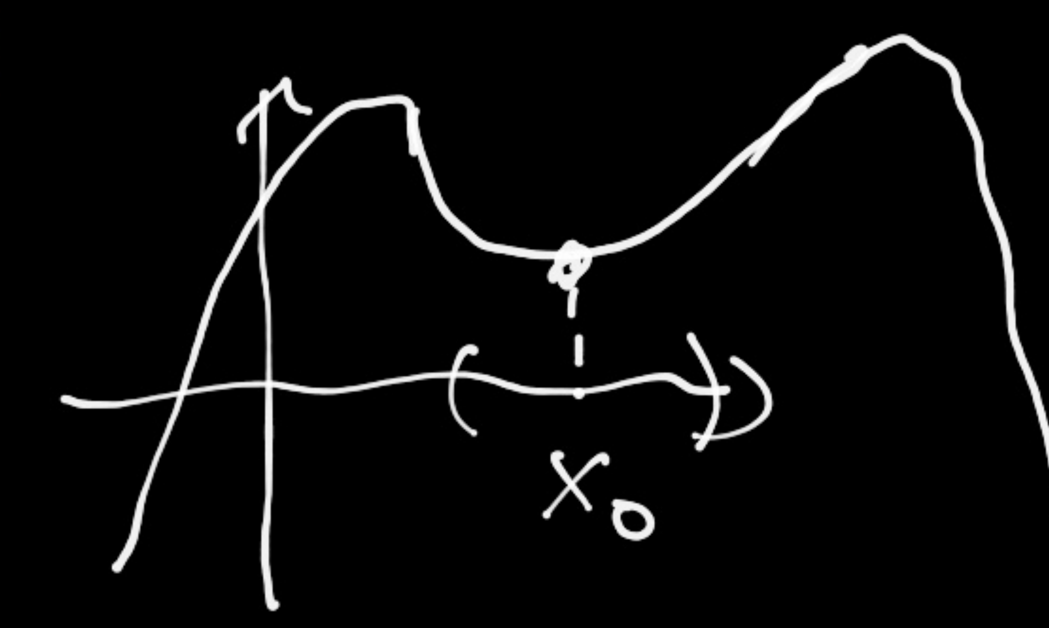
§21 / S. 82

2.21 Einige Sprachregelungen:

$f: D \to \mathbb{R}$ Funktion

(a) x_0 striktes lokales Minimum von f, falls:

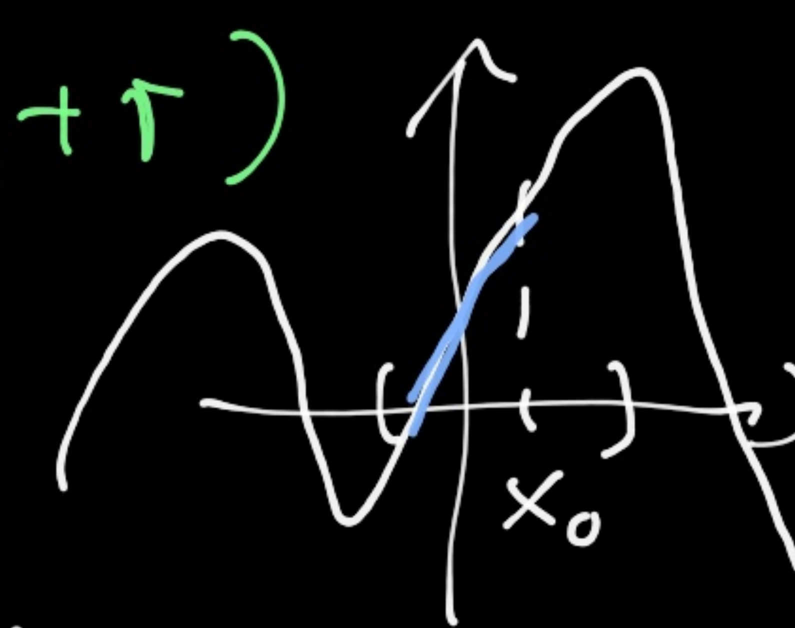
Es gibt $r > 0$ mit $f(x_0) < f(x)$ für alle $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$, $x \neq x_0$



Striktes lokales Maximum: genauso!

(b) f heißt in x_0 lokal streng monoton wachsend, falls:

Es gibt $r > 0$ für das f auf $D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ streng monoton wachsend ist.



In x_0 lokal streng monoton fallend: analog.

Übergeordnete Begriffe:

- striktes lokales Extremum (Max. oder Min.)
- lokal streng monoton (wachsend oder fallend)

2.22 Ein nützlicher Hilfssatz:

Vorgelegt ist ein offenes Intervall I sowie eine auf I differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, deren Ableitung in einem $x_0 \in I$ verschwindet ($f'(x_0)=0$).

(1.) Gilt $f'(x_0+h)\cdot h > 0$ für $0 < |h| < r$ (r passend), so ist x_0 ein striktes lokales Minimum von f.

Bem.: Die Voraussetzung ist erfüllt, falls

a) f' lokal streng monoton wachsend bei x_0

oder

b) $f''(x_0)$ existiert und $f''(x_0) > 0$

Denn: $f'(x_0+h) = \underbrace{f'(x_0)}_{=0} + \underbrace{\varphi(h)}_{>0}\cdot h$

(2.) Ist x_0 ein striktes lokales Minimum von f', so ist f lokal streng monoton wachsend.

(2.22 : Beweis)

(1.) Gilt $f'(x_0+h)\cdot h > 0$ für $0<|h|<r$ (r passend), so ist x_0 ein striktes lokales Minimum von f.

Voraussetzung bedeutet: $f'(x_0+h) \begin{cases} <0 & \text{f. } h<0 \\ >0 & \text{f. } h>0 \end{cases}$

Also: f ist auf $[x_0-r, x_0]$ streng fallend, also
$f(x) > f(x_0)$ für $x_0 - r < x < x_0$, analog:
$f(x) > f(x_0)$ für $x_0 < x < x_0 + r$ ✓

(2.) Ist x_0 ein striktes lokales Minimum von f', so ist f lokal streng monoton wachsend.

Folgt: $f'(x_0+h) > f'(x_0) \underset{\text{Vor.}}{=} 0$ für $0<|h|<r$

Liefert: f ist streng wachsend auf $[x_0-h, x_0]$
und auf $[x_0, x_0+h)$ ✓

2.23 Höhere Ableitungen

Vorgelegt ist eine Funktion $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ist f differenzierbar, so erhalte eine Funktion $f': D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ist f' ebenfalls differenzierbar, so erhalte weitere Funktion

$f'' := (f')': D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, die zweite Ableitung von f.

In diesem Fall nennt man f zweimal differenzierbar.

Und so weiter ...

Die n-te Ableitung schreibe $f^{(n)}: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, also

falls es $f^{(n)}$ gibt, so heißt f n-mal differenzierbar.

$$f^{(1)} = f'$$
$$f^{(2)} = f''$$
$$f^{(3)} = (f'')' = f'''$$
$$\vdots$$

2.24 Satz über das lokale Verhalten

Vorgelegt
- ein offenes Intervall I
- eine Stelle $x_0 \in I$
- eine $(n-1)$-mal diff'bare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$

Voraussetzungen:
- $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
- $f^{(n)}(x_0)$ existiert und ist von 0 verschieden

Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten

1.) n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$: x_0 ist striktes lokales Min.

2.) n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$: x_0 ist striktes lokales Max.

3.) n ungerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$: f lokal streng wachsend bei x_0.

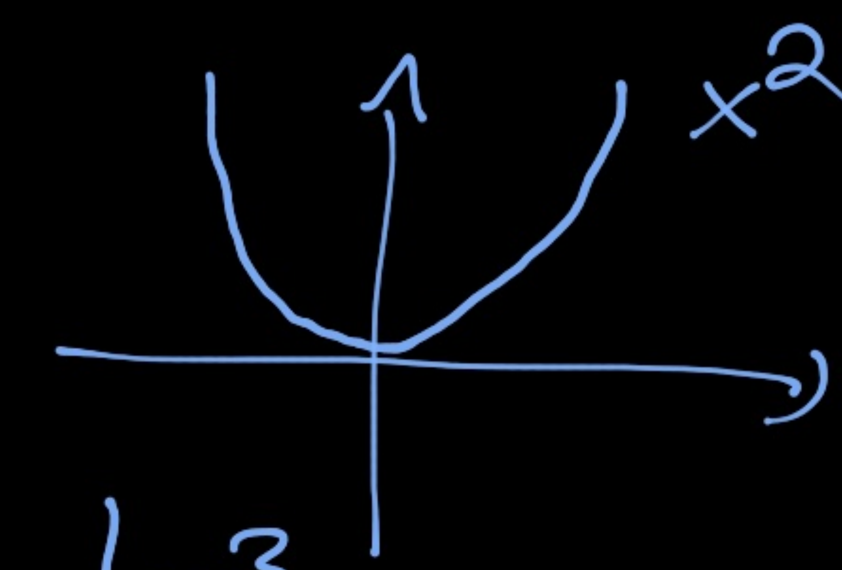
4.) n ungerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$: f lokal streng fallend bei x_0.

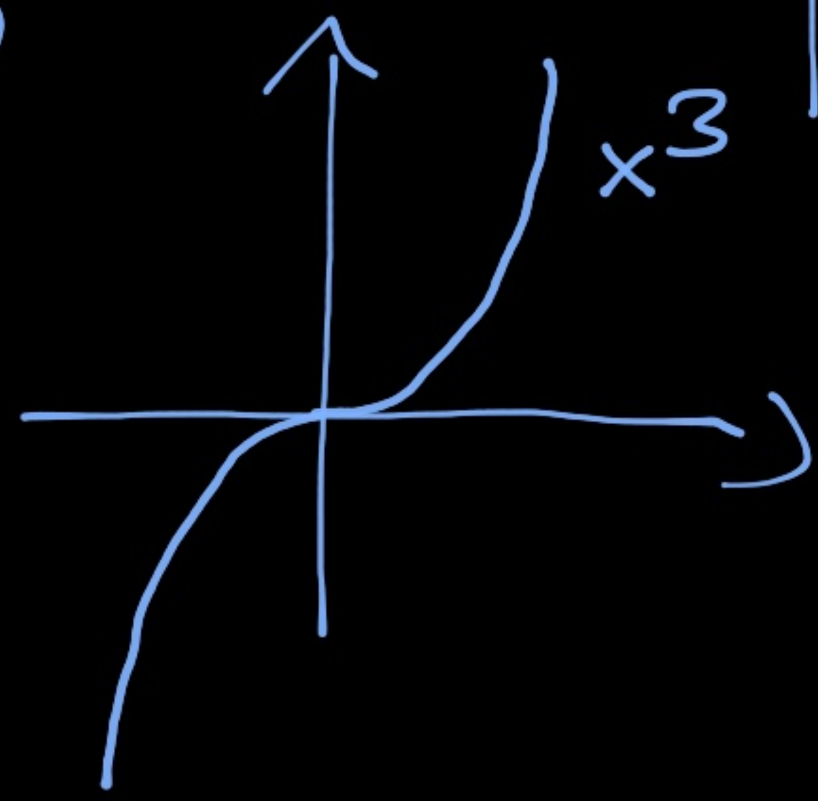
§2 / S. 87

<u>Merkhilfe</u>: $f(x) = x^n$, $x_0 = 0$

$f(x) = x^2$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 > 0$

$f(x) = x^3$, $f'(0) = 0 = f''(0)$, $f'''(0) = 6 > 0$





⚠ Der Satz hilft nichts, wenn:

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0)$ gibt es nicht
- $f^{(n)}(x_0) = 0$ für alle x

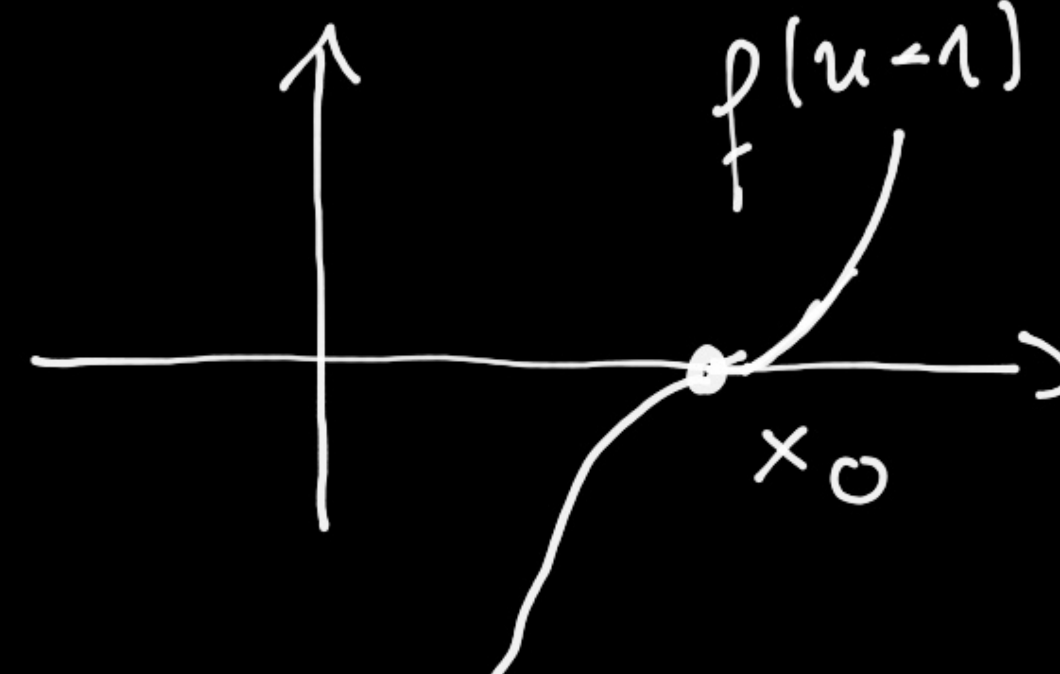
(Beispiele nachholen)

§21 S. 88

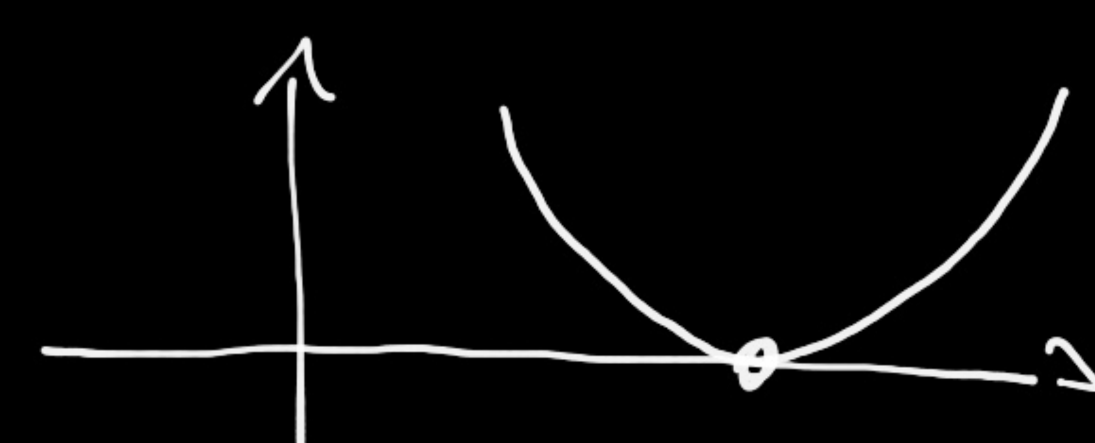
(2.24: Beweis)

Nur für $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\left(f^{(n-1)}\right)'$ (sonst $-f(x)$ ansehen ...)

(2.22 (1)): $f^{(n-1)} = \left(f^{(n-2)}\right)'$ ist bei x_0 lokal streng wachsend und $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ (Vor.)



(2.22 (2)): $f^{(n-2)} = \left(f^{(n-3)}\right)'$ hat in x_0 striktes lokales Min



$\rightsquigarrow f^{(n-2)}(x_0+h) > 0$ für $0 < |h| < r$

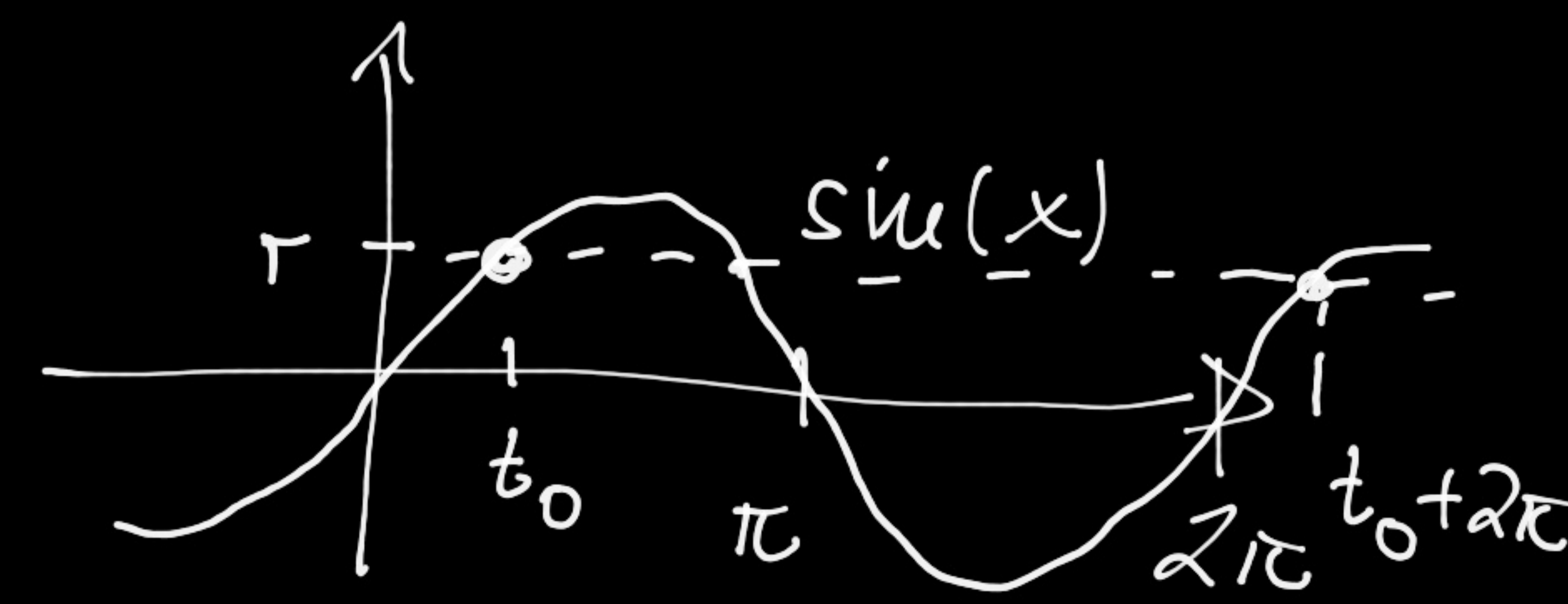
(2.22 (1)): $f^{(n-3)}$ lokal streng monoton wachsend bei x_0

etc. ... ✓

§2/S.89

Verrückte Funktionen

① $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$



$r \in [-1,1]$ f ist in 0 unstetig.

Es gibt t_0 mit $\sin(t_0) = r$

und dann $\sin(t_0 + 2\pi z) = r$ mit $z \in \mathbb{Z}$ Menge der ganzen

Also: Für $x = \frac{1}{t_0 + 2\pi z}$ (mit $t_0 \neq -2\pi z$)

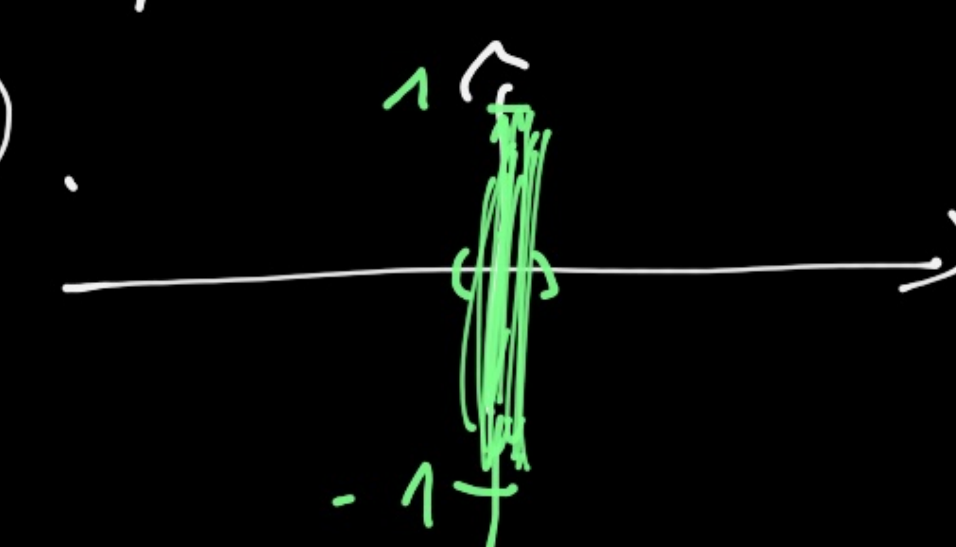
gilt $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin(t_0 + 2\pi z) = r$

für alle z:

Ist $\delta > 0$, so gilt: $\frac{1}{t_0 + 2\pi z} \in (-\delta, \delta)$ für große $z \in \mathbb{Z}$,

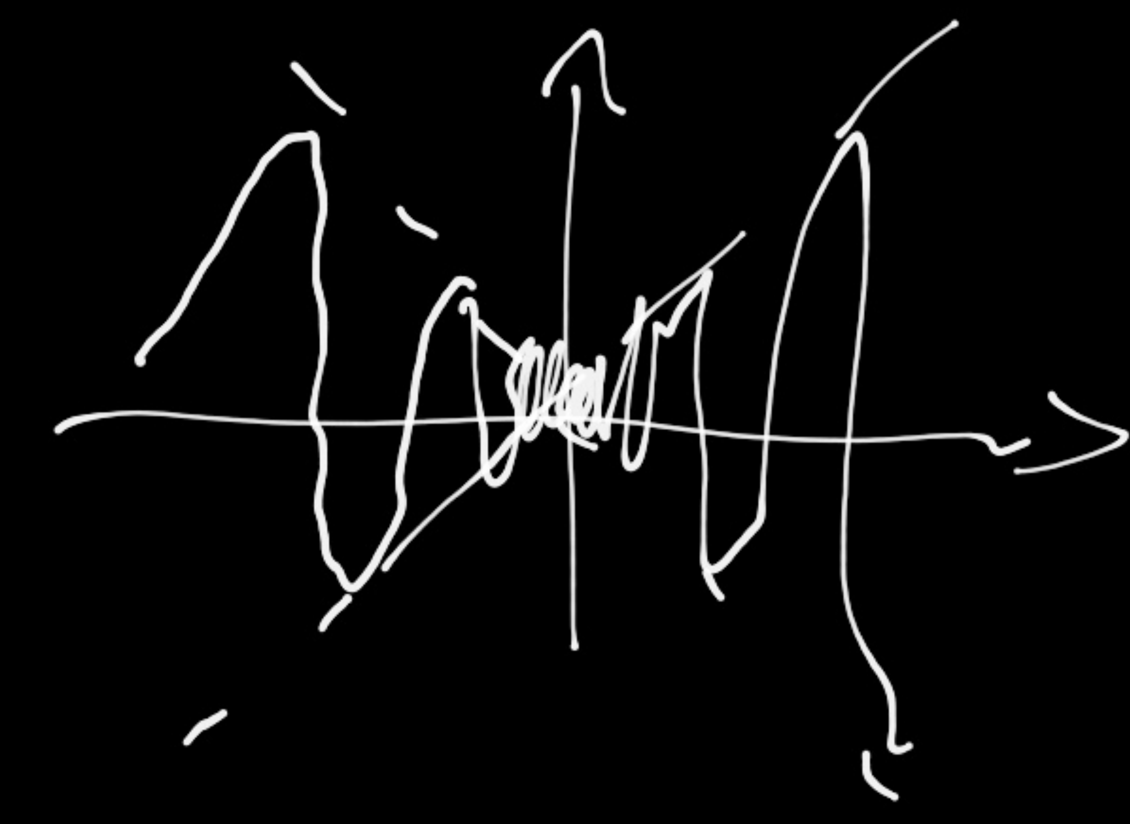
d.h. r kommt als Funktionswert von f auf $(-\delta, \delta)$ vor

Gilt für jedes $r \in [-1,1]$ und für jedes $\delta > 0$.



② $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

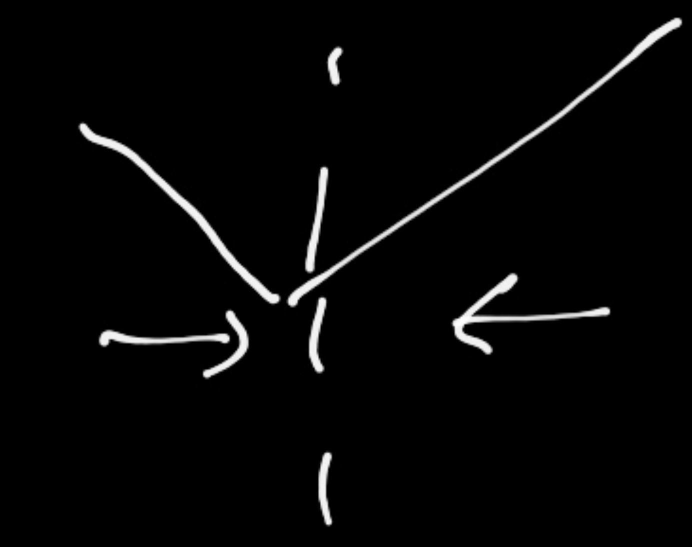
ist in $x = 0$ stetig. Warum?



z.z.: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Setze $\delta = \varepsilon$.



Betrachte $x \neq 0$, $|x| < \delta$.

Dann $|f(x) - 0| = |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = |x| \cdot |\sin \frac{1}{x}|$

$\leq |x| < \delta = \varepsilon$ ✓

$|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$

Aber: $f(x)$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar,

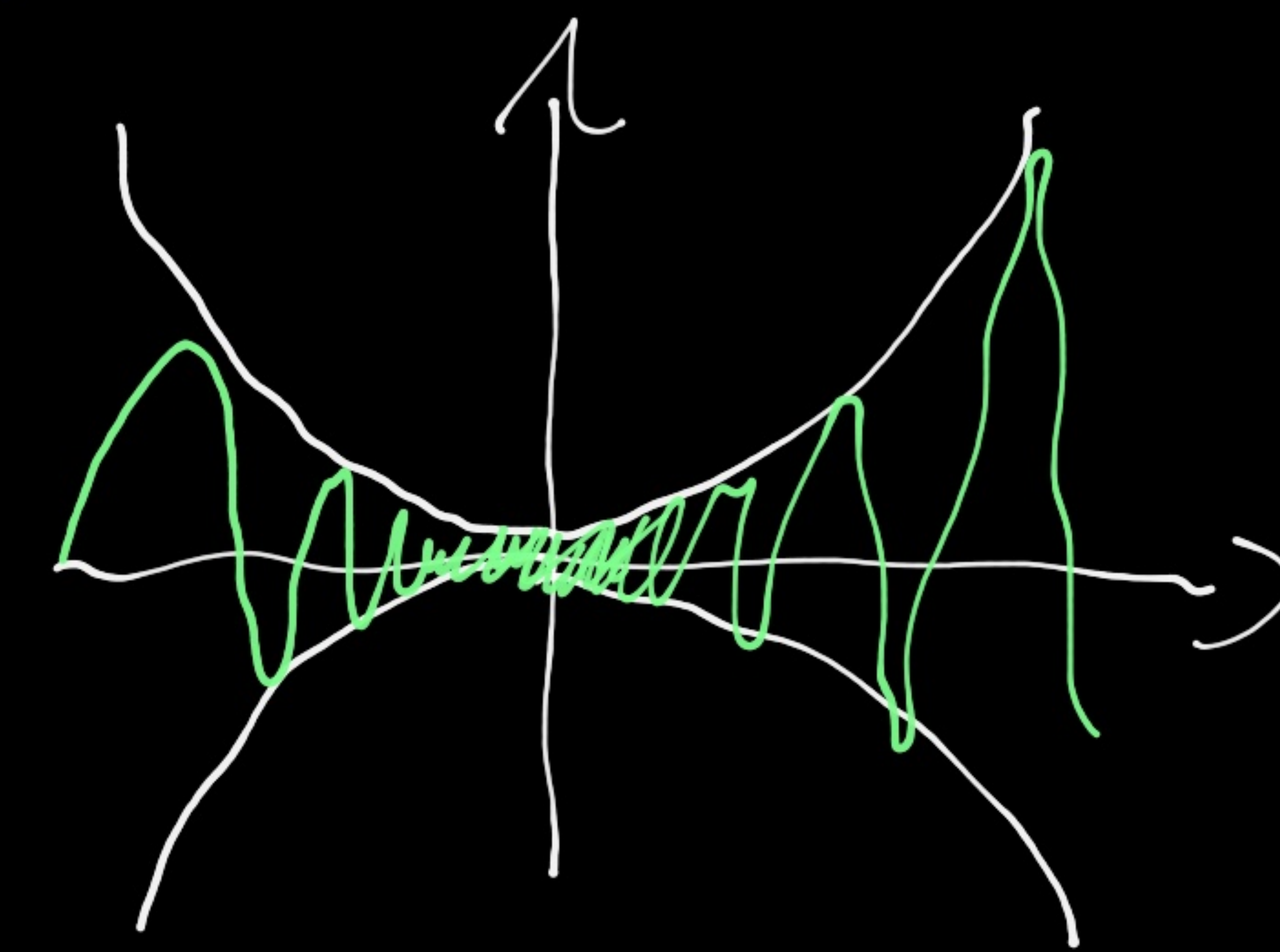
denn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

gibt es nicht.

$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos \frac{1}{x}$

§2 / S. 91

③ $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$



- ist stetig (auch in $x = 0$)
- ist differenzierbar

für $x \neq 0$ sowieso;

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

für $x = 0$ auch:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

Also: $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

f' ist in $x = 0$ unstetig, also gibt es $f''(0)$ nicht!

f ist in $x = 0$ weder extremal noch monoton

§21 | S. 92

④ $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f ist beliebig häufig diff'bar,

$f^{(n)}(0) = 0$ für <u>alle</u> n

f besitzt in $x = 0$ ein (sogar ein globales) Min.

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ -e^{-1/x^2} & x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

g ist lokal streng monoton in 0; alle $g^{(n)}(0) = 0$.

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

2.25 Konvexe und konkave Funktionen

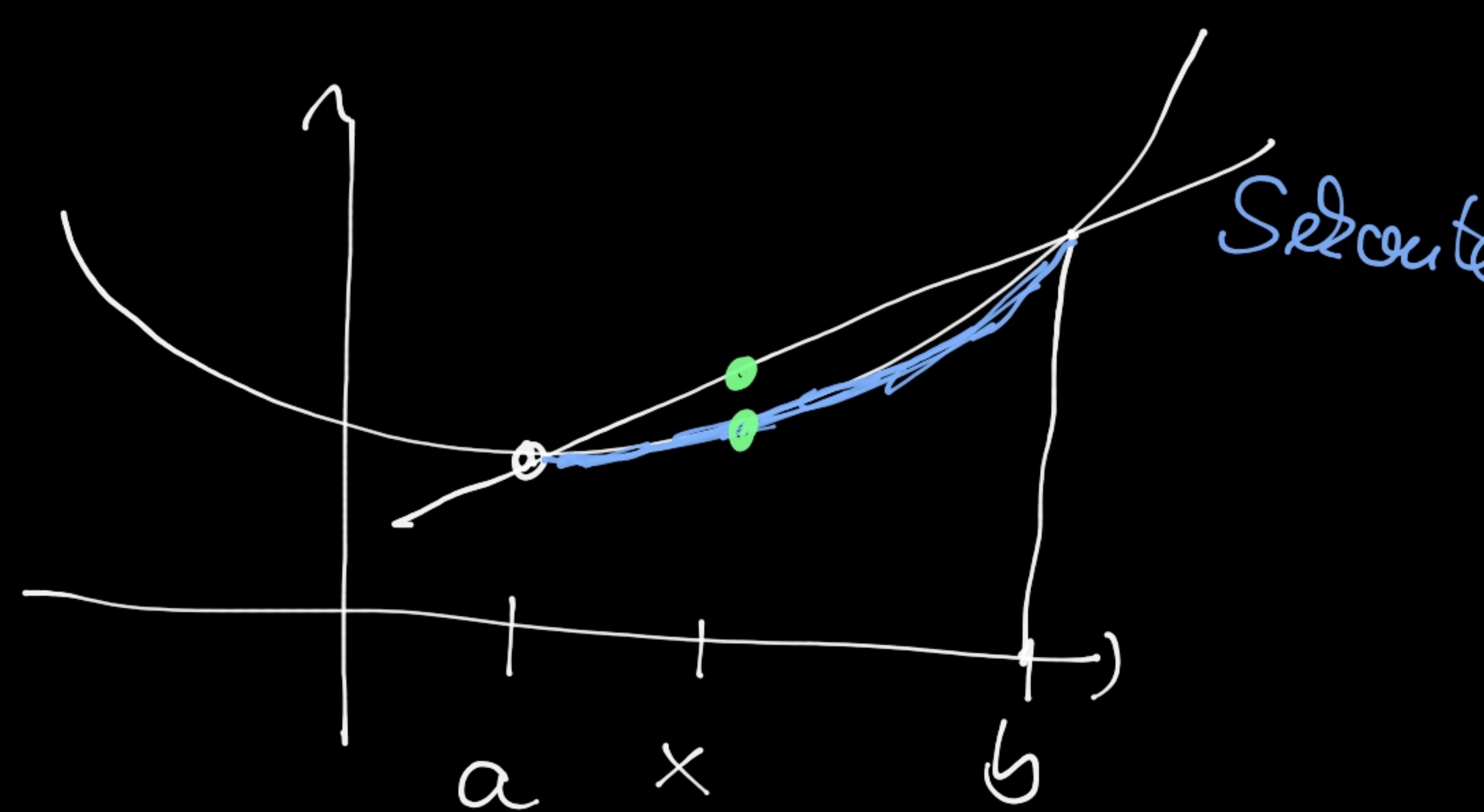
Vorgelegt ist ein Intervall I und eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$

- Dann heißt f **konvex** auf I, falls:

Ist $a < b$ aus I, so verläuft der Graph von f zwischen a und b unterhalb der Sekante.

D.h. für $a < x < b$ gilt

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$



- f **konkav** auf I, falls:

Ist $a < b$ aus I, so verläuft der Graph von f zwischen a und b oberhalb der Sekante.

2.26 Satz

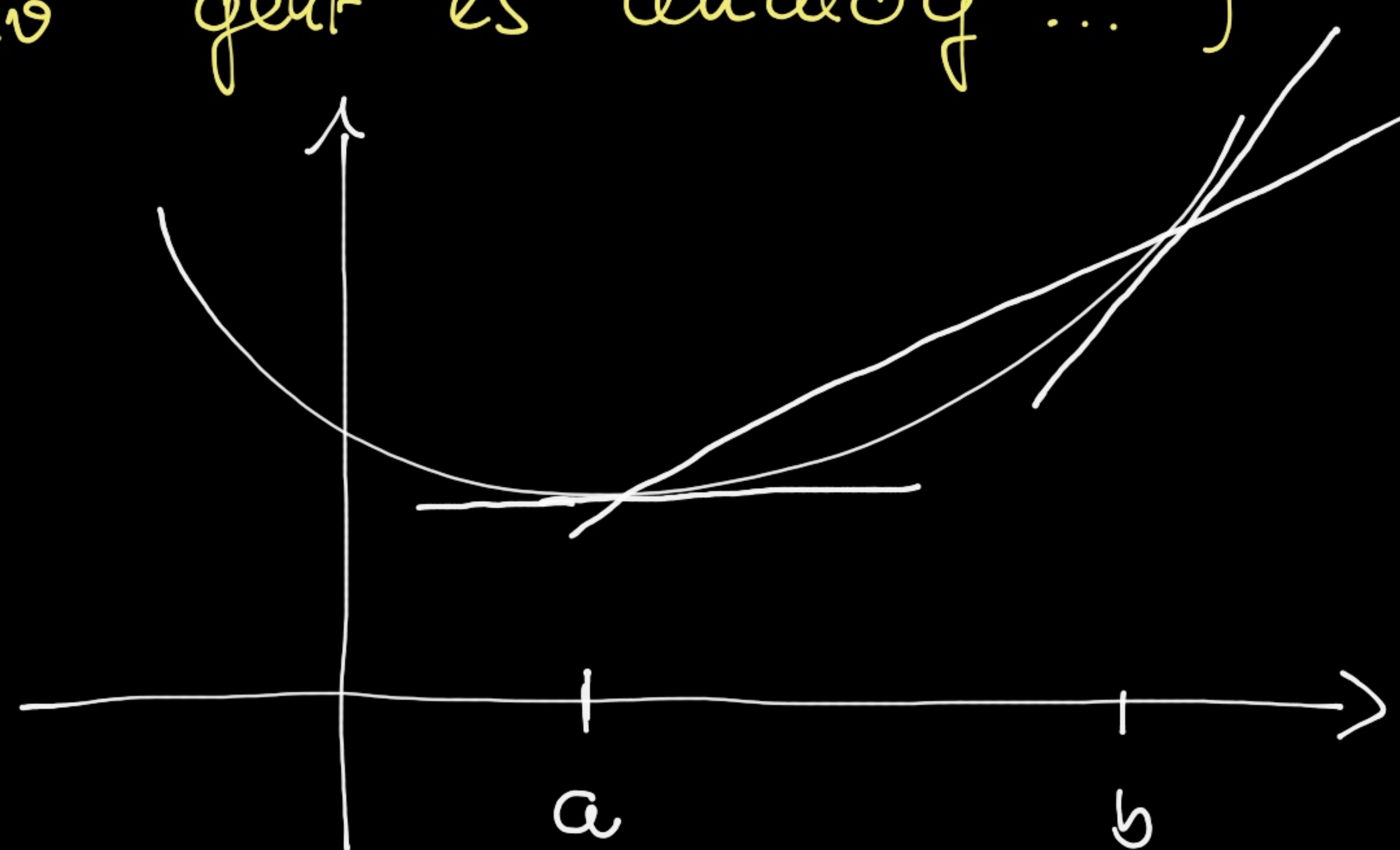
Vorgelegt ist ein Intervall I und eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$

(a) Ist f diff'bar, so ist f genau dann konvex, wenn f' auf I monoton wächst.

(b) Ist f zweimal diff'bar, so ist f genau dann konvex, wenn $f'' \geq 0$.

(mit "konkav" geht es analog ...)

Beweisidee

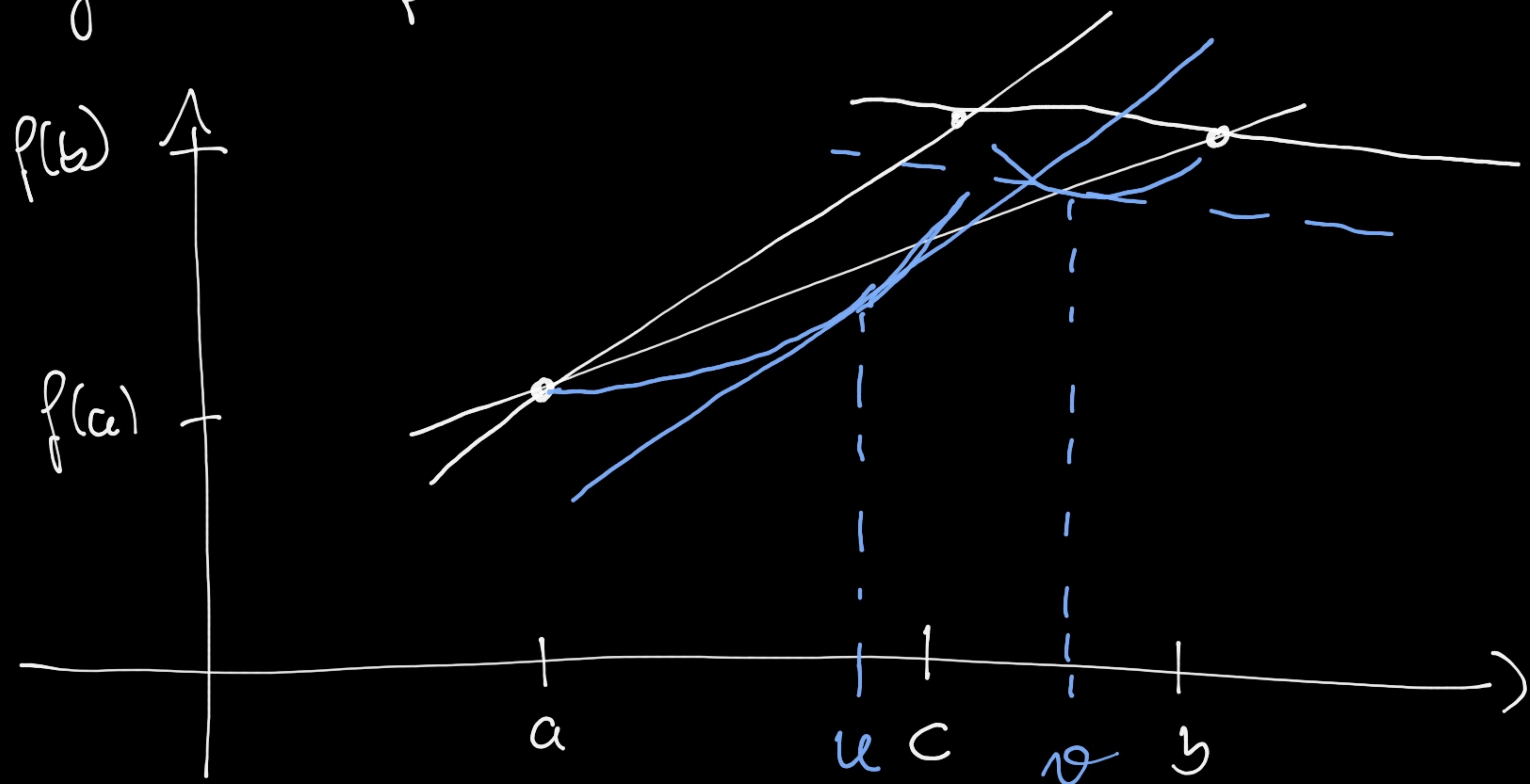


Für $a < x < b$ gilt

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

Grenzübergang: $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$

Umgekehrt: f' ist monoton wachsend



$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

MWS-D $\longrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} & > & \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \\ \| & & \| \\ f'(u) & > & f'(v) \\ a<u<c & & c<v<a \end{array}$$

Es gibt u, v: $f'(u) > f'(v)$; f' nicht wachsend

$a < u < c \qquad c < v < a$

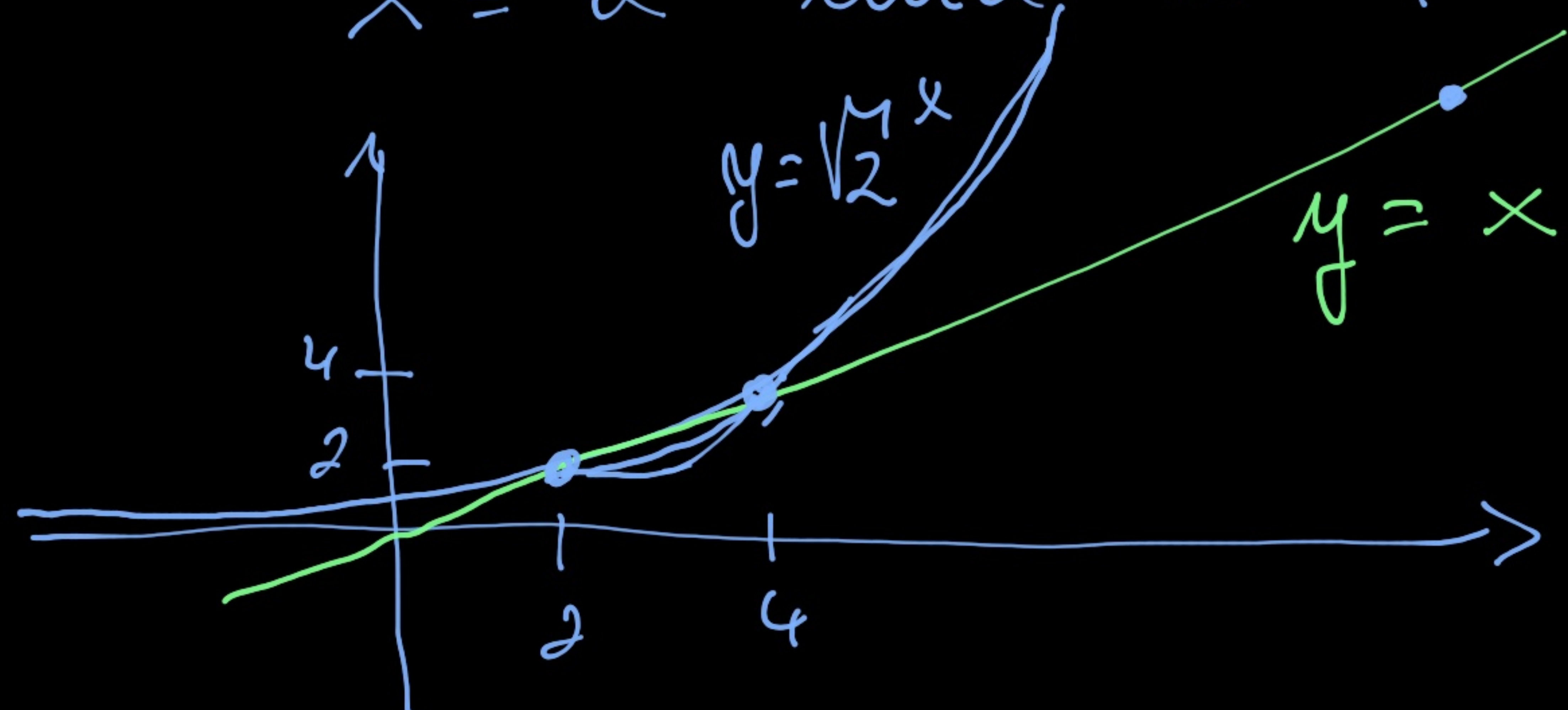
∎

Übung: Bestimme alle x mit

$$\sqrt{2}^{\,x} = x$$

$$\sqrt{2}^{\,2} = 2 \,, \quad \sqrt{2}^{\,4} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2 = 2^2 = 4$$

$x = 2$ und $x = 4$ sind ✓ die einzigen Lösungen



Weise nach: f ist "strikt" konvex bzw. $f'' > 0$

Variante: $g(x) = \sqrt{2}^{\,x} - x$
$g''(x) = (\ln \sqrt{2})^2 \sqrt{2}^{\,x}$ hat keine Nullstelle. Rolle:
$g(x)$ hat max. 2 Nullstellen

$$\sqrt{2}^{\,x} = \left(e^{\ln \sqrt{2}}\right)^x = e^{x \ln \sqrt{2}}$$

$$\left(\sqrt{2}^{\,x}\right)'' = \left(e^{x \ln \sqrt{2}}\right)'' = \ln \sqrt{2} \left(e^{x \ln \sqrt{2}}\right)'$$

$$= \underbrace{(\ln \sqrt{2})^2}_{>0} \cdot \underbrace{e^{x \ln \sqrt{2}}}_{>0} > 0 \quad ✓$$

Hausaufgabe 07 ("Wenn heute Klausur wäre"):

(a) Zeige ausschließlich mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass $f(x) = x^2 + x + 1$ die Ableitung $f'(x) = 2x + 1$ besitzt. (5P)

(b) Zeige ausschließlich mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums: (8P)

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$$

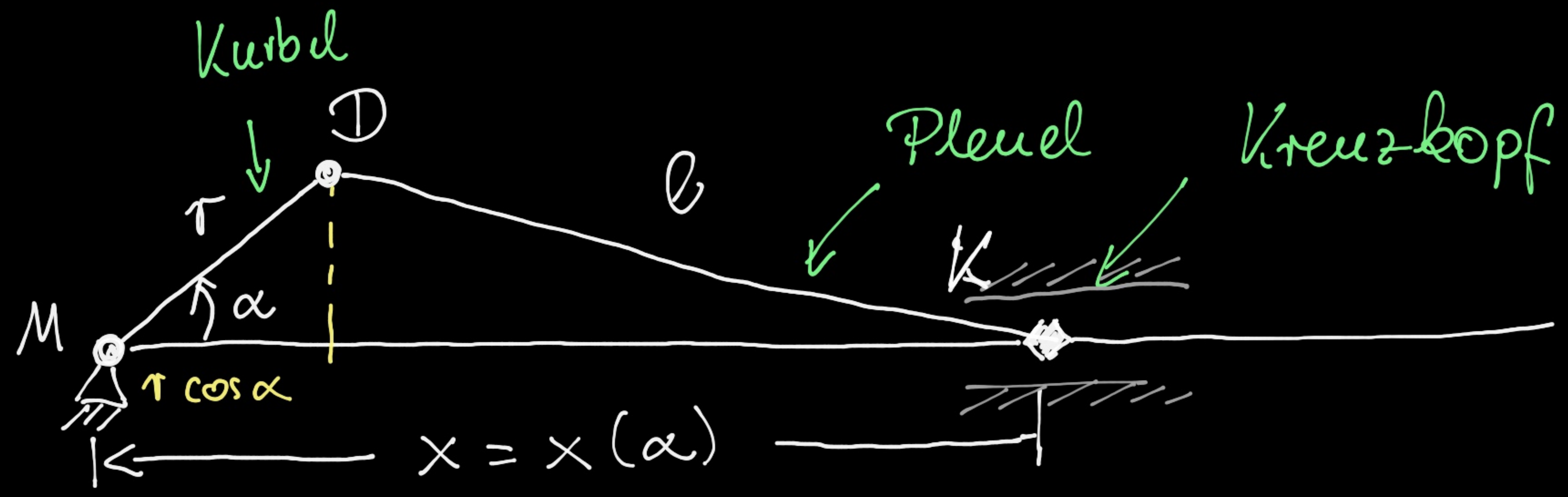
(c) Bestimme die lokalen Extrema von $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 4}$ (7P)

(d) Weise nach, dass $f(x) = x^4 + x^3 + 1$ auf $(0, \infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt, und bestimme $(f^{-1})'(3)$. (8P)

Versuche nicht, die Umkehrfunktion auszurechnen ☺

28/85 P

Das Schubkurbelgetriebe:



$\ell > 2r$

Gesucht $x(\alpha)$, α im Bogenmaß

Kosinussatz: $\ell^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\alpha$

Umstellen: $x^2 - 2(r\cos\alpha)\cdot x + r^2 - \ell^2 = 0$

p-q-Formel: $x = r\cos\alpha \pm \sqrt{(r\cos\alpha)^2 - (r^2 - \ell^2)}$

Geometrie: $x = r\cos\alpha + \sqrt{r^2(\cos^2\alpha - 1) + \ell^2} = x(\alpha)$

Kurbel bewegt sich "gleichförmig" mit $1\,\frac{\text{rad}}{s}$,
also $\alpha = t$ (Zeit)

§2 / S. 99

$$x(t) = r\cos t + \sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}$$

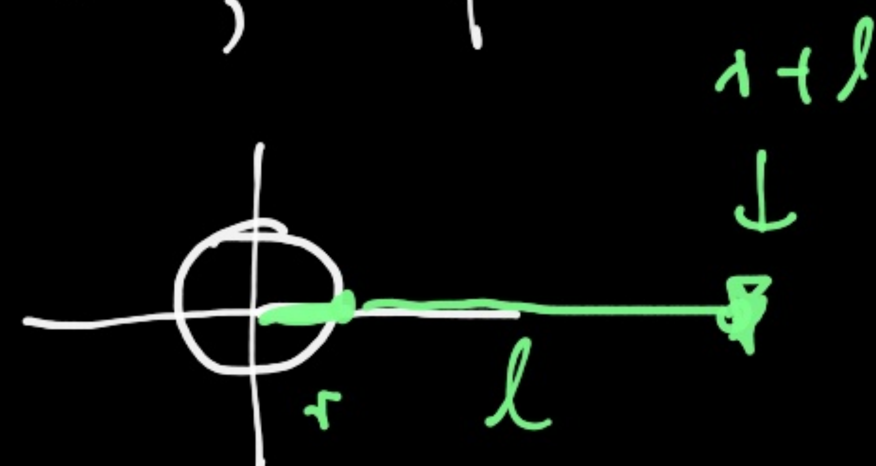
Gesucht: Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ ("$\bullet$": Ableitung nach der Zeit)

Beschleunigung $\ddot{x}(t)$.

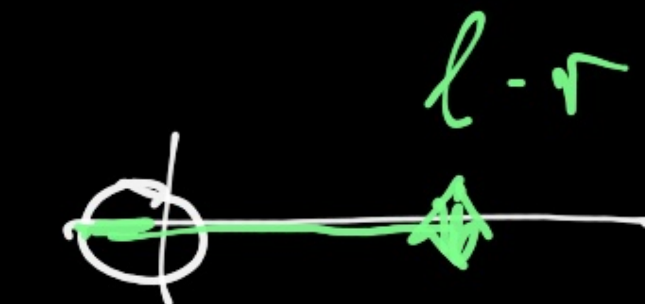
$$\dot{x}(t) = -r\sin t + \frac{-\cancel{2}\, r^2 \sin t \cos t}{\cancel{2}\sqrt{\dots}}$$

$$\dot{x}(t) = -r\sin t - \frac{r^2 \sin t \cos t}{\sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}}$$

$\dot{x}(t) = 0$, falls $\sin t = 0$ (d.h. Winkel $t = 0, \pi$)



: $t = 0 \rightsquigarrow$ Max, $t = \pi \rightsquigarrow$ Min.



oder $$-r - \frac{r^2\cos t}{\sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}} = 0$$

bzw. $-1 = \dfrac{r\cos t}{\sqrt{\dots}}$ bzw. $(-\sqrt{\dots})^2 = r^2\cos^2 t$ bzw. $l^2 - r^2 = 0$

$\rightsquigarrow$ keine weitere Lsg.

$x(0) = l + r, \quad x(\pi) = l - r, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = -r - \frac{r^2}{l}$

$y(t) = a + b\cos t + c \cdot \cos(2t)$ als Annäherung

mit $y(0) = x(0), \quad y(\pi) = x(\pi), \quad \dot{y}(0) = \dot{x}(0), \quad \ddot{y}(0) = \ddot{x}(0)$

$a + b + c = y(0) = x(0) = l + r$ ①

$a - b + c = y(\pi) = x(\pi) = l - r$ ②

$\dot{y}(t) = -b\sin t - 2c\sin(2t), \quad \dot{y}(0) = 0 = \dot{x}(0)$ ✓

$\ddot{y}(t) = -b\cos t - 4c\cos(2t)$

$\underline{-b} - 4c = \ddot{y}(0) = \ddot{x}(0) = \underline{-r} - \frac{r^2}{l}$ ③

① − ② $\quad 2b = 2r, \quad \boxed{b = r}$

③ liefert $\quad 4c = \frac{r^2}{l}$ bzw. $\boxed{c = \frac{r^2}{4l}}$

① liefert: $\quad a + \cancel{r} + \frac{r^2}{4l} = l + \cancel{r}; \quad \boxed{a = l - \frac{r^2}{4l} = \frac{4l^2 - r^2}{4l}}$

$$x(t) = r\cos t + \sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}$$

$$y(t) = \frac{4l^2 - r^2}{4l} + r\cos t + \frac{r^2}{4l}\cos(2t)$$

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2l}\sin(2t)$$ Geschwindigkeit

$$\ddot{y}(t) = -r\cos t - \frac{r^2}{l}\cos(2t)$$ Beschleunigung

$$\dddot{y}(t) = r\sin t + 2\frac{r^2}{l}\sin(2t)$$ Ruck

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t)$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$

$$0 = \ddot{y}(t) = -r\cos t - \frac{r^2}{l}(2\cos^2 t - 1) \qquad \Big| :(-r)$$

$$0 = \cos t + 2\frac{r}{l}\cos^2 t - \frac{r}{l} \qquad \Big| : 2\frac{r}{l}$$

$$0 = (\cos t)^2 + \frac{l}{2r}\cos t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos t = -\frac{l}{4r} \pm \sqrt{\frac{l^2}{16r^2} + \frac{1}{2}} = -\frac{l}{4r} \pm \frac{1}{4r}\sqrt{l^2 + 8r^2}$$

$$x(t) = r\cos t + \sqrt{r^2(\cos^2 t - 1) + l^2}$$

$$y(t) = \frac{4l^2 - r^2}{4l} + r\cos t + \frac{r^2}{4l}\cos(2t)$$

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2l}\sin(2t)$$ Geschwindigkeit

$$\ddot{y}(t) = -r\cos t - \frac{r^2}{l}\cos(2t)$$ Beschleunigung

$$\dddot{y}(t) = r\sin t + 2\frac{r^2}{l}\sin(2t)$$ Ruck

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t)$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$

$$0 = \ddot{y}(t) = -r\cos t - \frac{r^2}{l}(2\cos^2 t - 1) \quad \Big|:(-r)$$

$$0 = \cos t + 2\frac{r}{l}\cos^2 t - \frac{r}{l} \quad \Big|: 2\frac{r}{l}$$

$$0 = (\cos t)^2 + \frac{l}{2r}\cos t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos t = -\frac{l}{4r} \pm \sqrt{\frac{l^2}{16r^2} + \frac{1}{2}} = -\frac{l}{4r} \pm \frac{1}{4r}\sqrt{l^2 + 8r^2}$$

Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2l}\sin(2t)$$

(Nullstellen von $\ddot{y}(t) = \frac{r^2}{l} - r\cos t - 2\frac{r^2}{l}\cos^2 t$)

$$\cos t = -\frac{l}{4r} \pm \frac{1}{4r}\sqrt{l^2+8r^2} \in [-1,1]$$

$$= -\frac{l}{4r}\cdot\left(1 \mp \sqrt{1+8\frac{r^2}{l^2}}\right)$$

gilt genau dann, wenn

$$1 \mp \sqrt{1+\frac{8r^2}{l^2}} \in \left[-\frac{4r}{l}, \frac{4r}{l}\right]$$

"−": $$\sqrt{1+\frac{8r^2}{l^2}} \le \frac{4r}{l} - 1$$

$$\cancel{1+}\frac{8r^2}{l^2} \le \left(\frac{4r}{l}-1\right)^2 = 16\frac{r^2}{l^2} - 8\frac{r}{l}\cancel{+1}$$

gdw. $\frac{r}{l} \le \frac{r^2}{l^2}$ bzw $1 \le \frac{r}{l}$ bzw. $l \le r$

Aber: $l > 2r$ nach Vor. $\leadsto$ KNIF

Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2\ell}\sin(2t)$$

(Nullstellen von $\ddot{y}(t) = \frac{r^2}{\ell} - r\cos t - 2\frac{r^2}{\ell}\cos^2 t$)

"+": $\boxed{\cos t = -\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2 + 8r^2}} \overset{?}{\in} [-1, 1]$

$$= -\frac{\ell}{4r}\cdot\left(1 - \sqrt{1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}}\right)$$

gilt genau dann, wenn

$$0 > 1 - \sqrt{1 + \frac{8r^2}{\ell^2}} \in \left[-\frac{4r}{\ell}, \frac{4r}{\ell}\right]$$

gdw $\quad 1 - \sqrt{1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}} \geq -\frac{4r}{\ell}$

gdw $\quad 1 + \frac{4r}{\ell} \geq \sqrt{1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}}$

gdw. $\quad 1 + 8\frac{r}{\ell} + 16\frac{r^2}{\ell^2} = \left(1 + \frac{4r}{\ell}\right)^2 \geq 1 + 8\frac{r^2}{\ell^2}$

bzw. $\quad 8\frac{r}{\ell} + 8\frac{r^2}{\ell^2} \geq 0 \quad \checkmark$

Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot y(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2\ell}\sin(2t)$$

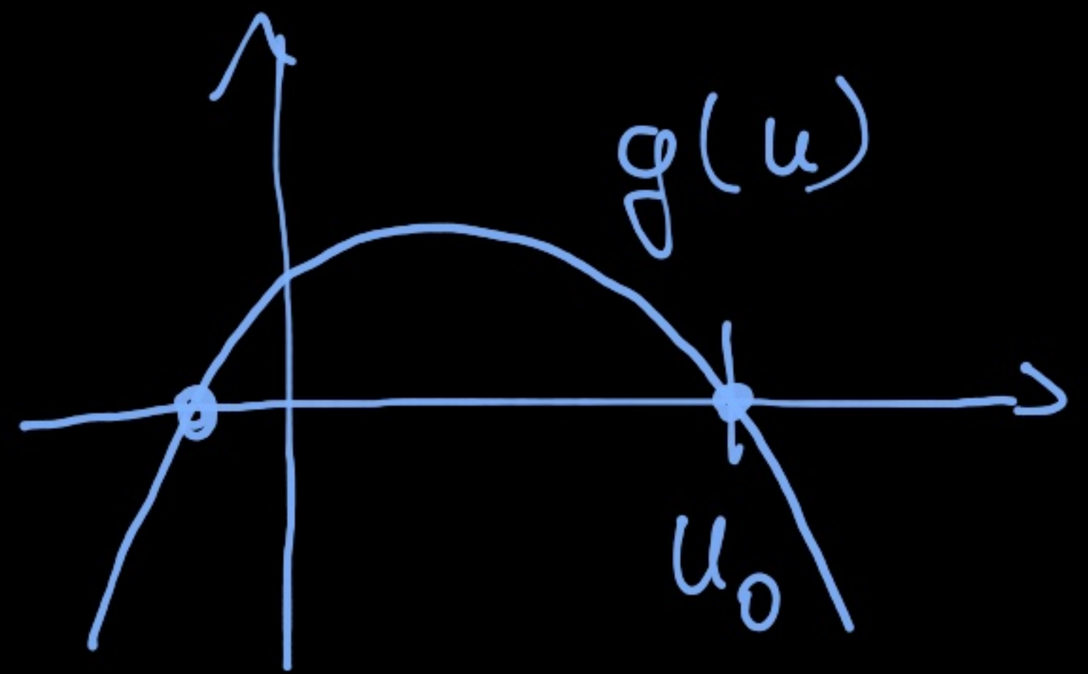
(Nullstellen von $\ddot y(t) = \frac{r^2}{\ell} - r\cos t - 2\frac{r^2}{\ell}\cos^2 t$)

$$\boxed{\cos t = -\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2+8r^2}}$$

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2+8r^2}\right) \quad (+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

$$\ddot y = \frac{r^2}{\ell} - r\cdot u - 2\frac{r^2}{\ell}u^2 = g(u) \qquad (u = \cos t)$$

$$u = u_0 = -\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2+8r^2} \quad \text{rechte Nullstelle}$$



$g(u)$ wechselt von + nach −

$\ddot y(t)$ wechselt in $\underbrace{t = +\arccos(\dots)}_{\text{Min}}$ von − nach +

Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2\ell}\sin(2t)$$

(Nullstellen von $\ddot{y}(t) = \frac{r^2}{\ell} - r\cos t - 2\frac{r^2}{\ell}\cos^2(t)$)

$$\boxed{\cos t = -\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2 + 8r^2}}$$

$$t_\pm = \pm \arccos\left(-\frac{\ell}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{\ell^2+8r^2}\right) \left(+ 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

$\ddot{y}$ ist stetig, also: zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen ist $\ddot{y}$ entweder positiv oder negativ

$$\ddot{y}(0) = \frac{r^2}{\ell} - r - 2\frac{r^2}{\ell} = -r - \frac{r^2}{\ell} < 0$$

Zwischen t_- und t_+ gilt $\ddot{y} > 0$.

$t = \pi$ liegt zwischen t_+ und $t_- + \pi$ (aufeinanderfolgende NSt)

und $\ddot{y}(\pi) = \frac{r^2}{\ell} + r - 2\frac{r^2}{\ell} = r - \frac{r^2}{\ell} = \frac{r}{\ell}\underbrace{(\ell - r)}_{>0} > 0$

$= \ddot{y}(-\pi)$

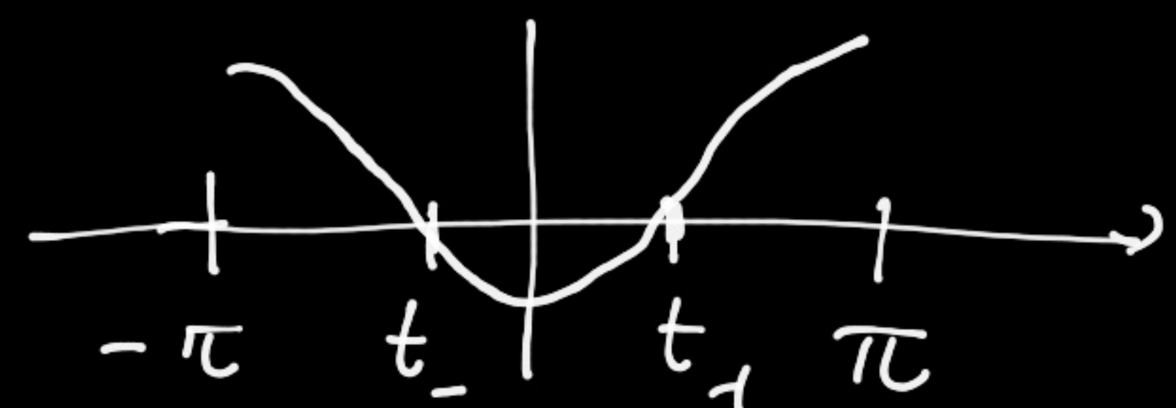
Kritische Punkte der Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = -r\sin t - \frac{r^2}{2l}\sin(2t)$$

(Nullstellen von $\ddot{y}(t) = \frac{r^2}{l} - r\cos t - 2\frac{r^2}{l}\cos^2(t)$)

$$t_\pm = \pm \arccos\left(-\frac{l}{4r} + \frac{1}{4r}\sqrt{l^2+8r^2}\right) \quad (+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

- $-\pi < t_- < 0 < t_+ < \pi$
- t_+, t_- sind die einzigen Nullstellen von $\ddot{y}$ in $[-\pi,\pi]$
- $\ddot{y}(-\pi) = \ddot{y}(\pi) > 0 > \ddot{y}(0)$



Also: $\ddot{y} > 0$ auf $[-\pi, t_-)$

$\ddot{y} < 0$ auf (t_-, t_+)

$\ddot{y} > 0$ auf $(t_+, \pi]$

Folgt: t_- Maximum

t_+ Minimum

$$\dddot{y}(t) = r \sin t + 2\frac{r^2}{l}\sin(2t) = 0$$

$$\sin(2t) = 2\cos t \sin t$$

$$r \sin t + 4\frac{r^2}{l}\sin t \cdot \cos t = 0$$

also: $\sin t = 0$ oder $1 + 4\frac{r}{l} \cdot \cos t = 0$

bzw. $\sin t = 0$ oder $\cos t = -\frac{l}{4r} \overset{?}{\in} [-1, 0]$

$\downarrow$

kritische Punkte: $t = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\downarrow$

1. Fall: $l > 4r \rightsquigarrow$ keine weiteren Lsg.

$l = 4r$: Lsg. fallen zusammen

$(2r <)\, l < 4r$: weitere Lsg., nämlich $t = \pm \arccos\left(-\frac{l}{4r}\right)$ $(+\,2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

$$\dddot{y}(t) = r \sin t + 2\frac{r^2}{l}\sin(2t) = 0$$

$$\dddot{y}(t) = r \sin t \cdot \left(1 + 4\frac{r}{l}\cos t\right) = 0$$

Lösungen auf $(-\pi, \pi]$: (reicht! 2π-periodisch)

$t = 0, \pi$, falls $l \geq 4r$

$t = 0, \pi, \pm \arccos(-l/4r)$, falls $2r < l < 4r$

$\underline{l \geq 4r}$: $\dddot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = r > 0$, $\dddot{y}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -r$

Wechsel $+ \to -$ bei π $\leadsto$ $t = \pi$ ist ein Max. von $\ddot{y}$

Wechsel $- \to +$ bei 0 $\leadsto$ $t = 0$ ist ein Min. von $\ddot{y}$

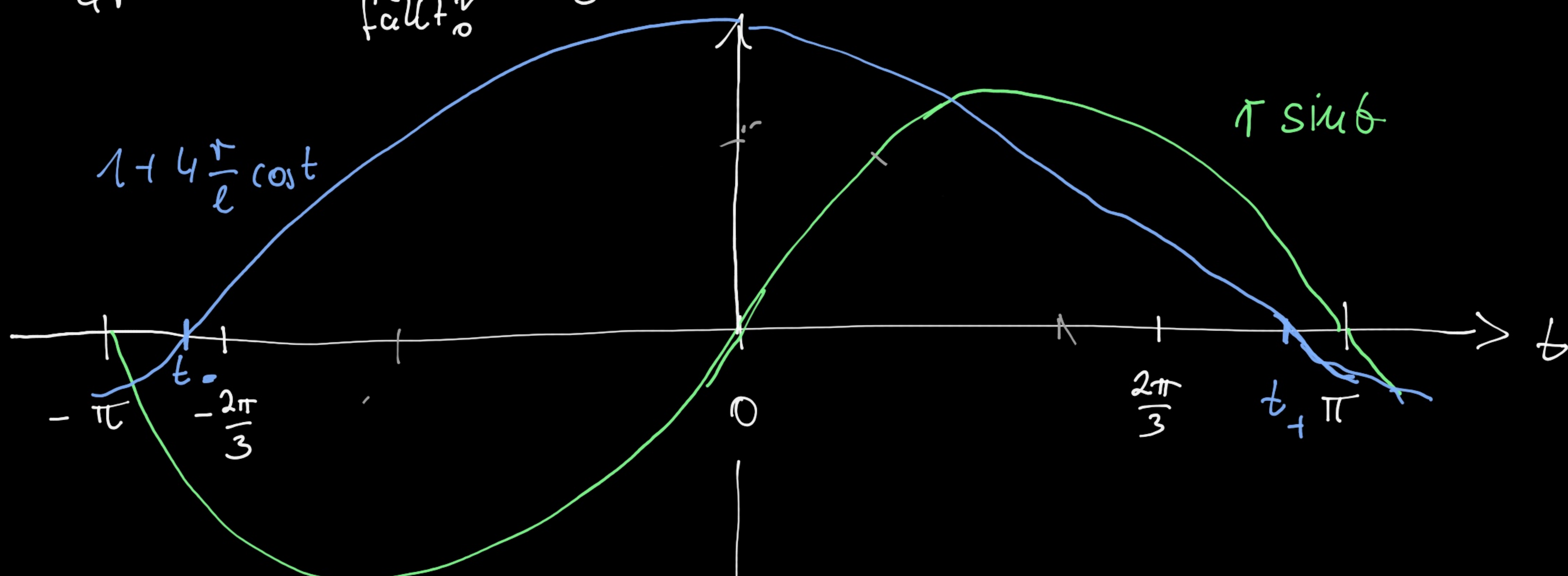
$$\dddot{y}(t) = \underline{r \sin t} \cdot \underline{\left(1 + 4\frac{r}{\ell}\cos t\right)} = 0$$

$\underline{2r < \ell < 4r}$: Nullstellen in $(-\pi, \pi]$ sind

$t = 0, \pi$ und $t = t_\pm = \pm \arccos\left(-\frac{\ell}{4r}\right)$

$\Big\downarrow : (-4r)$

$$-\frac{1}{2} > -\frac{\ell}{4r} > -1 \quad \underset{\text{fällt!}}{\overset{\arccos}{\rightsquigarrow}} \quad \frac{2\pi}{3} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) < t_+ < \pi$$



$\dddot{y}(t)$ | + | − | + | − | + |

t_-, t_+ Maxima, $0, \pi$ Minima