§4: Der Hauptsatz

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$ Vor. f ist stetig

F heißt <u>Stammfunktion</u> von f, falls $F' = f$

<u>Bsp</u>: $f(x) = x^2 \rightsquigarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3$ Stammfunktion,

denn $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$ ✓

Dann: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

<u>Bsp</u>: $\int_1^2 x^2\,dx \overset{\text{Hauptsatz}}{=} F(2) - F(1) = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Stammfunktion: $\frac{1}{3}x^3 = F(x)$

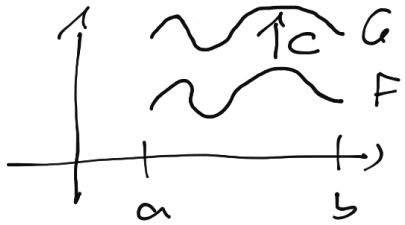
<u>Hauptsatz</u>: Ist f stetig auf $[a,b]$ und $x_0 \in [a,b]$, so ist $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

Hauptsatz: Ist f auf $[a,b]$ stetig und $x_0 \in [a,b]$, so ist $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

Es gilt: Sind $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von f, so gibt es ein c mit $G(x) = F(x) + c$ f. alle x

Denn: $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x)$

$= f(x) - f(x) = 0$ f. alle $a \le x \le b$



Also (§ 2): Es gibt c mit

$F(x) - G(x) = c$ bzw. $F(x) = G(x) + c$ für alle x. ✓

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

Folgt $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt$

$= \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt \overset{\text{Hauptsatz}}{=} F(b) - F(a)$

$= (F(b) + c) - (F(a) + c) = G(b) - G(a)$ ✓

Speziell: $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{7}{3}$

<u>Anwendung</u>: $\pi^{\sqrt{2}} = ?$

$= \left(e^{\ln \pi}\right)^{\sqrt{2}}$

$= e^{\sqrt{2} \cdot \ln \pi}$

$e = 2{,}7\ldots$

$(e^x)' = e^x$

$\ln x$ Umkehrfkt.

Erinnerung: e^x ist streng monoton wachsend und differenzierbar, also gibt es Umkehrfkt. $\ln$.

$(x>0)$: $x = e^{\ln x} \rightsquigarrow 1 = (\ln x)' \cdot e^{\ln x} = (\ln x)' \cdot x$

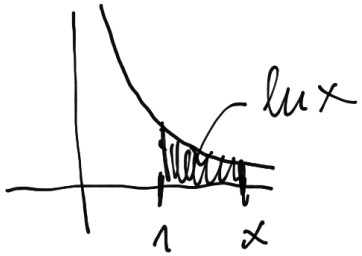
bzw. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ stetig.

HAUPTSATZ. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \overset{\text{Def}}{=} \ln x$ diff'bar

$(x>0)$

Stammfkt. von $\frac{1}{x}$ mit $F(1) = \ln 1 = 0$.



$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ für $x > 0$

4.1 Stammfunktionen

I Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$.
Eine Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f (auf I), falls F auf I diff'bar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

4.2 Satz (I Intervall)
Sind F, G zwei Stammfunktionen von f auf I, so gibt es eine Zahl c, sod.

$$G(x) = F(x) + c \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis: Nach Vor. $F'(x) = f(x) = G'(x)$

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{f. alle } x$$

(2.19): Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) - F(x) = c$ f. alle x

bzw. $G(x) = F(x) + c$ für alle x.

Bsp: $f(x) = x^2$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist Stammfunktion (gerechnen)

Also $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ — " — $((F(x)+c)' = F'(x))$

$(c \in \mathbb{R})$

und mehr Stammfunktionen gibt es nicht.

Sprechweise: unbestimmtes Integral

$\int f(x)\,dx$ bezeichnet die Menge aller Stammfunktionen von f.

Also $\int x^2\,dx = \left\{ \frac{1}{3}x^3 + c \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$

suche eine Stammfunktion aus!

Schreibe $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 42$ $(+c,\ c \in \mathbb{R})$

Liste einiger Stammfunktionen

Für $n \neq -1$ ist $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$, denn:

$$\left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)' = (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1-1} = x^n.$$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x$, $\int e^x \, dx = e^x$

$\int \sin x \, dx = -\cos x$, $\int \cos x \, dx = \sin x$,

$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x$ usw.

denn $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

<u>Notiz</u> F Stammfkt von f, G Stammfkt von g

Dann: $F+G$ Stammfkt von $f+g$,

denn $(F+G)' = F' + G' = f + g$

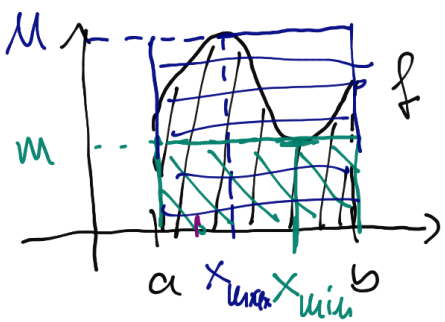
4.3 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung (MWS-I)

Vorgelegt ist eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann gibt es ein $p \in [a,b]$ mit

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{exist. (3.22)}} = f(p)\cdot(b-a)$$

Beweis



MinMax: Es gibt $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit $m = f(x_{min}) \le f(x) \le M = f(x_{max})$ für alle x gilt.

Monotonie des Integrals:

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{} \le M\cdot(b-a)$$

$m\cdot(b-a) = f(x_{min})\cdot(b-a)$ und $M\cdot(b-a) = \boxed{z}\ f(x_{max})\cdot(b-a)$

sind Werte der stetigen Fkt $h(x) = f(x)\cdot(b-a)$; z liegt dazwischen

ZWS: Gibt $p \in [a,b]$ mit $f(p)\cdot(b-a) = h(p) = z = \int_a^b f(x)\,dx$ ∎

4.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Vorgelegt ist ein Intervall I, eine stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in I$. Dann gilt:

(a) Die Funktion $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f auf I,

existiert für jedes x, denn f stetig

d.h. $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)$.

(b) Ist G eine bel. Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \overset{\text{Def.}}{=} [G(x)]_a^b$

für $a, b \in I$.

<u>Beweis von a)</u>: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$$

Intervalladditivität

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

MWSI: Gibt $p \in I$ mit $f(p)\cdot(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, h\cdot f(p)$$

mit p zwischen x und $x+h$

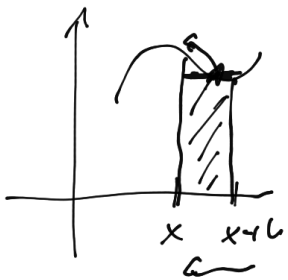
also $p = x + \tau_{x,h}\cdot h$ mit $\tau_{x,h} \in [0,1]$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+\tau_{x,h}\cdot h) \overset{!}{=} f(x),$$

denn: $|(x+\tau_{x,h}\cdot h) - x| = |\tau_{x,h}\cdot h| \leq |h|$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ sod. $|f(x+u) - f(x)| < \varepsilon$ für alle u mit $|u| < \delta$.

Also: $|f(\underbrace{x+\tau_{x,h}\cdot h}) - f(x)| < \varepsilon$ für $|h| < \delta$.



Das zeigt alles.

<u>Beweis von b)</u> :

Nach a) ist $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

Vorgelegt ist eine weitere Stammfunktion $G(x)$ von f.

Es gibt c mit $G(x) = F(x) + c$ für alle x

Folgt
$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + c) - (F(a) + c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt + \int_{a}^{x_0} f(t)\,dt \\ &= \int_{a}^{b} f(t)\,dt \end{aligned}$$

$\square$

Hausaufgabe 9A:

Vorgelegt sind stetige Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei $g(x) \geq 0$ für alle x gelten möge.

Zeige: Es gibt ein $p \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(p) \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

Für $g(x) = 1$ f. alle x erhält man hieraus den MWS-I, weshalb dieser Satz auch als verallgemeinerter Mittelwertsatz bezeichnet wird.

Hinweis: Passe den Beweis von MWS-I an.

4.5 Partielle Integration

Vorgelegt ist ein Intervall I.

$f: I \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, falls f diff'bar und f' stetig.

⚠ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist diff'bar, aber f' ist $x=0$ nicht stetig, also: f diff'bar, aber <u>nicht</u> stetig diff'bar.

Vorgelegt: $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar.

$$(f \cdot g)' = \underbrace{f'g + f \cdot g'}_{\text{stetig}}, \text{ also } f \cdot g \text{ Stammfunktion}$$

der stetigen Funktion $f' \cdot g + f \cdot g'$ bzw.

$$f \cdot g = \int (f'g + fg')\, dx = \int f'g\, dx + \int fg'\, dx$$

$$\boxed{\int f' g \, dx = f g - \int f \cdot g' \, dx}$$

partielle Integration

f, g stetig diff'bar

Eine Stammfunktion $M(x) = \int f'(x)\, g(x)\, dx$ erhält man, indem man eine Stammfunktion $Q(x) = \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$ bestimmt und dann $M(x) = f(x) \cdot g(x) - Q(x)$ setzt.

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = [M(x)]_a^b = M(b) - M(a)$$

$$= f(b) \cdot g(b) - f(a)\, g(a) + Q(a) - Q(b)$$

$$= [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \,, \quad \text{also}$$

$$\boxed{\int_a^b f' g \, dx = [f g]_a^b - \int_a^b f g' \, dx}$$

Beispiel $\int x \cdot \sin x \, dx = ?$

$$\int f g' \, dx = fg - \int f' g \, dx$$

Mögl. 1

$f(x) = x \rightsquigarrow f'(x) = 1$

$g(x) = -\cos x \leftsquigarrow g'(x) = \sin x$

Mögl. 2

$f(x) = \sin x \rightsquigarrow f'(x) = \cos x$

$g(x) = \frac{1}{2} x^2 \leftsquigarrow g'(x) = x$

$$\int x \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cos x \, dx$$

$$\underset{f \quad g'}{\int x \cdot \sin x \, dx} = \underset{f \cdot g}{-x \cos x} - \underset{f' g}{\int 1 \cdot (-\cos x) \, dx}$$ partielle Integration

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

Probe: $(-x \cos x + \sin x)' = -\cancel{\cos x} + x \sin x + \cancel{\cos x}$ ✓

<u>Beispiel</u>: $\int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{\cos x}\, dx = \underset{f \cdot g}{x^2 \sin x} - \underset{f' g}{\int 2x \sin x\, dx}$

$f'(x) = 2x \,, \quad g(x) = \sin x$

$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\, dx$

$= x^2 \sin x - x \cos x + \sin x$

$\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x}$

<u>Beispiel</u>: $\int \underset{f}{(x-2)} \cdot \underset{g'}{e^{3x}}\, dx$

$f'(x) = 1 \,, \quad g(x) = \int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x}$

$= \underset{f \cdot g}{\frac{1}{3}(x-2) e^{3x}} - \underset{f' \cdot g}{\int \frac{1}{3} e^{3x}\, dx} = \frac{1}{3}(x-2) e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$

<u>Beispiel</u> $\int \underset{f}{e^x} \; \underset{-g'}{\cos x} \; dx$

$f'(x) = e^x, \quad g(x) = \sin x$

$\int u\, v' dx = uv - \int u' v\, dx$

$\overset{\text{p.I.}}{=} e^x \sin x - \int \underset{u}{e^x} \; \underset{v'}{\sin x} \; dx \quad , \; v = -\cos x$

$\overset{\text{p.I.}}{=} e^x \sin x - \left\{ \underset{u.v.}{-e^x \cos x} + \int e^x \cos x \, dx \right\}$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx \quad \Big| + \int e^x \cos x \, dx$

Also $2 \cdot \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x \quad \Big| : 2$

$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$

<u>Beispiel</u> $\int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{g'}{\cos x}\, dx$, $g = \sin$

$$\overset{\text{p.I}}{=} \sin^2 x - \int \underset{f'}{\cos x}\, \underset{g}{\sin x}\, dx \quad \Big| + \int \cos x \sin x\, dx$$

$$\rightsquigarrow \quad 2 \cdot \int \sin x \cos x\, dx = \sin^2 x$$

bzw. $\int \sin x \cos x\, dx = \underline{\frac{1}{2} \sin^2 x}$

Alternativ: $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{4} \cos(2x)$

Notiz $-\frac{1}{4} \cos(2x) = -\frac{1}{4} (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$$= -\frac{1}{4} \cdot (1 - 2 \sin^2 x)$$

$$= \underline{\frac{1}{2} \sin^2 x} - \frac{1}{4}$$

<u>Beispiel</u> $\int \ln x \, dx = \int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\ln x} \, dx = \underset{g}{x} \underset{f}{\ln x} - \int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{\frac{1}{x}} \, dx$

$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x$

<u>Beispiel</u> $\int \underset{f}{x} \underset{g'}{\ln x} \, dx = \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{(x \ln x - x)} - \int (x \ln x - x) \, dx$

$= x^2 (\ln x - 1) + \underbrace{\int x \, dx}_{\frac{1}{2} x^2} - \underbrace{\int x \ln x \, dx}$

$2 \int x \ln x \, dx = x^2 \cdot (\ln x - \frac{1}{2})$

bzw. $\int x \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1)$

<u>oder</u>: $\int \underset{g'}{x} \underset{f}{\ln x} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \underset{g}{\frac{1}{2} x^2} \cdot \underset{f'}{\frac{1}{x}} \, dx$ $\quad \frac{1}{2} x$

$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1)$ ✓

4.6 Substitution

Vorgelegt: $I, \mathcal{J}$ Intervalle

$g: I \to \mathcal{J}$ stetig differenzierbar

$f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F.

Kettenregel: $F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$

Also: $F(g(x))$ ist Stammfkt. von $f(g(x)) \cdot g'(x)$

bzw.

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x))}$$

Beispiel $\displaystyle\int \underbrace{\cos}_{f}(\underbrace{\sin x}_{g(x)}) \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)}\, dx = \underset{F}{\sin}(\underset{g}{\sin x})$

↳ Stammfkt. $F(x) = \sin x$

Bestimmtes Integral: $\displaystyle\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

Beispiel: $\int \cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{g(t)})\, dt$ $\quad (\omega \neq 0)$, $\quad \dot{g}(t) = \omega$

$$= \frac{1}{\omega} \int \underset{f}{\cos}(\underbrace{\omega t + \varphi}_{g}) \cdot \underbrace{\omega}_{\dot{g}}\, dt = \frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

↳ Stammfkt: sin

Beispiel $(a \neq 0)$

$$\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \int e^{ax+b} \cdot a\, dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b}$$

$f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $g(x) = ax+b$, $g'(x) = a$

Beispiel $(a \neq 0)$

$$\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{ax+b} \cdot a\, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$$

$f(x) = \frac{1}{x}$

Notiz: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$

$x > 0$: ✓

$x < 0$: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))'$

$= \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ ✓

Allgemein: $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|$

$\int g'(x)\, e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)}$ usw.

<u>Beispiele</u>: • $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|$

• $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\cdot\int (\sqrt{x})'\cdot e^{\sqrt{x}}\,dx$

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}\cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 2\cdot e^{\sqrt{x}}$

Variante der Substitutionsregel:

Zusatzvoraussetzung: $g : I \to \mathcal{J}$ invertierbar

Zu berechnen ist $\int f(x)\,dx$

Berechne $H(t) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$

Beh.: Dann gilt $\int f(x)\,dx = H(g^{-1}(x))$

Denn: $H(g^{-1}(x))' = H'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1}(x))'$

$$= f(\underbrace{g(g^{-1}(x))}_{=x}) \cdot g'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1}(x))'$$

$$= f(x) \cdot \underbrace{\big(\underbrace{g(g^{-1}(x))}_{=x}\big)'}_{=1} = f(x).$$

Schreibweise : $y = g(x) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dy}{dx} = g'(x)$

<u>Merkregel</u>

Ziel: Berechne $\int f(x)\,dx$

Wähle eine <u>invertierbare</u> Funktion g

"Substituiere" $x = g(t)$

$\frac{dx}{dt} = g'(t)$ bzw. $dx = g'(t) \cdot dt$

und berechne $H(t) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$

Löse anschließend $x = g(t)$ zu $t = g^{-1}(x)$ auf

und substituiere zurück

$$\boxed{\int f(x)\,dx = H(g^{-1}(x))}$$

$$\int_b f(x)\,dx = H(g^{-1}(x)) \qquad \text{mit} \quad H(t) = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Also: $$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[H(g^{-1}(x))\Big]_a^b = \Big[H(t)\Big]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)}$$

$$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

<u>Beispiel</u>: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Substituiere $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$, $t = \arcsin x$

$$\int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \underset{u}{\cos t} \cdot \underset{v'}{\cos t}\,dt$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \cos t \sin t + \int \sin^2 t\,dt = \cos t \sin t + \int (1-\cos^2 t)\,dt = t + \cos t \sin t - \int \cos^2 t\,dt,$$

also $$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\cdot(t + \cos t \sin t)$$

<u>Beispiel</u> (Forts.) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Substitution $x = \sin t$, $t = \arcsin x$, $dx = \cos t\,dt$

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \cos t \cdot \sin t\right)$$

Rücksubst.: $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\arcsin x + \underbrace{\cos(\arcsin x)}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}\Big)$$

Also $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$$

<u>Beispiel</u> $$\int e^{\sqrt{1+x}}\,dx = ?$$

Ansatz: $t = \sqrt{1+x}$ bzw. $\left.\begin{array}{l} x = t^2 - 1 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right\}$ Substitution

$$\int e^t\, 2t\,dt = 2\int \underset{u}{t}\,\underset{v'}{e^t}\,dt = 2\left(t e^t - \int e^t\,dt\right) = 2(t-1)e^t$$

Rücksubst.: $2 \cdot \left(\sqrt{1+x} - 1\right) \cdot e^{\sqrt{1+x}}$

Hausaufgabe OgB:

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $\int x^2 \cos x \, dx$

(b) $\int \frac{\cos x}{4 + \sin x} \, dx$

(c) $\int \cos \sqrt{1-x} \, dx$