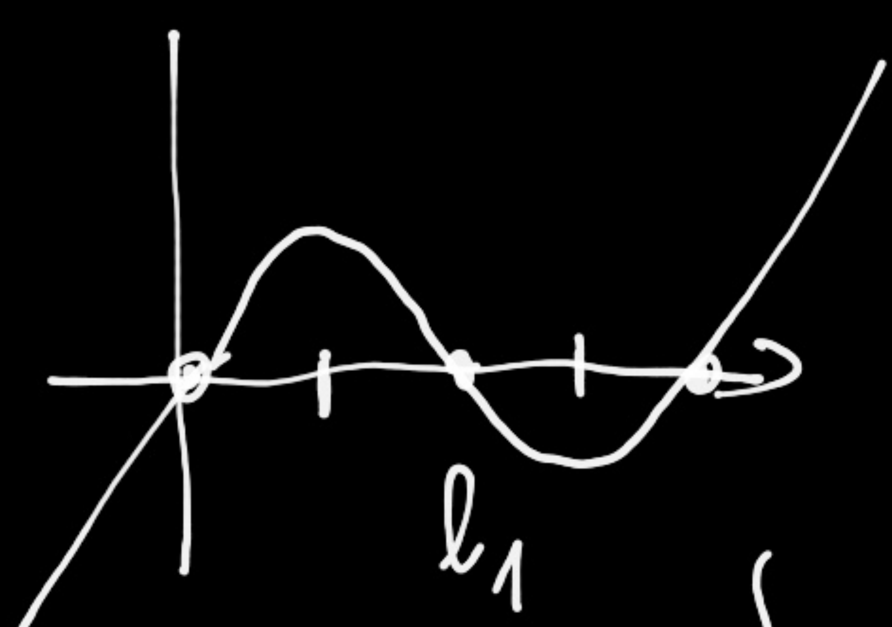
oder $l_1 = l_2$



$$f(x) = (x-l_1)\cdot(x-l_2)\cdot x$$
$$= x^3 - (l_1+l_2)\cdot x^2 + l_1 l_2 x, \qquad 0 \le x \le l_1 \le l_2$$

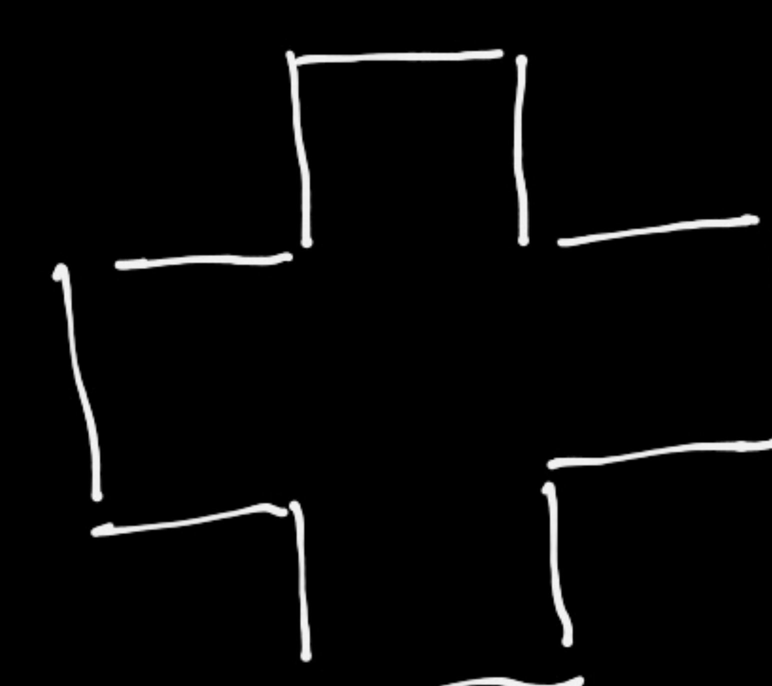
Gesucht ist das Maximum:

$$f'(x) = 3x^2 - 2(l_1+l_2)x + l_1 l_2 = 0 \qquad \Big| :3$$
$$x^2 - \frac{2}{3}(l_1+l_2)\cdot x + \frac{1}{3}\cdot l_1 l_2 = 0$$
$$x = \frac{1}{3}(l_1+l_2) \pm \sqrt{\frac{1}{9}(l_1+l_2)^2 - \frac{3}{9}\cdot l_1 l_2}$$
$$= \frac{1}{3}(l_1+l_2) \pm \frac{1}{3}\sqrt{(l_1+l_2)^2 - 3\, l_1 l_2}$$



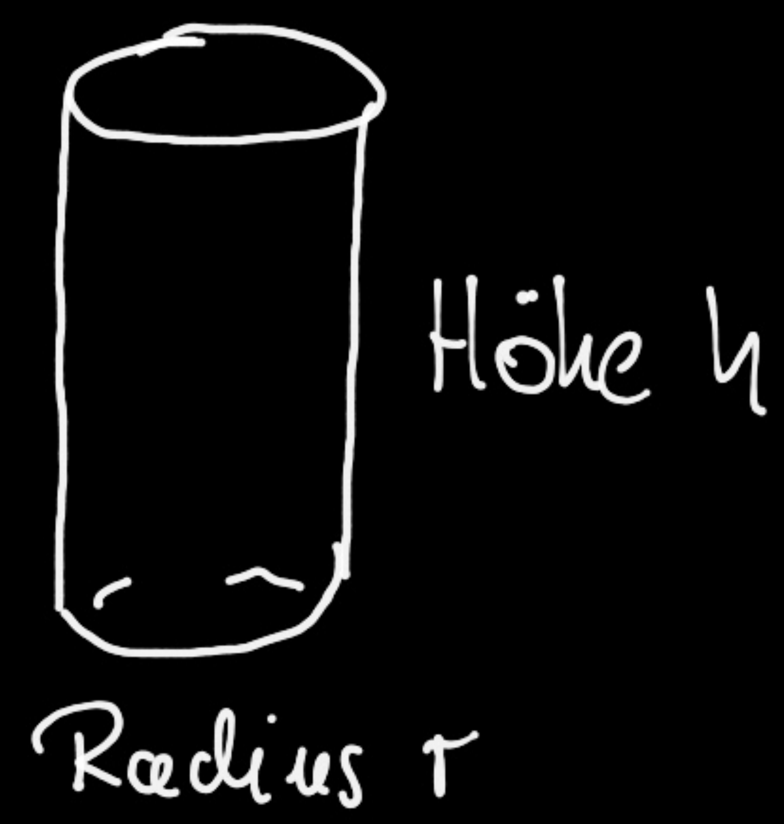
$$\longrightarrow \quad x = \frac{1}{3}(l_1+l_2) - \frac{1}{3}\sqrt{(l_1+l_2)^2 - 3 l_1 l_2}$$

Spezialfall $l_1 = l_2 = l \leadsto x = \frac{1}{3}\, l$



Volumen $\frac{l^3}{54}$ ist maximal

$\leadsto$  Würfel

② 

Volumen soll 330 ml = 330 cm^3 sein.
Bestimme r, h so, dass die Oberfläche des Zylinders minimal ist.

Volumen : $\pi r^2 h \quad = 330\ cm^3 = V$ (r, h in cm)

Oberfläche : $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \overset{!}{=}$ minimal

$V = \pi r^2 h \rightsquigarrow \pi r h = V/r$ und $h = V/(\pi r^2)$

$A = A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \longrightarrow$ min ! $A(r) \longrightarrow \infty$ für $r \to \infty$ und $r \to 0+$

$0 = A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$ bzw. $r^3 = \frac{2V}{4\pi} = \frac{V}{2\pi}$

Also : $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ einzige Chance für Minimum

ALSO IST ES DAS MINIMUM $\overset{!}{}$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3 \cdot \left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2 \cdot r$$

Für $V = 330\,ml$ ergibt sich

$$2r = h \approx 7{,}5\,cm$$

Tatsächlich: $2r = 6{,}61\,cm$, $h = 11{,}5\,cm$

$$\text{"Volumen"} = \frac{1}{4}\pi \cdot 6{,}61^2 \cdot 11{,}5 \approx 395\,ml$$

Europaletten: $120\,cm \times 80\,cm$

Tray: 6×4 Dosen
Lage: 3×3 Trays
passt mit $2r = 6{,}61\,cm$ genau

Palette: 11 Lagen

Gewicht 891 kg

40-Tonner: 25 t Zuladung, $p \leq 34$ Europaletten

p Paletten je a Lagen; Gewicht eine Lage: 81 kg

$p \cdot a \cdot 81\,kg \leq 25\,000$ und $a \cdot 81\,kg \leq 1000\,kg$

$\rightsquigarrow$ $p \cdot a \leq 308{,}\dots$, $a \leq 12{,}\dots$; $308 = 4 \cdot 7 \cdot 11$

$a = 11$, $p = 4 \cdot 7 = 28$ $\rightsquigarrow$ passt alles

③ Sinus und Kosinus

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{und} \quad (\cos x)' = \sin$$

$$((\sin x)')' = (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$$

Umgestellt: $(\sin x)'' + \sin x = 0$

Analog $(\cos x)'' + \cos x = 0$

Also: $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ lösen

$$f''(x) + f(x) = 0$$

"Schwingungs-Differentialgleichung"

$$f(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } f = \sin \\ 1 & \text{für } f = \cos \end{cases}$$

$$f'(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } f = \sin \\ 0 & \text{für } f = \cos \end{cases}$$

Satz Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren 2. Ableitung $f'' = (f')'$ existiert, und gilt $f''(x) + f(x) = 0$ für alle x, so gilt

$$f(x) = f(0) \cdot \cos x + f'(0) \cdot \sin x$$

für alle x.

Also: $f(x) = s \cdot \cos x + v \cdot \sin x$ ist die einzige Lösung von $\boxed{f''(x) + f(x) = 0}$ (*) mit $f(0) = s$, $f'(0) = v$.

Beweis: $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$

$$g'(x) = 2 f(x) f'(x) + 2 f'(x) f''(x) = 2 f'(x) \cdot [f(x) + f''(x)] = 0$$

da f die Gleichung * erfüllt

$g'(x) = 0$ für alle x, $\mathbb{R}$ ist ein Intervall

Folglich ist $g(x)$ konstant.

$$h(x) = f(x) - f(0)\cdot \cos x - f'(0)\cdot \sin x$$
$$h(0) = f(0) - f(0) = 0$$
$$h'(x) = f'(x) + f(0)\cdot \sin x - f'(0)\cdot \cos x$$
$$h'(0) = 0$$
$$h''(x) = f''(x) + f(0)\cdot \cos x + f'(0)\cdot \sin x$$
$$= -[f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\cdot \sin x] = -h(x)$$

Also: h löst (*)

Folgt: $0 = \left[(h(x))^2 + (h'(x))^2\right]'$

bzw. $(h(x))^2 + (h'(x))^2$ ist konstant

d.h. $(h(x))^2 + (h'(x))^2 \underset{\text{für alle } x}{=} (h(0))^2 + (h'(0))^2 = 0$

Folgt $0 \underset{\text{für alle } x}{=} h(x) = f(x) - f(0)\cdot \cos x - f'(0)\cdot \sin x$

Umstellen $f(x) = f(0)\cos x + f'(0)\sin x$ ∎

④ Die Additionstheoreme

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y\end{aligned}}$$

Betrachte $f(x) = \cos(x+y)$ (y konstant)

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} -\sin(x+y) \cdot \underbrace{(x+y)'}_{=1}$$

$$f''(x) = -\cos(x+y) = -f(x)$$

Folgt: $f(x) = \cos(x+y)$ erfüllt ⊛

Demnach $f(x) = f(0) \cdot \cos x + f'(0) \cdot \sin x$

$$= \cos y \cdot \cos x - \sin y \cdot \sin x$$

(2. Gleichung geht ähnlich ...)

§2/ S. 78

(5) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 + (\tan x)^2 > 0$

Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
ist differenzierbar

$x = \tan(\arctan x)$ nach Kettenregel differenzieren:

$$1 = \tan'(\arctan x) \cdot (\arctan x)'$$
$$= (1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot (\arctan x)'$$
$$= (1 + x^2) \cdot (\arctan x)'$$

Folgt: $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Differenziere mit der Kettenregel: $\left(\arctan \frac{1}{x}\right)'$

$$\left(\arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2+1} = -(\arctan x)'$$

§2 / S.79

Folgt: $\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)' = 0$ für $x \neq 0$

d.h. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = c_1$ für $x > 0$

$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = c_2$ für $x < 0$

$x = 1$: $c_1 = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = 2 \cdot \arctan 1$

$\arctan 1 = ?$, $\tan(?) = 1$

$= \frac{\sin(?)}{\cos(?)} \rightsquigarrow \sin(?) = \cos(?)$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1 \rightsquigarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Folgt: $c_1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ für alle } x > 0}$

und analog: $\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \text{ für } x < 0}$

§3 / S. 80

Wieso gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle x?

Wieso folgt hieraus:

Sind u, v Zahlen mit $u^2 + v^2 = 1$,
so gibt es ein x mit $u = \cos x$, $v = \sin x$?

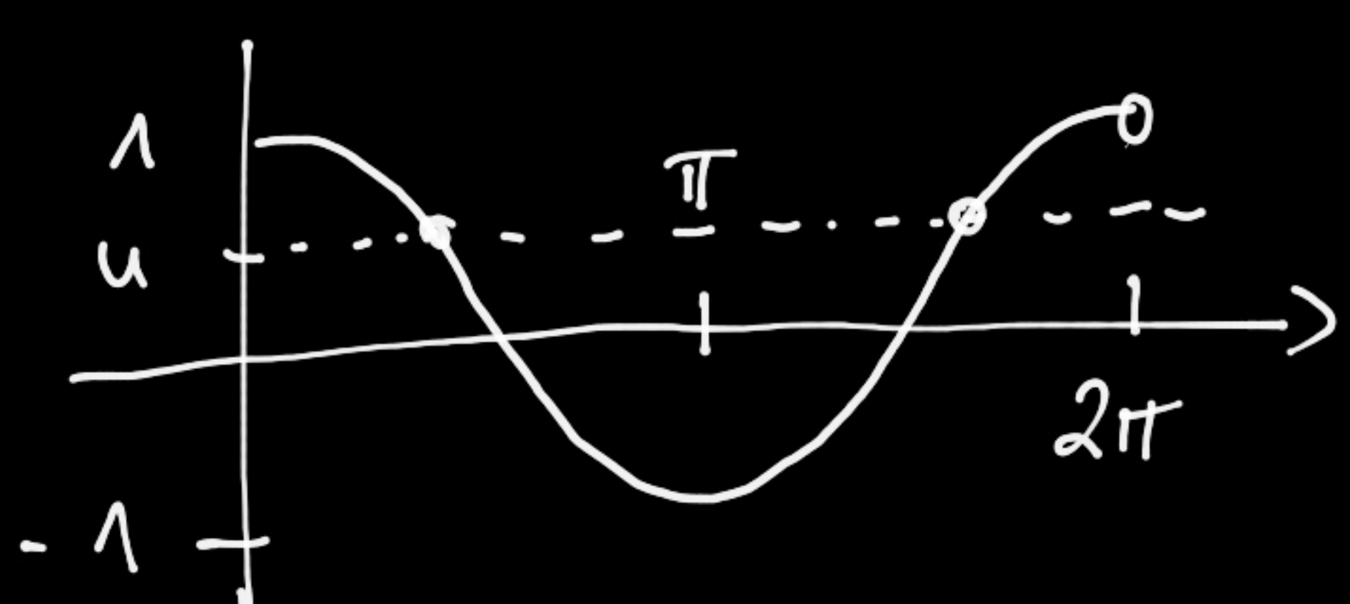
Lösung: $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$f'(x) = 2 \cos x \sin x - 2 \cos x \sin x = 0$

d.h. $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1$ f. alle x.

$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ für $0 \le x \le \pi$

$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$ für $\pi \le x \le 2\pi$



$u = \cos x = \cos(2\pi - x)$

$v = \pm \sqrt{1 - u^2} =$

"+": nimm x, "−": nimm $2\pi - x$

$u^2 + v^2 = 1$, speziell: $-1 \le u \le 1 \rightsquigarrow$ exist $\arccos u = x$

Hausaufgabe 06C:

(a) Zeige: Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x) = f(x)$ für alle x, so gilt

$$f(x) = f(0) \cdot e^x \quad \text{für alle } x.$$

Anleitung: Differenziere die Funktion $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$

(b) Zeige: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

Wir wissen von e^x nur, dass $e^0 = 1$ und $(e^x)' = e^x$ ist.