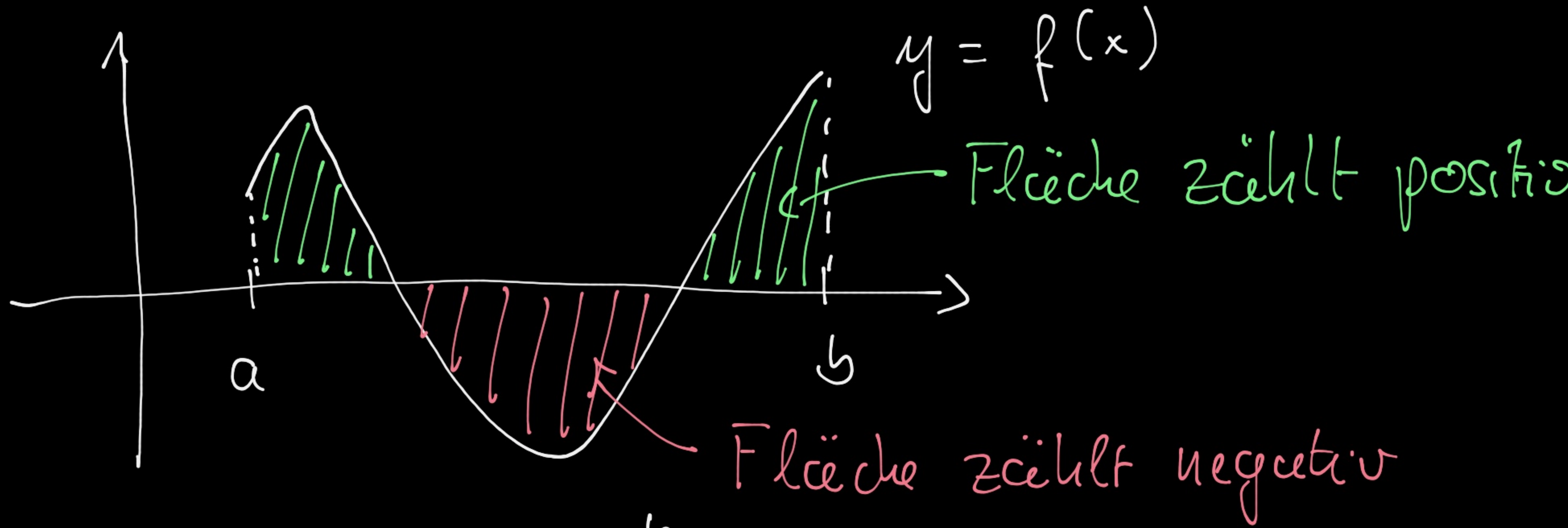
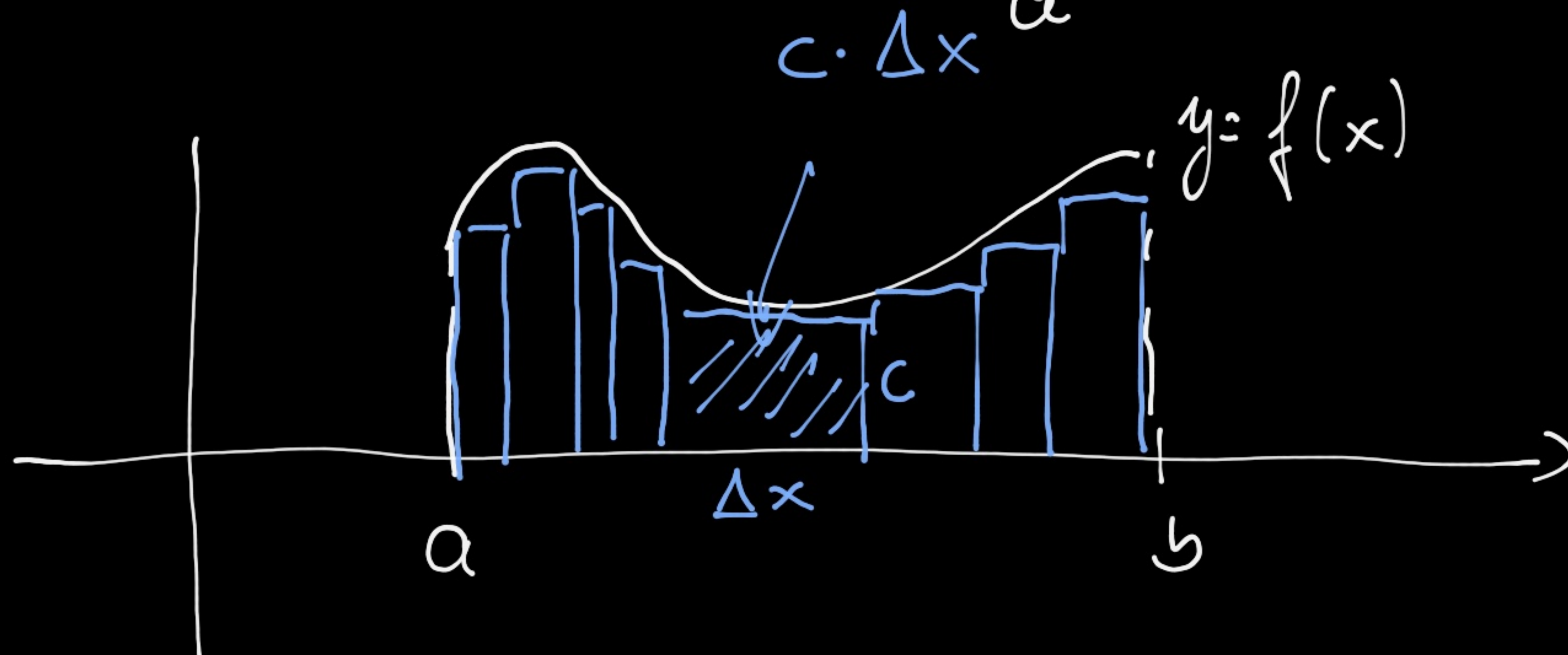
§3: Integralrechnung



Gesamtfläche $\int_a^b f(x)\,dx$



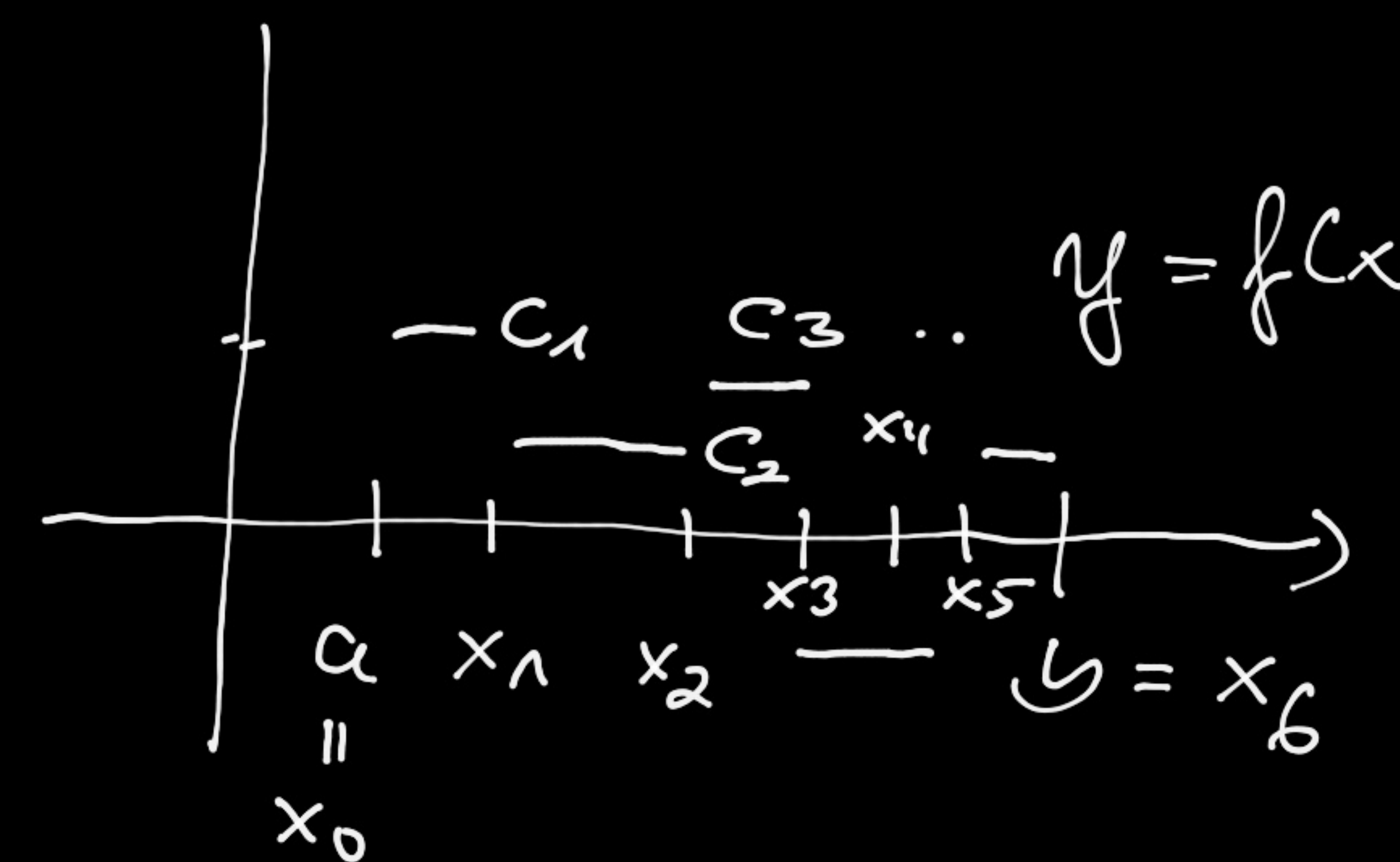
blaue Fläche $\approx \int_a^b f(x)\,dx$

3.1 Treppenfunktionen

Vorgelegt ist ein abgeschlossenes Intervall $I = [a,b]$.
Eine stückweise konstante Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion auf I.

"Z"

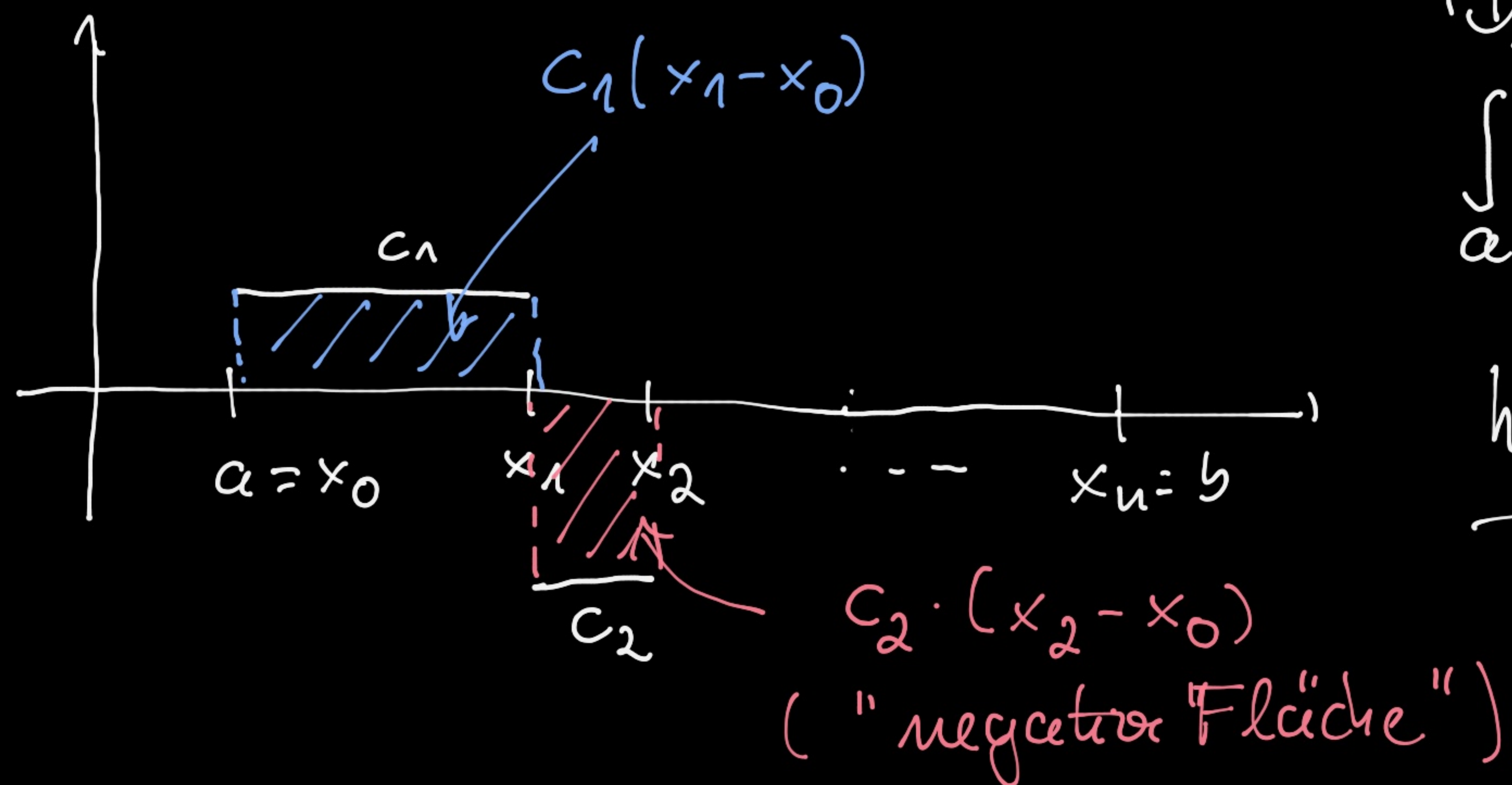
D.h.: Es gibt eine Zerlegung
$\mathfrak{z} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$
des Intervalls I sowie Zahlen
$c_1, \ldots, c_n$ mit:
$$f(x) = c_j \text{ für } x_{j-1} < x < x_j$$
Ein solche Zerlegung heißt zulässig für f.



auf jedem (x_i, x_{i-1}) ist f konstant.

$f: I \to \mathbb{R}$ mit zulässiger Zerlegung

$\mathfrak{Z}: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad f \equiv c_j$ auf (x_{j-1}, x_j)



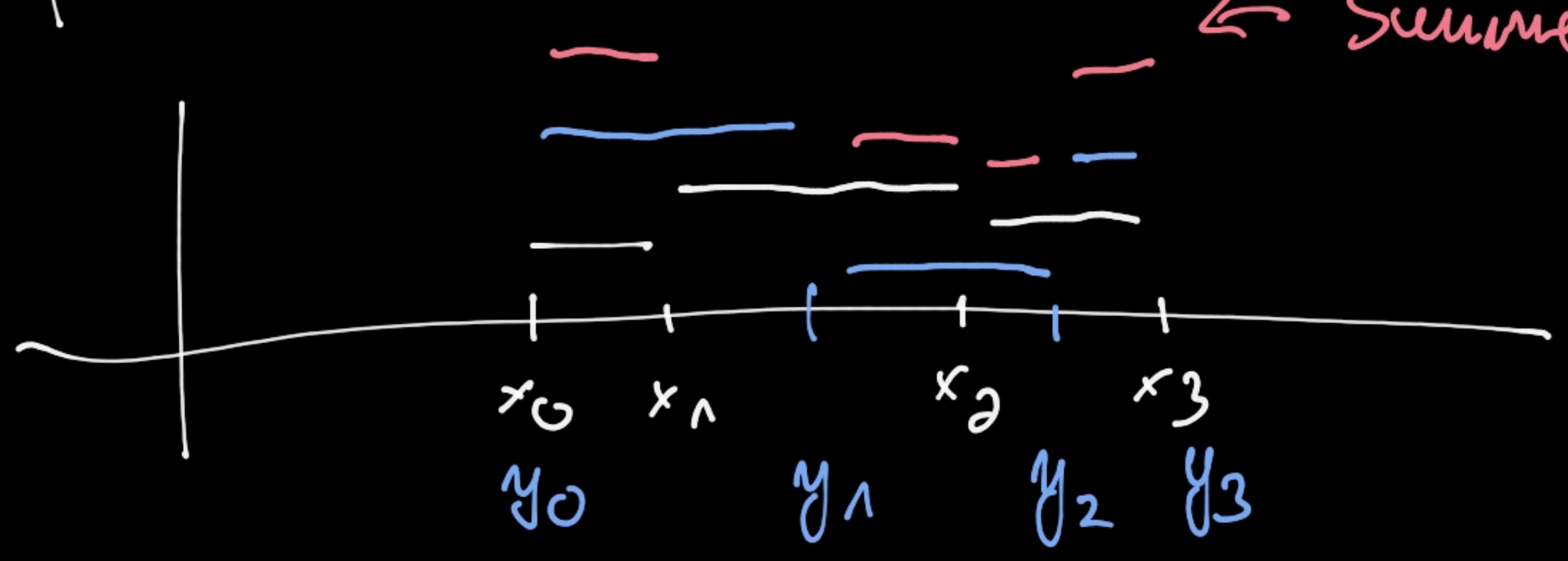
Die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{Def.}}{=} c_1 \cdot (x_1 - x_0) + c_2 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + c_n \cdot (x_n - x_{n-1})$$

heißt das Integral der Treppenfunktion f.

Notiz: Jede zulässige Zerlegung des Intervalls führt auf dasselbe Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

← Summe



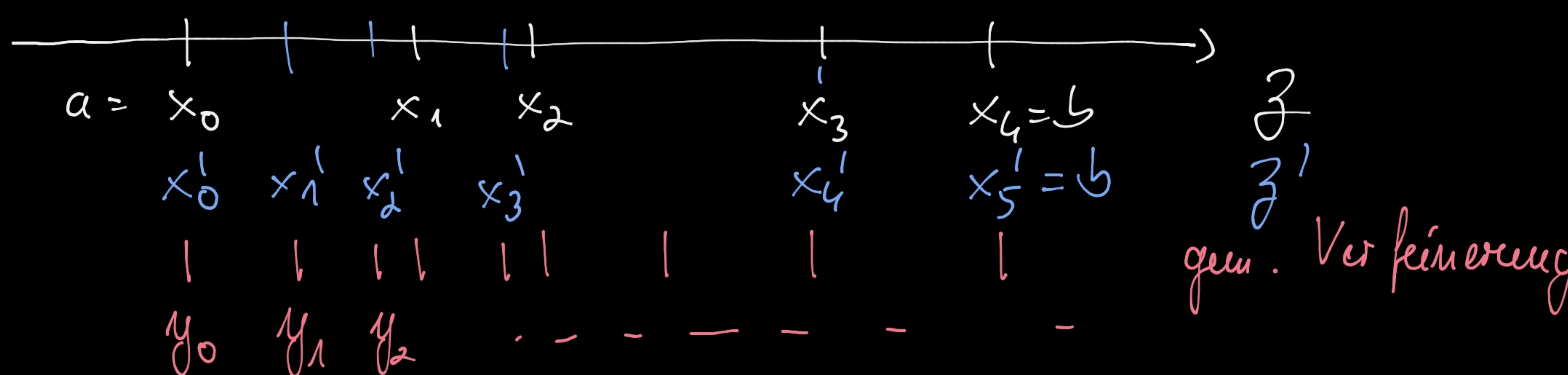
3.2 Verfeinerungen

Zerlegung als Menge der Teilungspunkte

Z_1, Z_2 Zerlegungen.

Z_2 heißt Verfeinerung von Z_1, falls $Z_1 \subseteq Z_2$

Je zwei Zerlegungen Z, Z' besitzen eine gemeinsame Verfeinerung, z.B. $Z \cup Z'$



3.3 Summe von Treppenfunktionen:

Vorgelegt: Treppenfunktionen $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
mit zulässigen Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$.

Die Summe $f = f_1 + f_2$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
ist wieder eine Treppenfunktion mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Dazu: $\mathfrak{Z} : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ gemeinsame
Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$; $f_1 \equiv c_j$, $f_2 \equiv d_j$ auf (x_{j-1}, x_j)

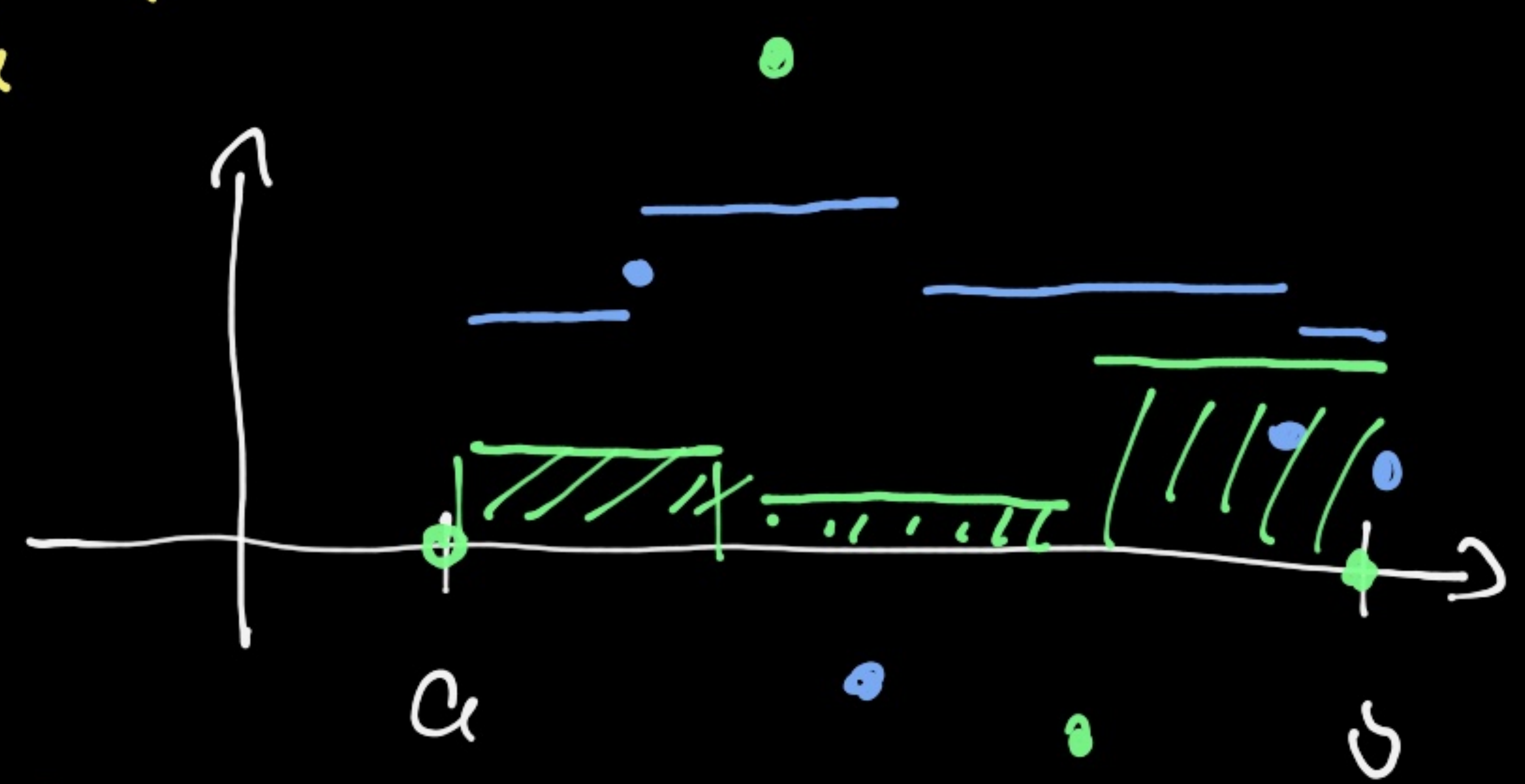
$f \equiv c_j + d_j$ auf (x_{j-1}, x_j) (wieder Treppenfkt!)

und
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= (c_1 + d_1)\cdot(x_1 - x_0) + \dots\dots \\
&= c_1 \cdot (x_1 - x_0) + \dots\dots + c_n \cdot (x_n - x_{n-1}) \\
&+ d_1 \cdot (x_1 - x_0) + \dots + d_n \cdot (x_n - x_{n-1}) \\
&= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 08A:

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $r \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so ist auch $r \cdot f$, $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$, eine Treppenfunktion. Es gilt

$$\int_a^b r f(x)\,dx = r \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$



Monotonie des Integrals

Sind $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen, so schreibe $f_1 \leq f_2$, falls $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in [a,b]$ mit endlich vielen Ausnahmen gilt. In diesem Fall gilt

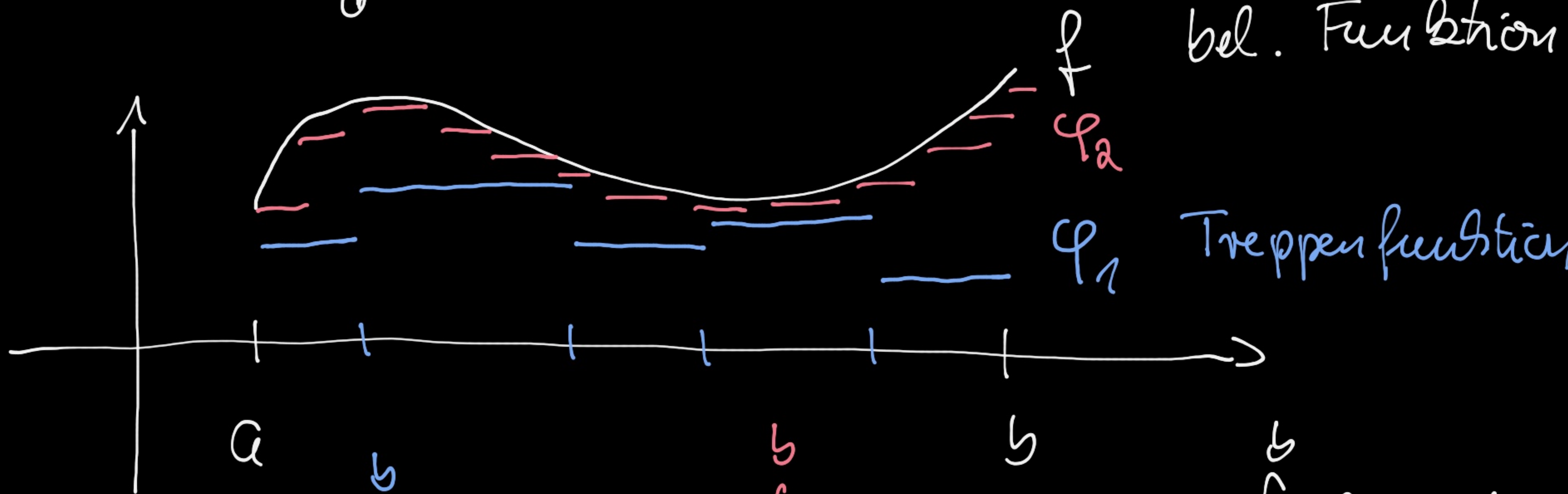
$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Notiz: $f(x) \equiv 1$ auf $[a,b]$:

f ist Treppenfunktion und $\int_a^b 1\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = b-a$;

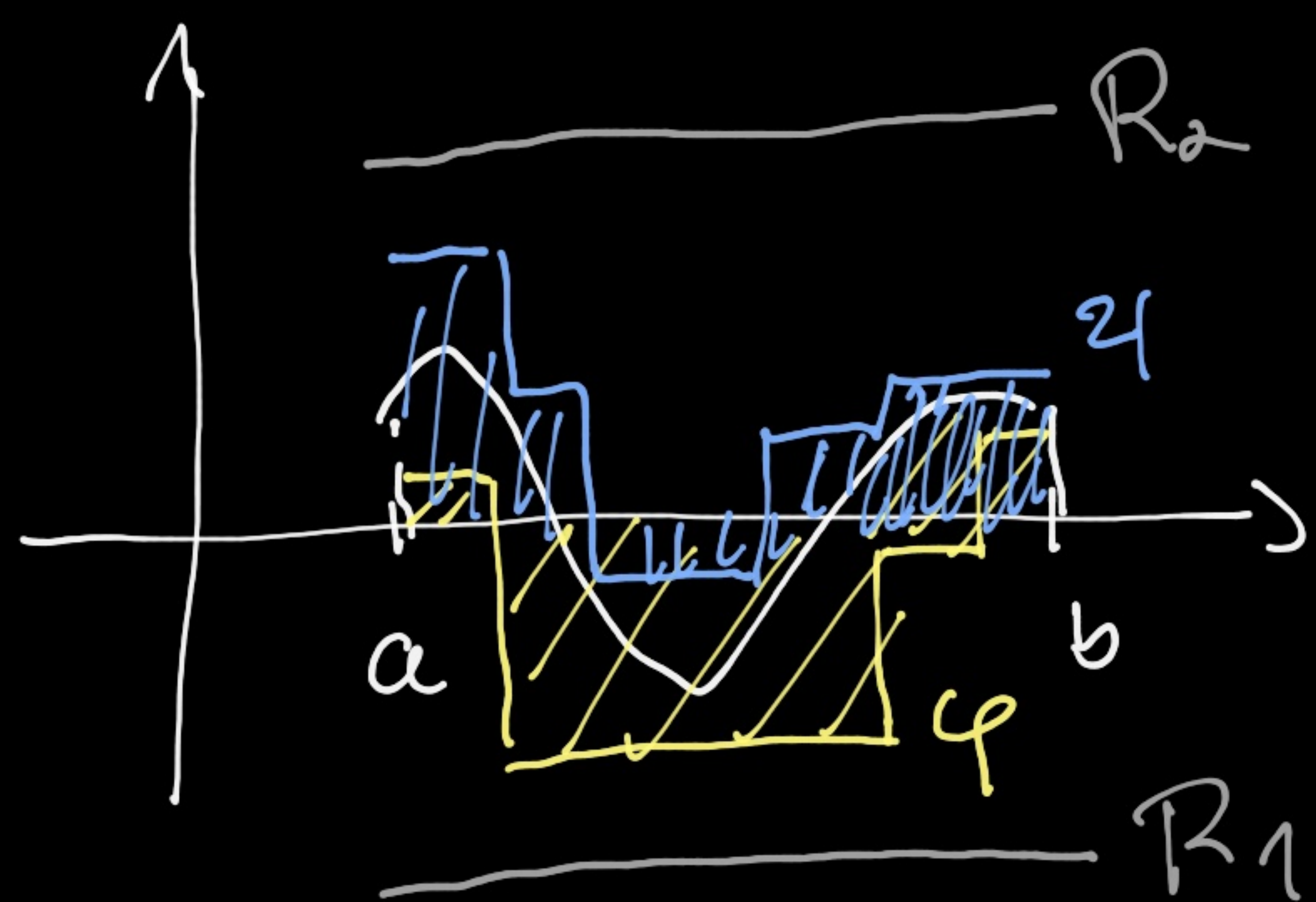
Denn: $a = x_0 < x_1 = b$ ist zulässige Zerlegung.

Also $\int_a^b f(x)\,dx = (x_1 - x_0)\cdot 1 = b-a$ ✓



$$\int_a^b \varphi_1(x)\,dx \le \int_a^b \varphi_2(x)\,dx \le \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{"Fläche unter } f\text{"}}$$

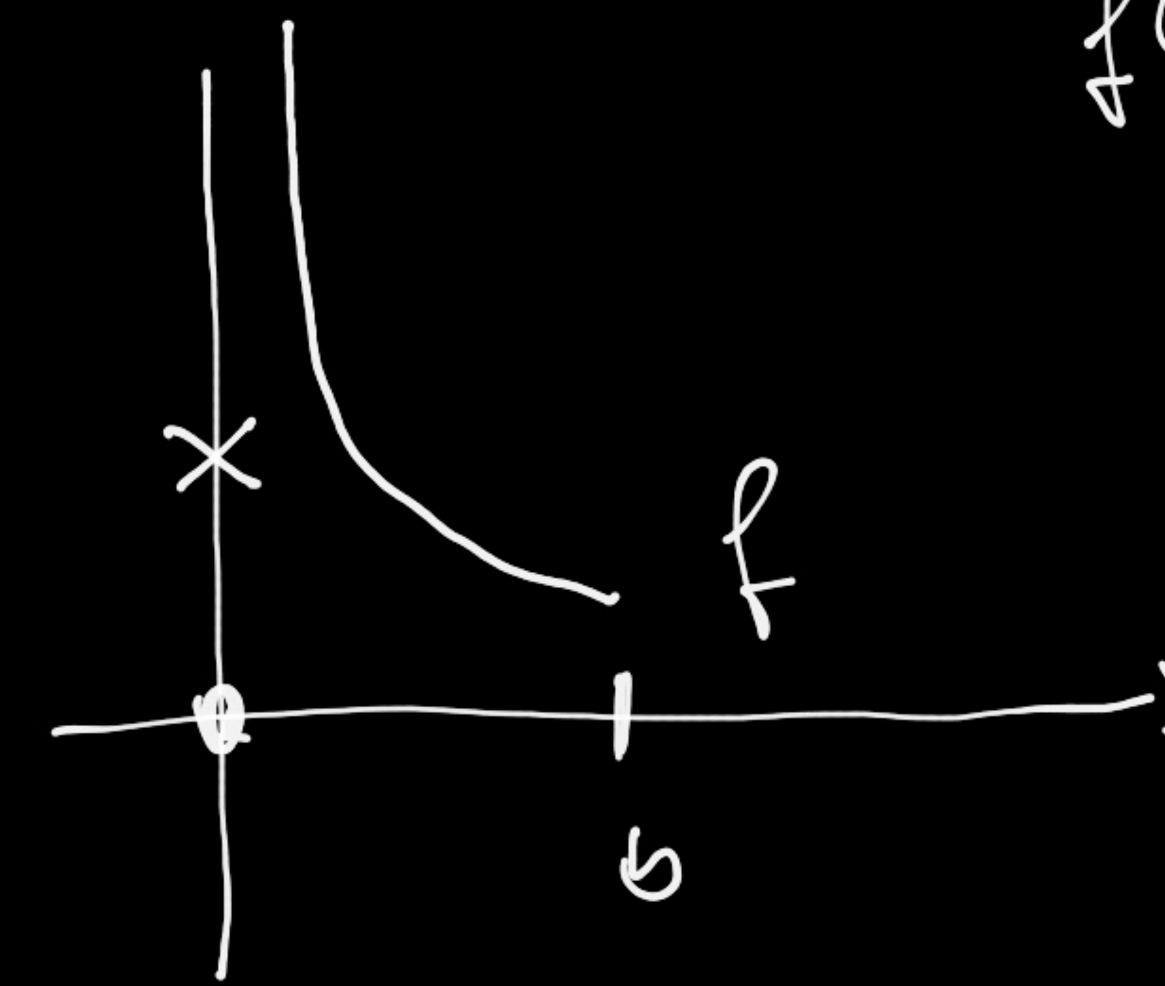
Ziel: Einführung von $\int_a^b f(x)\,dx$ für "geeignete" Funktionen.



φ "$\leq$" f

f "$\leq$" ψ

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 42 & x = 0 \end{cases}$$



3.4 Def: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, falls:

Es gibt Zahlen R_1, R_2 mit:

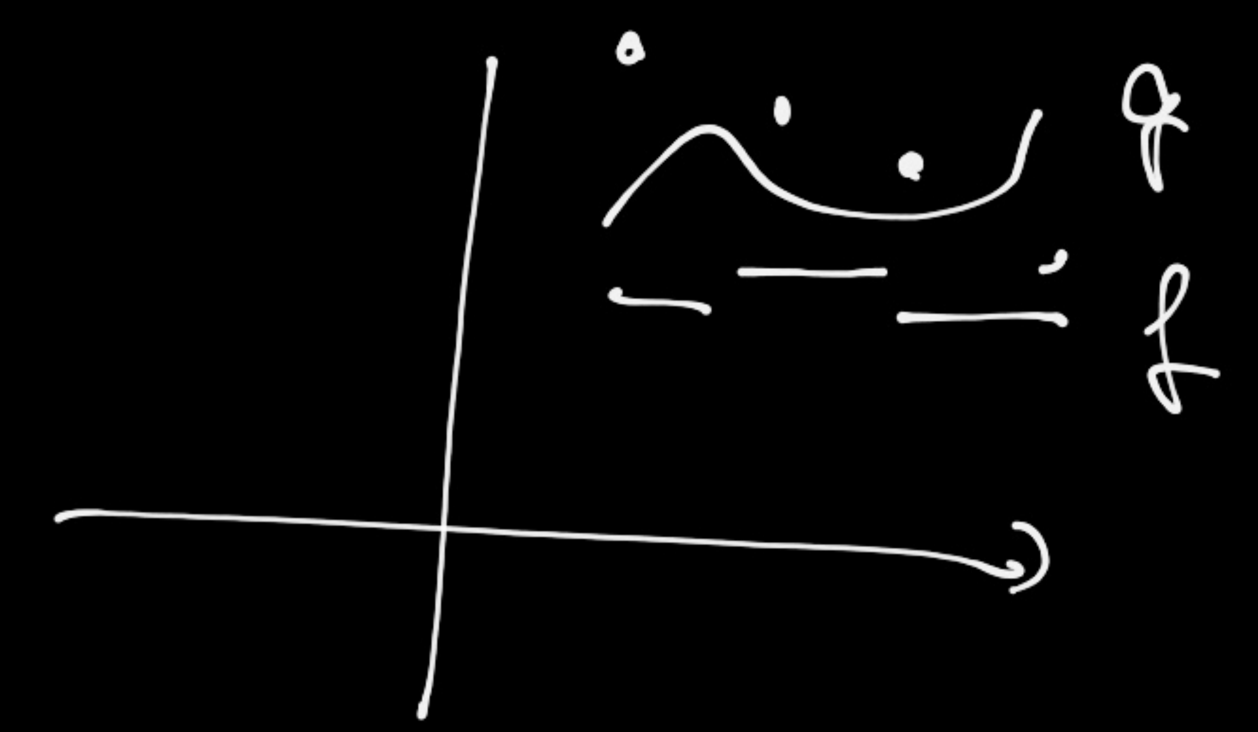
$$R_1 \leq f(x) \leq R_2 \quad \text{für alle } x \in D$$

Notiz: Integration zunächst nur für beschränkte Funktionen.

3.5 Def:

Vorgelegt sind Funktionen $f, g: D \to \mathbb{R}$.

Schreibe $f \leq g$, falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$ mit endlich vielen Ausnahmen gilt.



3.6 Def: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion,

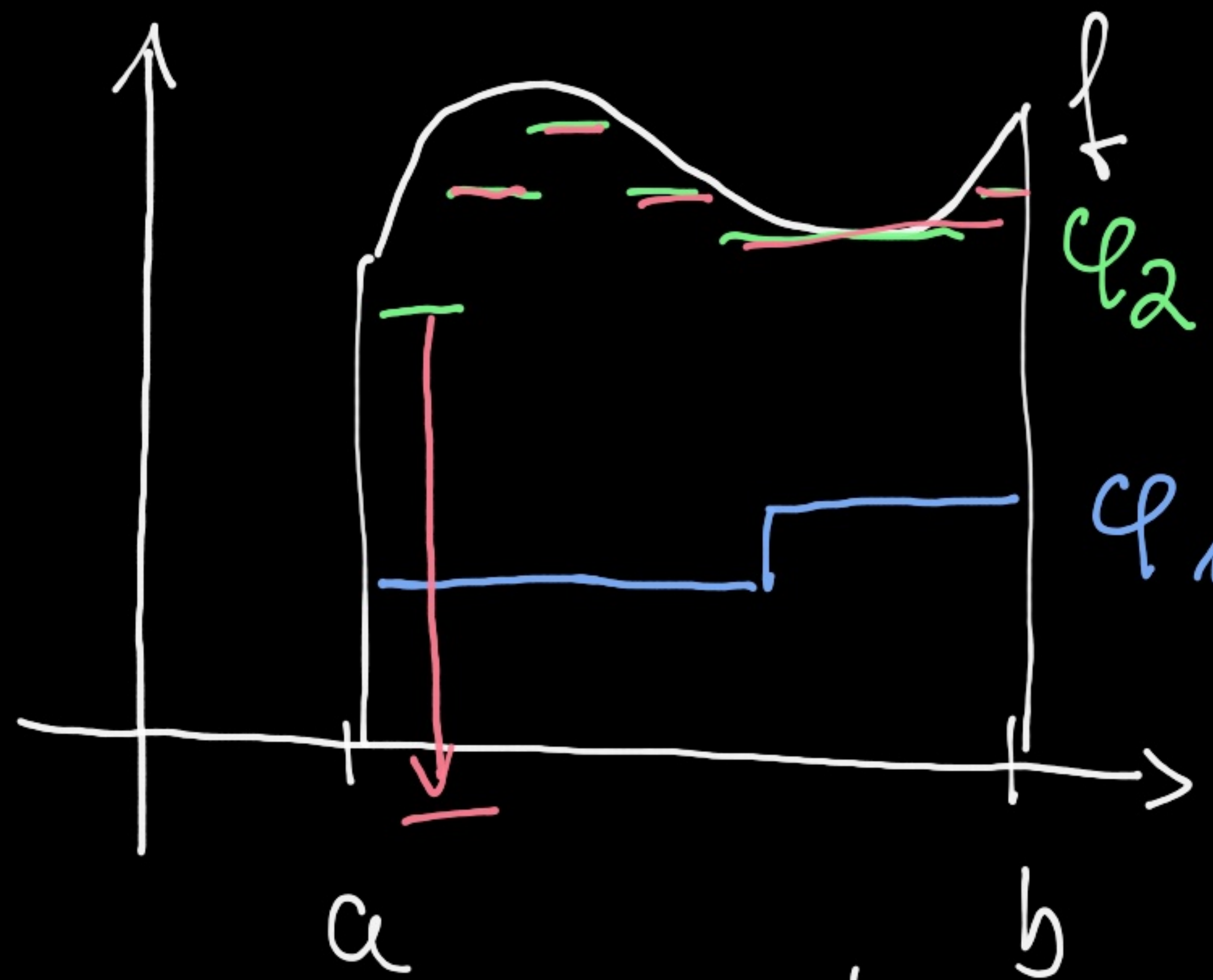
$\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion

(a) Falls $\varphi \leq f$ ist, so heißt $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ Untersumme von f.

(b) Falls $\varphi \geq f$ ist, so heißt $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ Obersumme von f.

Idee:

Flächeninhalt "$\int_a^b f(x)\,dx$"



$\varphi_2 \leq f$

$\varphi_1 \leq f \rightsquigarrow \int_a^b \varphi_1(x)\,dx \leq$ "$\int_a^b f(x)\,dx$"

$$\underline{U} = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \;\middle|\; \varphi \leq f \text{ Treppenfunktion} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Menge aller Untersummen von f.

Gilt: $i \in \underline{U}$ und $j \leq i \rightsquigarrow j \in \underline{U}$.

Folgt: $\underline{U}$ ist nach links unbeschränktes Intervall,

d.h. $\underline{U} = (-\infty, u]$ oder $\underline{U} = (-\infty, u)$; $u = \int_a^b f(x)\,dx$

3.7 Unterintegral

Vorgelegt ist eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$;
etwa $R_1 \le f \le R_2$ für passende $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$.

Setze $\underline{U} = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \;\middle|\; \varphi \le f \text{ Treppenfunktion} \right\}$

(Menge aller Untersummen von f)

- $R_1 \cdot (b-a) = \int_a^b R_1\,dx \in \underline{U}$
- $i \in \underline{U} \rightsquigarrow i = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ mit $\varphi \le f \le R_2$,

  also $i \le \int_a^b R_2\,dx = R_2 \cdot (b-a)$

d.h. $\underline{U}$ ist nach rechts beschränkt.

Satz: $\underline{U}$ ist ein nach links unbeschränktes Intervall,
genauer: Es gibt $u \in \mathbb{R}$ mit $\underline{U} = (-\infty, u]$
oder $\underline{U} = (-\infty, u)$

3.7 Unterintegral (Forts.)

Vorgelegt ist eine <u>beschränkte</u> Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$;

Setze $\underline{U} = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \;\middle|\; \varphi \le f \text{ Treppenfunktion} \right\}$

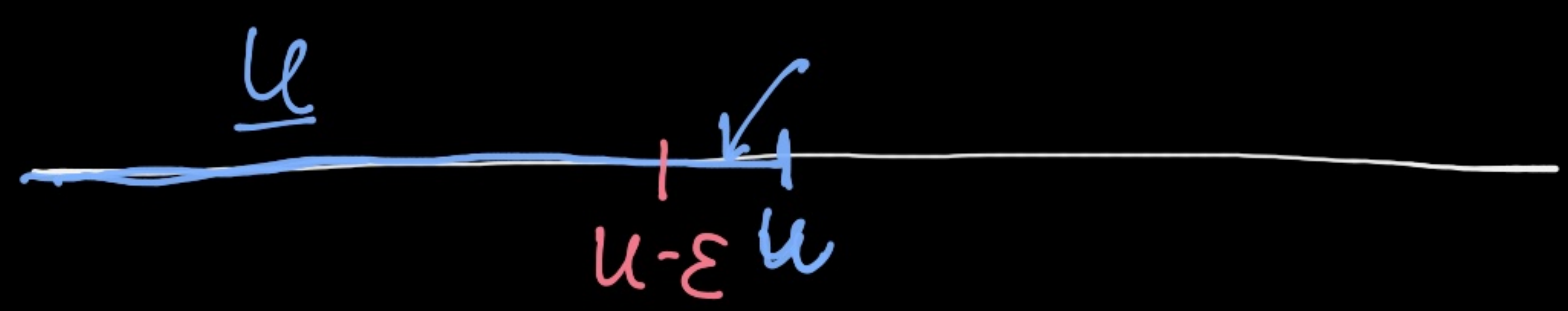
(Menge aller Untersummen von f)

Es gibt $u \in \mathbb{R}$ mit $\underline{U} = (-\infty, u]$ oder $\underline{U} = (-\infty, u)$.

$u = \max \underline{U}$

u heißt Unterintegral von f, geschrieben

$$u = \underline{\int}_a^b f(x)\,dx$$ ← das ist eine Zahl!



Kennzeichnende Eigenschaften:

- u ist größer (gleich) <u>jeder</u> Untersumme
- Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Untersumme $i \in \underline{U}$ mit $u - \varepsilon < i$.

3.8 Oberintegral

Vorgelegt ist eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$;

Setze $\underline{O} = \{ \int_a^b \psi(x)\,dx \mid \psi \geq f \text{ Treppenfunktion} \}$

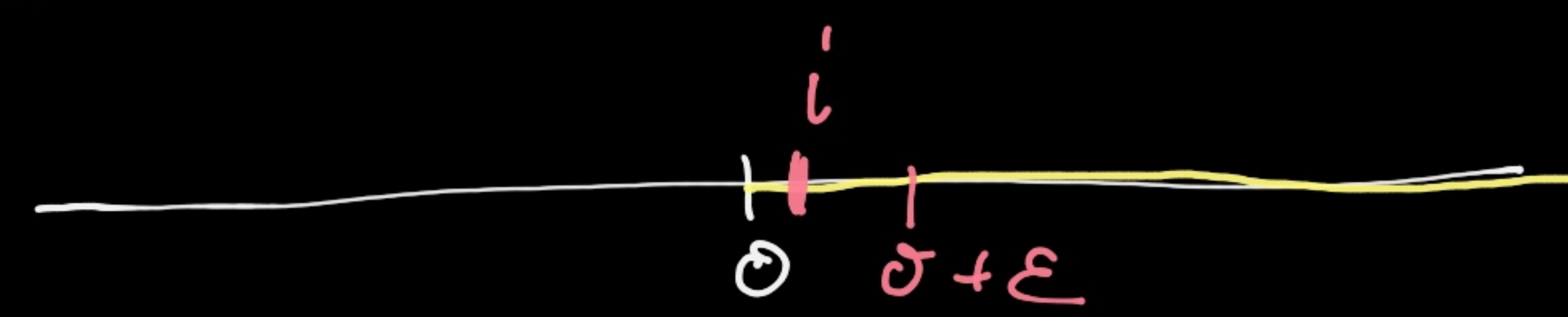
(Menge aller Obersummen von f)

Es gibt $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $\underline{O} = [\sigma, \infty)$ oder $\underline{O} = (\sigma, \infty)$.

$\sigma = \min \underline{O}$

σ heißt Oberintegral von f, geschrieben

$$\sigma = \int_a^b f(x)\,dx$$ ← das ist eine Zahl!



Kennzeichnende Eigenschaften:

- σ ist kleiner (gleich) jeder Obersumme
- Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Obersumme $i \in \underline{O}$ mit $i < \sigma + \varepsilon$

<u>Notiz</u>: $i \in \underline{U}$, also $i = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ mit $\varphi \le f$

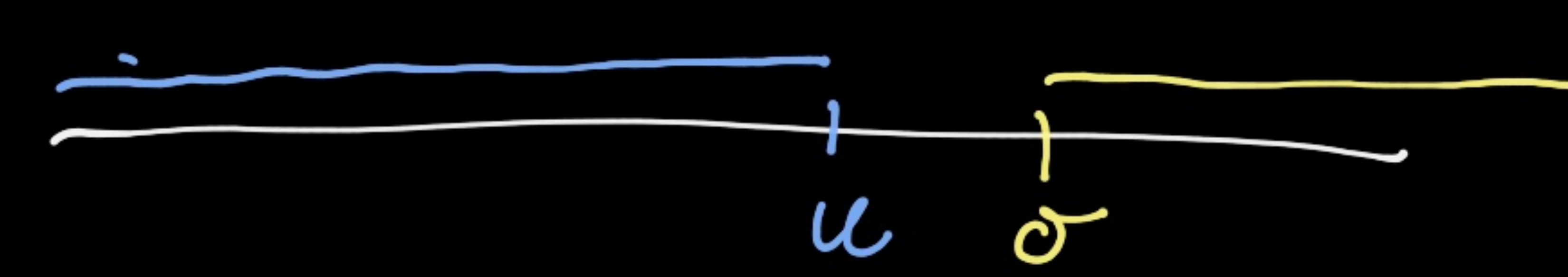
und $j \in \underline{O}$, also $j = \int_a^b \psi(x)\,dx$ mit $\psi \ge f$

Dann $\varphi \le f \le \psi$

Monotonie: $i = \int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx = j$

$\underline{U} = (-\infty, u)$ oder $(-\infty, u]$

$\underline{O} = (o, \infty)$ oder $[o, \infty)$



Es gilt $u \le o$

bzw. $$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}$$

3.9 Def

Vorgelegt ist eine <u>beschränkte</u> Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, so heißt f (auf $[a, b]$) integrierbar und die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \left(= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \right)$$

das Integral der Funktion f.

3.10 Beispiel (einer nicht-integrierbaren Funktion)

Die Dirichlet-Funktion $\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ist auf $[a,b] = [0,1]$ nicht integrierbar

Treppenfunktion $\varphi \leq \delta$, zulässige Zerlegung

$0 = x_0 < \dots < x_n = 1$ mit

$\delta(x) = c_j$ für $x_{j-1} < x < x_j$

In (x_{j-1}, x_j) gibt es eine irrationale Zahl u,

also gilt $c_j \leq \delta(u) = 0$.

beachte $\varphi \equiv 0 \leq \delta$

und $\int_0^1 0 \, dx = 0$

Folgt: $\int_0^1 \varphi(x)\, dx \leq 0$.

Hieraus erhalte: $\int_0^1 \delta(x)\, dx = 0$

Ähnlich: $\int_0^1 \delta(x)\,dx = 1$

$$\neq \int_0^1 \delta(x)\,dx$$

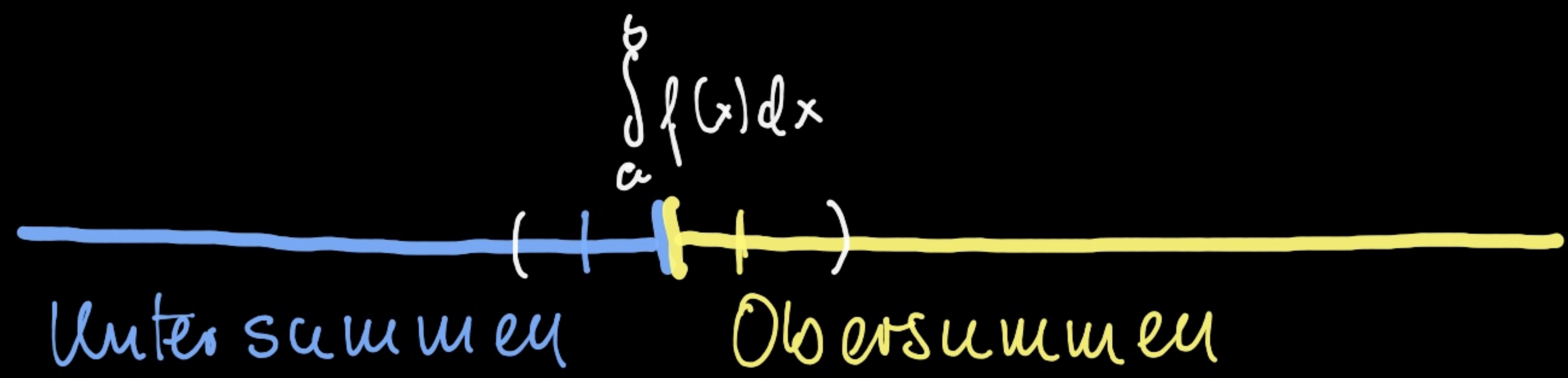
Folgt: $\delta(x)$ ist nicht integrierbar

3.12 Satz (o. Bew.)

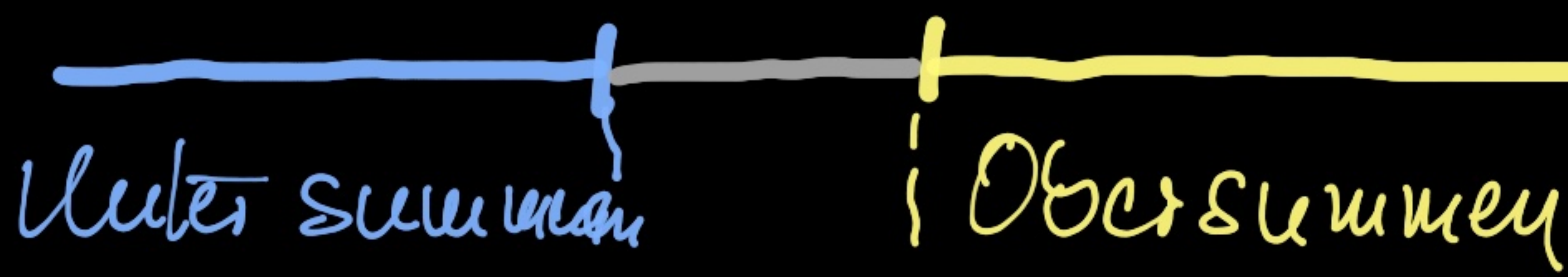
Vorgelegt: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f integrierbar.

§3 / S.18



INTEGRIERBAR



NICHT INTEGRIERBAR

3.13 Folgen und Grenzwerte

Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Folge.

$\{0, 1, 2, \dots\}$ natürliche Zahlen

Bsp: $a(n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

Grenzwert der Folge a ist $\lim_{n \to \infty} a(n)$, $= L$

wenn diesen gibt D.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es N sod.

für alle $n \geq N$ gilt: $|a(n) - L| < \varepsilon$.

3.14 Satz:

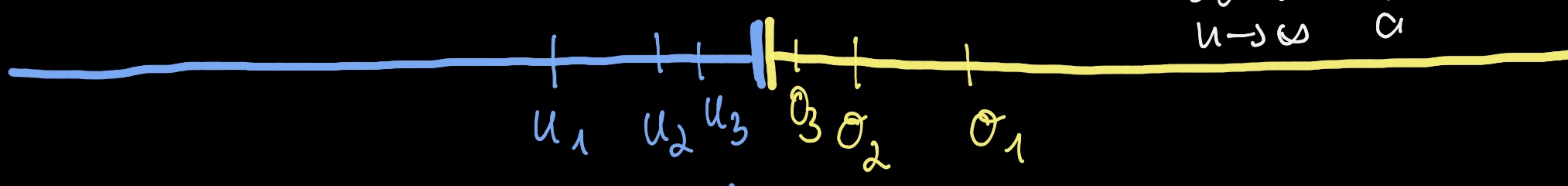
Vorgelegt ist eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) f ist integrierbar mit Integral $\mathcal{J} = \int_a^b f(x)\,dx$

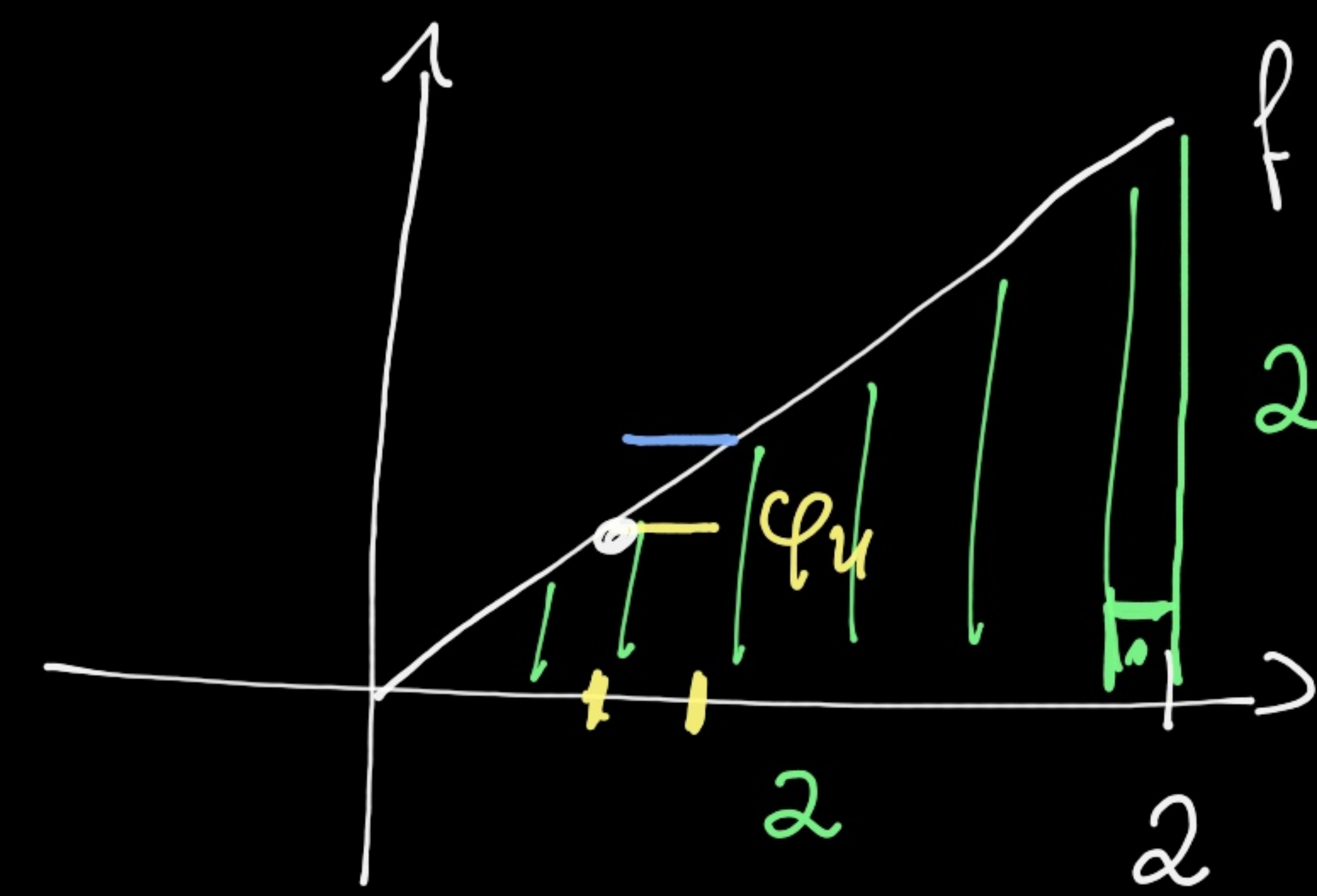
(b) Es gibt Treppenfunktionen $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, $n \in \mathbb{N}$,

mit $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \psi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\psi_n(x) - \varphi_n(x)\right) dx = 0$$

Dann gilt: $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx.$$



<u>Übung</u>: $\int_0^2 x \, dx = ?$



$$\int_0^2 f(x)\,dx \overset{?}{=} 2$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ definiere geeignete Treppenfunktionen $\varphi_n \le f \le \psi_n$, nämlich:

Zerlegung $0 < \frac{2}{n} < 2 \cdot \frac{2}{n} < \dots < n \cdot \frac{2}{n} = 2$

Setze für $(j-1) \cdot \frac{2}{n} < x < j \cdot \frac{2}{n}$ $\quad (j = 1, \dots, n)$

$$\varphi_n(x) = (j-1) \cdot \frac{2}{n}$$

$$\psi_n(x) = j \cdot \frac{2}{n}$$

Daher: $\psi_n(x) - \varphi_n(x) = \frac{2}{n}$

$\psi_n(x) - \varphi_n(x) = \frac{2}{n}$ auf jedem Teilungsintervall

$$\left((j-1)\frac{2}{n} \,,\; j\cdot\frac{2}{n} \right)$$

$$\int_0^2 \left(\psi_n(x) - \varphi_n(x) \right) dx =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n} - 0\right) + \underbrace{\frac{2}{n}\cdot\left(2\cdot\frac{2}{n} - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{2}{n}\cdot\left(n\cdot\frac{2}{n}\right.}_{n \text{ Summanden}}\left. - (n-1)\cdot\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n} + \ldots + \frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n} = n\cdot\frac{4}{n^2} = \frac{4}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \left(\psi_n(x) - \varphi_n(x) \right) dx = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0.$$

(3.14):
- $f(x) = x$ ist auf $[0,2]$ integrierbar
- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 \psi_n(x)\, dx$ existiert
- und $= \int_0^2 f(x)\, dx$.

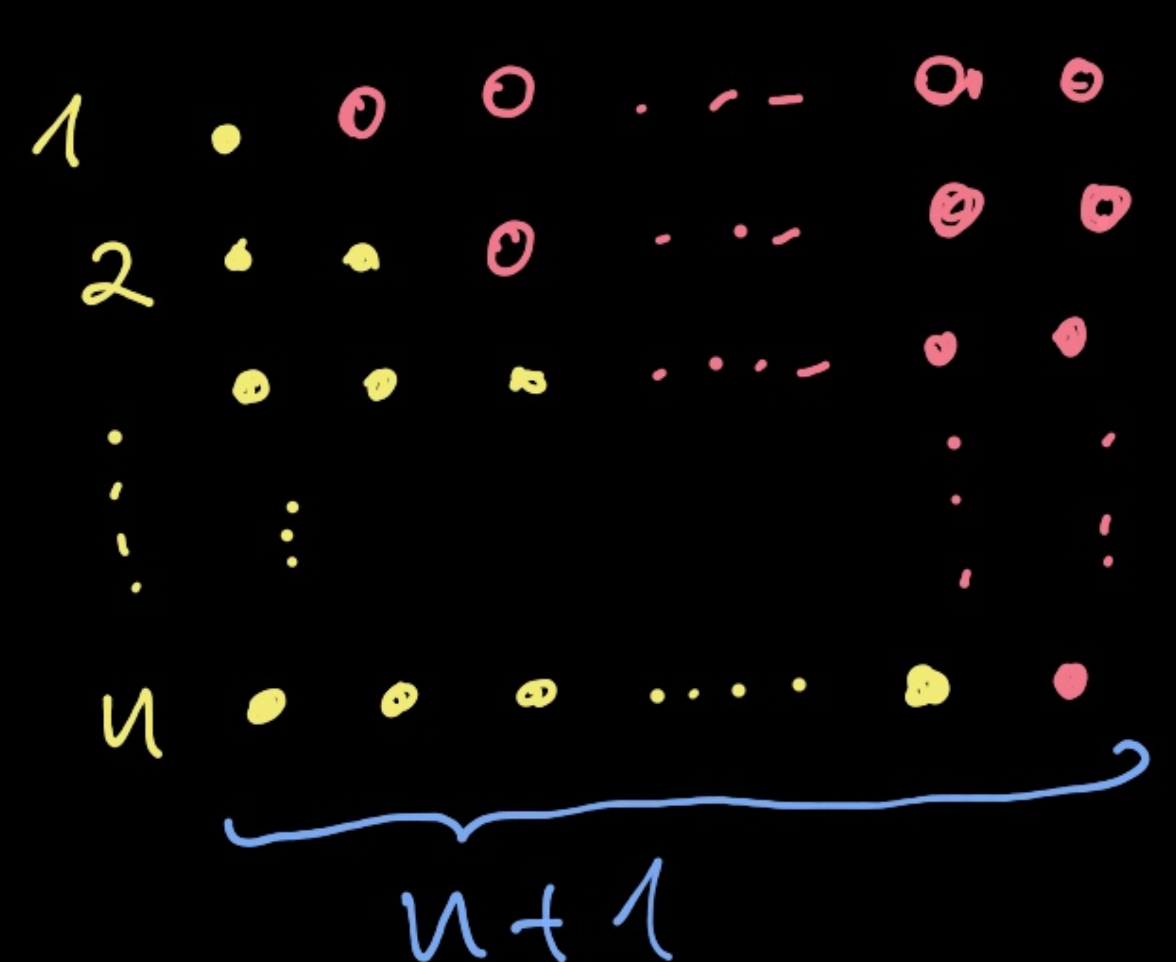
$\tau_n(x) = j\cdot\frac{2}{n}$ auf $\left((j-1)\cdot\frac{2}{n},\ j\cdot\frac{2}{n}\right)$, $j = 1, \dots, n$.

$$\int_0^2 \tau_n(x)\,dx = \frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n} + 2\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n} + 3\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n} + \dots + n\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \frac{4}{n^2}\cdot(1+2+3+\dots+n) = \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Gaußsche Summenformel $\quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

z.B. $1+2+\dots+100 = 5050$



$\leftarrow \quad 2\cdot(1+2+\dots+n)$ Punkte

$= n\cdot(n+1)$

wie gewünscht!

Also: $$\int_0^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^2 \tau_n(x)\,dx \overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \underline{\underline{2}}$$

Hausaufgabe 08A

Zeige, dass $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0,1]$ integrierbar ist, und berechne $\int_0^1 x^2 \, dx$.

Hinweis: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

Notiz: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$

Also $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

3.15 Rechenregeln für Integrale:

Vorgelegt: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $r \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

(a) $f+g$ ist integrierbar mit $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(b) $r \cdot f$ ist integrierbar mit $\int_a^b r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

(c) (Monotonie des Integrals)

Ist $f \leq g$ (endlich viele Ausnahmen erlaubt),

so gilt $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(d) $\int_a^b 1\,dx = b - a$

Nachweis von (b) für $r > 0$

(Den Rest lassen wir weg)

f ist integrierbar, d.h. es gibt Treppenfunktionen

$\varphi_n \le f \le \psi_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\,dx = 0$

und $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$

$\tilde{\varphi}_n = r \cdot \varphi_n$ und $\tilde{\psi}_n = r \cdot \psi_n$ sind wieder Treppenfunktionen;

wg. $r > 0$ gilt $\tilde{\varphi}_n = r \cdot \varphi_n \le r \cdot f \le \tilde{\psi}_n$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\tilde{\psi}_n(x) - \tilde{\varphi}_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(r\,\psi_n(x) - r\,\varphi_n(x)\right) dx$$

$$= r \cdot \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\psi_n(x) - \varphi_n(x)\right) dx = r \cdot 0 = 0,$$

d.h. $r \cdot f$ ist integrierbar; Rest genauso.

3.16 Intervalladditivität

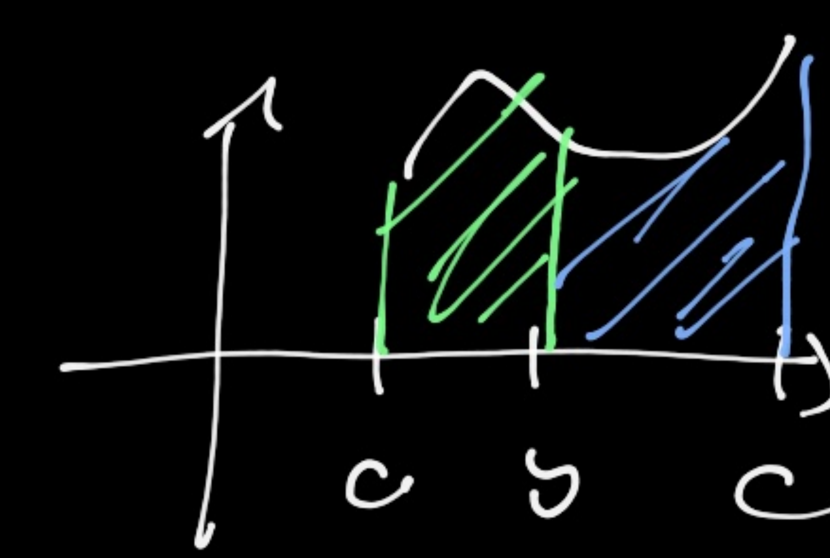
Vorgelegt $a < b < c$, $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann sind gleichwertig

(1) f ist auf $[a,c]$ integrierbar

(2.) f ist sowohl auf $[a,b]$ als auch auf $[b,c]$ integrierbar.

Dann gilt: $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



Notiz: Setze $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

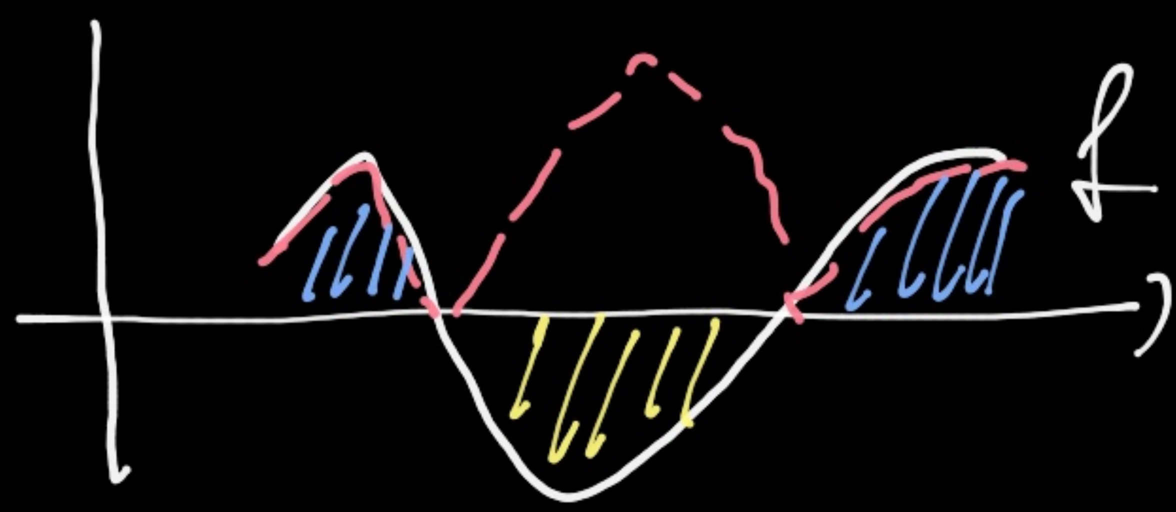
sowie $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dann gilt (3.16) auch ohne Vor. "$a < b < c$"

3.17 Stetigkeit des Integrals

Vorgelegt: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

Betrachte die Funktion $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$



Dann gilt:

$|f|$ ist auf $[a,b]$ integrierbar

und $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Notiz: Gilt $|f(x)| \leq R$ für alle x,

so folgt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \overset{(3.17)}{\leq} \int_a^b |f(x)|\,dx \overset{\substack{\text{Monotonie}\\ \downarrow}}{\leq} \int_a^b R\,dx = R \cdot (b-a)$$

3.18 Das Supremum (Infimum analog ...)

Vorgelegt: $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$

- Eine Zahl R heißt obere Schranke von M, falls $m \le R$ für alle $m \in M$ gilt.

- Eine Zahl z heißt Supremum von M, falls z eine obere Schranke von M ist, aber $z - \varepsilon$ für kein $\varepsilon > 0$ eine obere Schranke von M ist.

Gleichwertig:
- $z \geq m$ für alle $m \in M$
- zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in M$ mit $z - \varepsilon < m$.

Notiz: z ist eindeutig bestimmt; schreibe $z = \sup M$.

Supremumsvollständigkeit von $\mathbb{R}$: Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, nach oben beschränkt, so besitzt M ein Supremum.

3.19 Die Supremumsnorm

Vorgelegt: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar (insbesondere ist f beschränkt)

Dann gibt es die Zahl:

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{ |f(x)| \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$$

Diese Zahl heißt Supremumsnorm von f.

Hinweis: Für stetiges f ist $\|f\|_\infty$ der größte Funktionswert.

Es gilt
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty$$

Denn:
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b \underbrace{\|f\|_\infty}_{\text{Zahl}}\,dx = \|f\|_\infty \cdot (b-a)$$

Notiz:

$\mathrm{Int}[a,b]$ = Menge aller integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$.

$\mathcal{I} : \mathrm{Int}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ per $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ erklärt.

Sei $f \in \mathrm{Int}[a,b]$ und $\varepsilon > 0$.

Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$

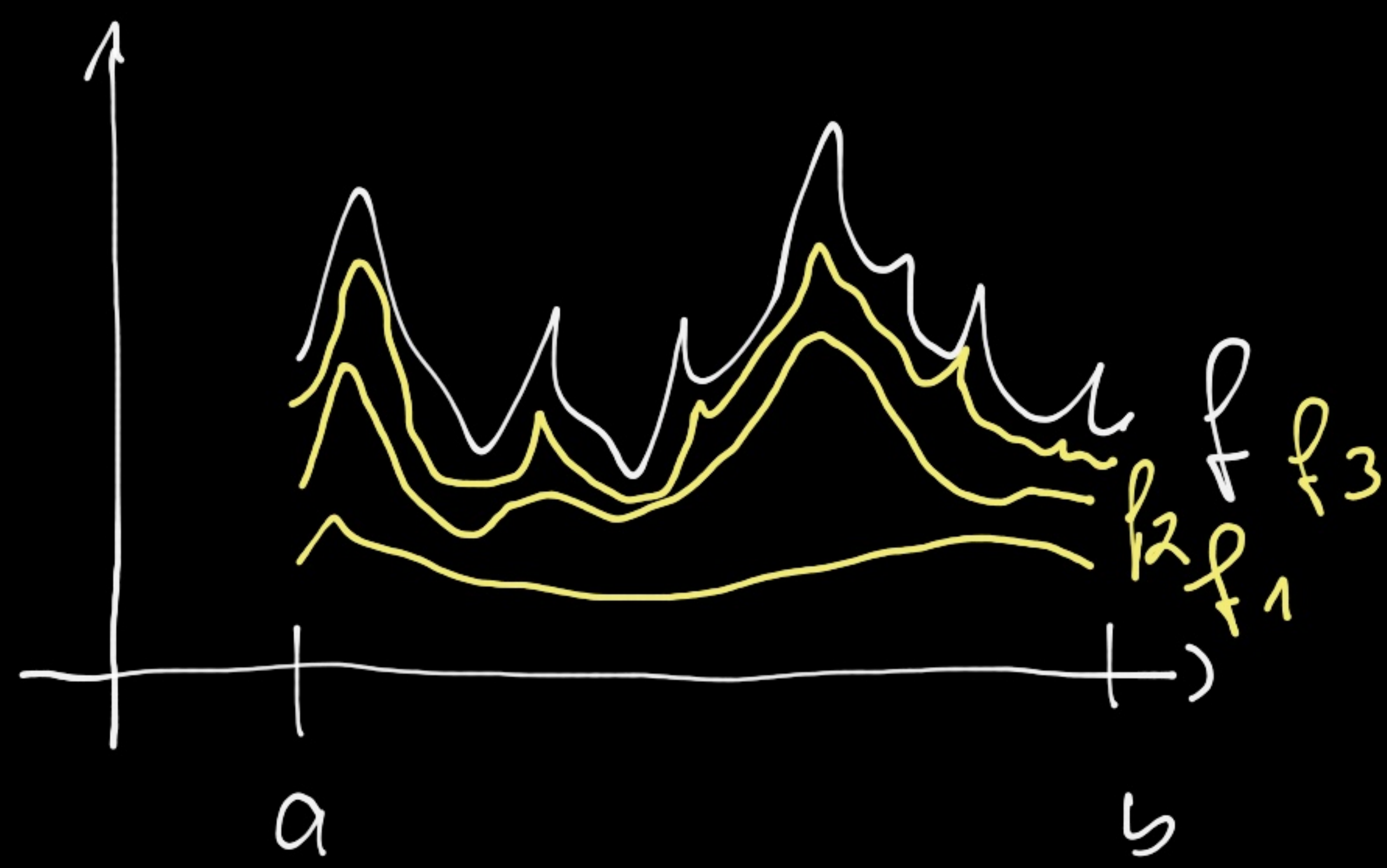
"Abstand" zwischen f und g

Betrachte $g \in \mathrm{Int}[a,b]$ mit $\| g - f \|_\infty < \delta$.

Dann gilt $|\mathcal{I}(g) - \mathcal{I}(f)|$

$$= \left| \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq (b-a) \cdot \| g - f \|_\infty < (b-a) \cdot \delta = \varepsilon$$



$\rightarrow \quad f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots \xrightarrow{n \to \infty} f$

Hätte gerne $\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Sprechweise</u>: Hat man für jede natürliche Zahl n eine Funktion $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so nennt man $f_1, f_2, f_3, \dots$ eine **Funktionenfolge**.

<u>Beispiel</u> $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

Notiz: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$

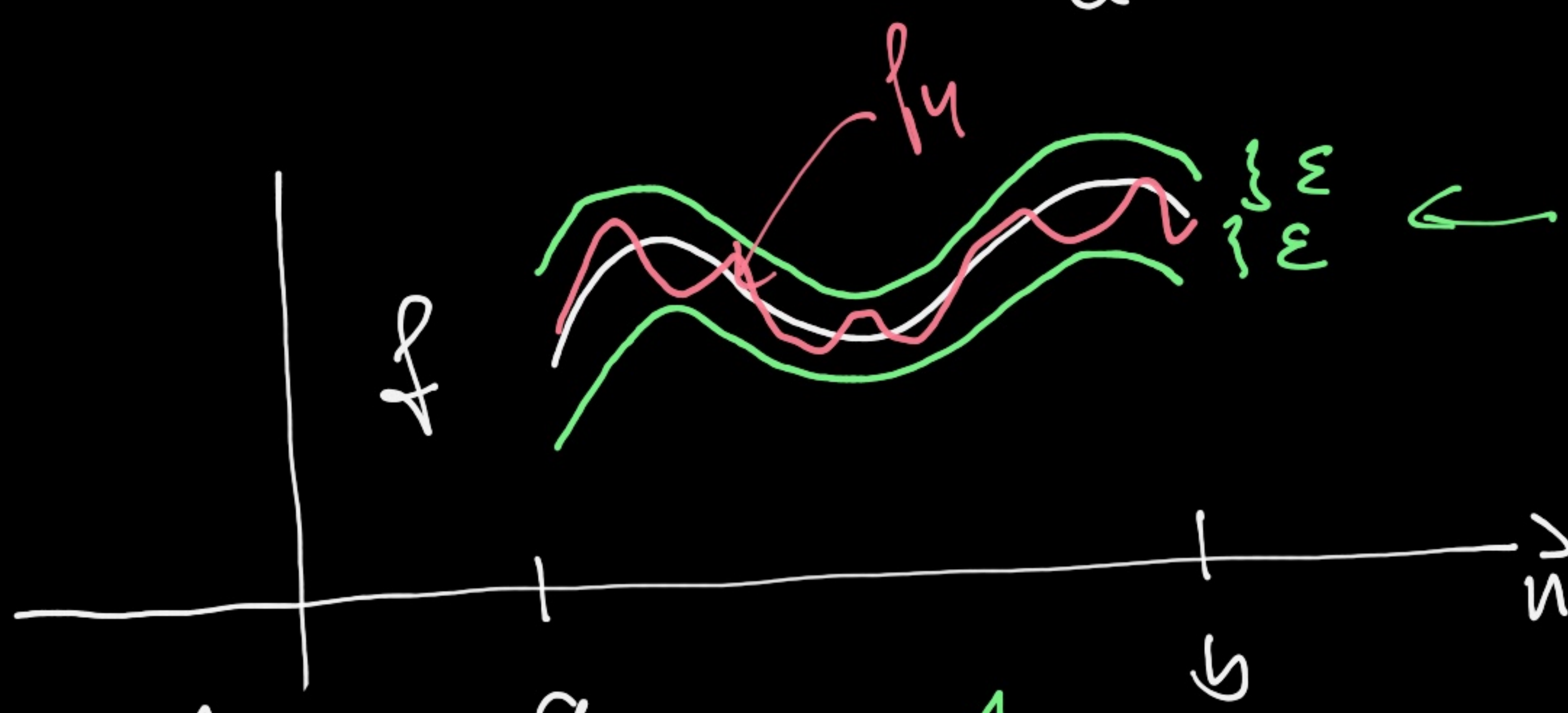
$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(1) = 1$

<u>Sprechweise</u>: Die Funktionenfolge $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, falls $\lim\limits_{n \to \infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$

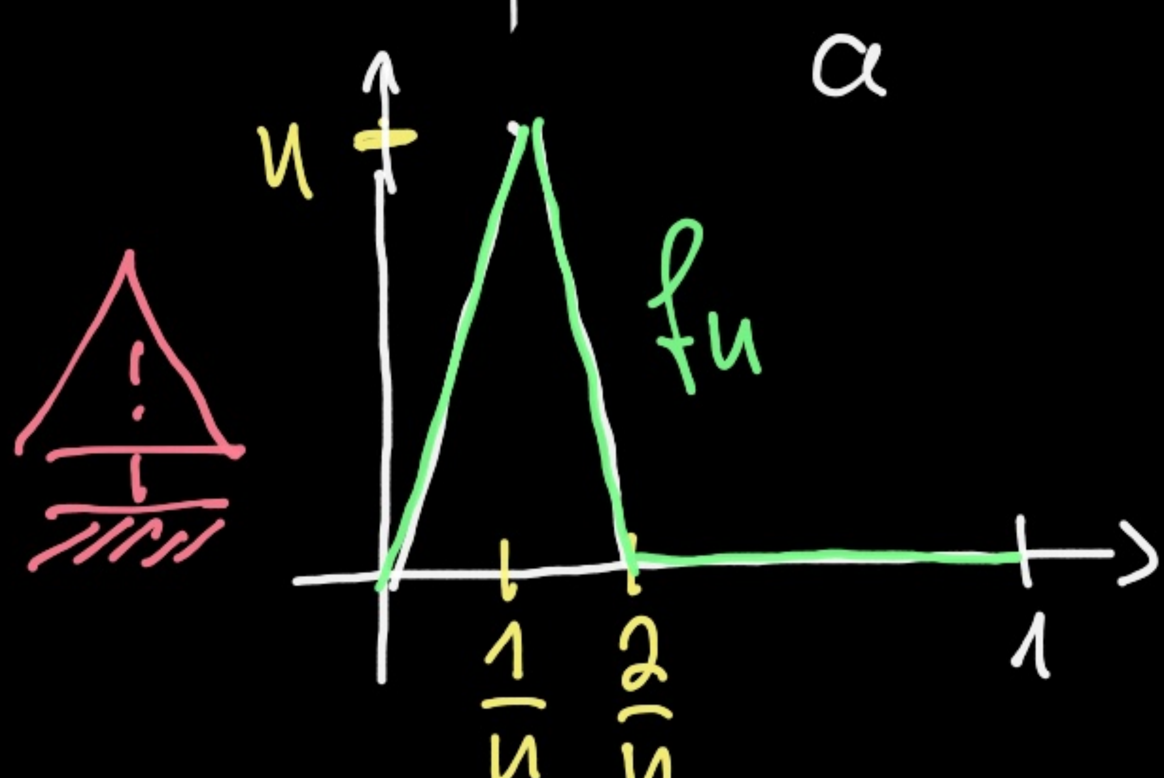
3.20 **Satz** Besteht die Funktionenfolge $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ aus integrierbaren Funktionen, und konvergiert $f_1, f_2, \dots$ gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

so ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$



← im "ε - Schlauch" liegen alle f_n für n groß



$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ (Dreiecksfläche)

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für jedes x ("Grenzfunktion" $f(x) = 0$)

Aber $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$

BRAUCHE GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ

3.21 Regelfunktionen

Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, wenn es eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ von Treppenfunktionen gibt.

integrierbar

Klar: Jede Regelfunktion ist integrierbar

3.22 Satz (o. Bew.)

Jede stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.

$\boxed{\text{Jede stetige Funktion } f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ist integrierbar.}}$