4.7 Polynome

Ein Term der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = p(x)$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt Polynom.

Für $a_n \neq 0$ heißt n der Grad des Polynoms, geschrieben: $n = \operatorname{grad} g(x)$.

Beispiel $p(x) = 3x^4 - e^2 \cdot x^2 + \sqrt{2}\, x + 42$

ist ein Polynom vom Grad $4 = \operatorname{grad} p(x)$

Notiz: $p(x) = 0$ hat den Grad $-\infty$

$p(x) = a_0$ $(\neq 0)$: konstante Polynom, Grad 0

$p(x) = a_1 x + a_0$ $(a_1 \neq 0)$: lineares Polynom, Grad 1

Notiz: $\operatorname{grad}(p(x) \cdot q(x)) = \operatorname{grad} p(x) + \operatorname{grad} q(x)$

4.8 Division mit Rest

Zu Polynomen $p(x)$, $q(x) \neq 0$ gibt es Polynome $a(x)$ und $r(x)$ mit $p(x) = a(x) \cdot q(x) + r(x)$

und $\operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} q(x)$

Beispiel: $p(x) = 2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3$

$q(x) = 2x^2 + 1$

$$
\begin{array}{l}
(2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3) : (2x^2 + 1) = x^3 + x + 3 \\
-(2x^5 + x^3) \leftarrow (2x^2+1) \cdot x^5 \\
\hline
\quad 2x^3 + 6x^2 + x + 3 \\
\quad -(2x^3 + x) \\
\hline
\qquad 6x^2 + 3 \\
\qquad -(6x^2 + 3) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also:

$$2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3 = (x^3 + x + 3)(2x^2 + 1) \; (+\,0)$$

<u>Beispiel</u>: $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = p(x)$; $x - 1 = q(x)$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + 4x + 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad 4x^2 - 2x + 1 \\
\quad \underline{-(4x^2 - 4x)} \\
\qquad 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(2x - 2)} \\
\qquad\quad \underline{3} = r(x) \qquad (\text{Grad} < \text{Grad}(x-1))
\end{array}
$$

Also: $\underbrace{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}_{p(1)} = \underbrace{(x-1)}_{0} \cdot \underbrace{(x^2 + 4x + 2)}_{*} + \underline{3}$

1 einsetzen $\quad p(1) = 0 \quad * \quad + \underline{3} = 3$

<u>Beobachtung</u> $u, v \neq 0$ reelle Zahlen, $p(x)$ Polynom

$$p(x) = a(x) \cdot \underbrace{(vx - u)}_{q(x)} + r$$

$\uparrow$ konstantes Polynom

$v \cdot \frac{u}{v} - u = 0$ liefert $\boxed{p\left(\frac{u}{v}\right) = r}$

Also: $\frac{u}{v}$ ist genau dann eine Nullstelle von $p(x)$ (also $p\left(\frac{u}{v}\right) = r$), wenn $r = 0$, d.h. wenn $p(x)$ glatt durch $vx - u$ teilbar ist.

<u>Beispiel</u> $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10$

$q(x) = x^2 + 2$

$$(x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10) : (x^2 + 2) = x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$\begin{array}{l}
-(x^5 \qquad\qquad + 2x^3) \\
\hline
\quad 2x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 10 \\
\quad -(2x^4 \qquad\qquad + 4x^2) \\
\hline
\qquad -x^3 + x^2 + x + 10 \\
\qquad -(-x^3 \qquad\qquad - 2x) \\
\hline
\qquad\qquad x^2 + 3x + 10 \\
\qquad\qquad -(x^2 \qquad\qquad + 2) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 3x + 8
\end{array}$$

$$x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10$$
$$= (x^3 + 2x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + 2) + (3x + 8)$$

4.9 Das Horner-Schema

Zerlege $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$= (x - x_0) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) + r$$

$$= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - b_{n-1} x_0) \cdot x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2} x_0) x^{n-2}$$

$$+ \dots + (b_0 - b_1 x_0) \cdot x + (r - b_0 x_0)$$

Koeffizientenvergleich: $b_{n-1} = a_n$

$a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1} \cdot x_0$ bzw. $b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 \cdot b_{n-1}$

$\dots$ $b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 b_{n-2}$

$\vdots$

$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1$

$r = a_0 + x_0 \cdot b_0$

4.9 Das Horner-Schema (Forts.)

Zerlege $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

HORNER - Schema

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots\cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\
 & & + & & & + & + & \\
x_0 & & x_0 \cdot b_{n-1} & & & x_0 b_1 & x_0 \cdot b_0 & \\
\hline
 & a_n & b_{n-2} & & b_1 & b_0 & & r \\
 & = b_{n-1} & & & & & & = p(x_0)
\end{array}$$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 \cdot b_{n-1}$$

$$b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 \, b_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1$$

$$r = a_0 + x_0 \cdot b_0$$

Bsp: $p(x) = x^4 + 3x + 1$

$x_0 = 5$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & \\
5 & & 1 \cdot 5 & 25 & 125 & 640 & \\
\hline
 & 1 & 5 & 25 & 128 & & 641
\end{array}$$

Also: $5^4 + 3 \cdot 5 + 1 = 641$

bzw. $x^4 + 3x + 1$

$= (x-5) \cdot (x^3 + 5x^2 + 25x + 128) + 641$

Übung: a) Berechne den Wert von $p(x) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 19x - 13$ für $x = 5$

b) Bestimme Zahlen $a_0, \dots, a_4$ mit

$$q(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 27x + 13 = \underbrace{a_4(x+2)^4 + \dots + a_1(x+2) + a_0}_{\text{"Polynom in } x+2\text{"}}.$$

a)

	1	-3	-13	19	-13
5		5	10	-15	20
	1	2	-3	4	$\underline{\underline{7}}$

$p(5) = 7$

b)

	1	8	21	27	13
-2		-2	-12	-18	-18
	1	6	9	9	-5
-2		-2	-8	-2	
	1	4	1	7	
-2		-2	-4		
	1	2	-3		

$$q(x) = (\underbrace{x^3 + 6x^2 + 9x + 9}_{})(x+2) - 5$$

$$= (x^2 + 4x + 1)\cdot(x+2) + 7$$

$$= (x^2 + 4x + 1)\cdot(x+2)^2 + 7\cdot(x+2) - 5$$

$$= (x+2)\cdot(x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 7\cdot(x+2) - 5$$

$$q(x) = (x+2)^4 - 3\cdot(x+2)^2 + 7\cdot(x+2) - 5$$

<u>Exkurs</u>:

$p(x)$ Polynom

n_1 heißt Nullstelle von $p(x)$, falls $p(n_1) = 0$,

d.h. $p(x) = q(x) \cdot (x - n_1)$ mit passendem Polynom $q(x)$

<u>Bsp</u> $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & & 1 & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

$x = 1$ ist Nullstelle

$p(x) = (x^2 - x + 3) \cdot (x - 1)$

Jedes reelle Polynom lässt sich schreiben als

$$p(x) = r(x) \cdot (x - n_1) \cdot (x - n_2) \cdot \ldots \cdot (x - n_k)$$

wobei $r(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt.

$$= q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_s(x) \cdot (x - n_1) \cdot \ldots \cdot (x - n_k)$$

wobei $q_j(x)$ quadratisches Polynom ohne reelle Nullstellen

$p(x) = q(x) \cdot (x-u)^k$ mit $q(u) \neq 0$.

Dann heißt u eine k-fache Nullstelle von $p(x)$.
"u hat Vielfachheit k"

$$p'(x) = q'(x) \cdot (x-u)^k + k\, q(x) \cdot (x-u)^{k-1}$$
$$= \underbrace{\left[q'(x) \cdot (x-u) + k\, q(x) \right]}_{x=u:\ q'(u) \cdot 0 + k \cdot \underbrace{q(u)}_{\neq 0} \neq 0} \cdot (x-u)^{k-1}$$

Beobachtung: $x = u$ ist k-fache Nullstelle ($k \geq 1$) von $p(x)$
$\rightsquigarrow$ $x = u$ ist $(k-1)$-fache Nullstelle von $p'(x)$,

d.h. $(x-u)^{k-1}$ teilt $p(x)$, $p'(x)$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{p(x)}{ggT(p(x), p'(x))}$ hat dieselben Nullstellen wie $p(x)$, aber deren Vielfachheit ist 1.

Nullstellensuche für ein Polynom $p(x)$ (mit Grad ≥ 2)

- Grad 2 $\rightsquigarrow$ "p-q-Formel", "a-b-c-Formel"
- Grad 3 $\rightsquigarrow$ Näherungslösungen per numerischer Verfahren oder exakte Lösungen durch <u>Raten</u>

Spezialfall: $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0)$,
alle $a_0, a_1, \dots, a_n$ ganze Zahlen

Dann gilt: Ist $\frac{u}{v}$ eine <u>rationale</u> Nullstelle von $p(x)$,
so ist u ein Teiler von a_0
und v ein Teiler von a_n

Denn: $p(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) \cdot (vx - u)$,
also $\underline{-u b_0 = a_0}$, $b_0 v - u b_1 = a_1$, ..., $\underline{v b_{n-1} = a_n}$;
dabei: alle $b_0, \dots, b_{n-1}$ sind ganze Zahlen
Erhalte: u teilt a_0, v teilt a_1.

Beispiel: Finde alle Nullstellen von

$$p(x) = \underline{2}x^5 + 3x^4 - 22x^3 + 30x^2 - 16x + \underline{3}$$

Teiler von 3 sind $\pm 1, \pm 3$
pos. Teiler von 2 sind $1, 2$
} mögl. rationale NSt. $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

	2	3	−22	30	−16	3
1		2	5	−17	13	−3
	2	5	−17	13	−3	0
1		2	7	−10	3	
	2	7	−10	3	0	
3		6	39	87		
	~~2~~	~~13~~	~~29~~	~~90~~		
	2	7	−10	3		
1/2		1	4	−3		
	2	8	−6	0		

$p(x) = (2x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 13x - 3) \cdot (x-1)$

$p(x) = (2x^3 + 7x^2 - 10x + 3) \cdot (x-1)^2$

$x = 3$ keine NS.

$\rightsquigarrow$ $p(x) = (2x^2 + 8x - 6) \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x-1)^2$
$= (x^2 + 4x - 3) \cdot (2x-1) \cdot (x-1)^2$

$x^2 + 4x - 3 = 0$ für $x = -2 \pm \sqrt{7}$: NSt. 1 (doppelt), $\frac{1}{2}$, $-2 \pm \sqrt{7}$

<u>Übung</u>: Bestimme alle Nullstellen von

$$p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8$$

Mögl. rationale Nullstellen $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

	1	−4	−3	10	8
4		4	0	−12	−8
	1	0	−3	−2	0
2		2	4	2	
	1	2	1	0	

$(x^2 + 2x + 1)$

$$p(x) = (x-4)\cdot(x-2)\cdot(x+1)^2$$

4.10 Partialbruchzerlegung:

Vorgelegt ist eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$,

wobei $p(x), q(x) \neq 0$ Polynome sind.

Voraussetzung: $\operatorname{grad} p(x) < \operatorname{grad} q(x)$

und $q(x) = c \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$,

wobei $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind.

Dann gibt es Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{c \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{a_n}{x - x_n}$$

mit $$a_k = \frac{p(x_k)}{c \cdot (x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)}$$

Speziell: $$\int f(x)\,dx = a_1 \ln|x - x_1| + \ldots + a_n \cdot \ln|x - x_n|$$
$$= \ln\left(|x - x_1|^{a_1} \cdot \ldots \cdot |x - x_n|^{a_n}\right)$$

Beispiel $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)}$ ⚠ Zählergrad $\neq$ Nennergrad

$$(x-1)\cdot(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{l} (x^3 + x + 1) : (x^2 - 3x + 2) = x + 3 \\ -\underline{(x^3 - 3x^2 + 2x)} \\ \quad 3x^2 - x + 1 \\ \quad -\underline{(3x^2 - 9x + 6)} \\ \qquad\qquad 8x - 5 \end{array}$$

Also: $f(x) = x + 3 + \dfrac{8x-5}{(x-1)(x-2)}$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{8x-5}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-3}{x-1} + \dfrac{11}{x-2}$

$$\frac{8x-5}{x-2} = a_1 + a_2 \frac{x-1}{x-2} \quad \overset{x=1}{\curvearrowright} \quad a_1 = \frac{3}{-1} = -3$$

Folgt: $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int (x+3)\,dx + \int \frac{-3}{x-1}\,dx + \int \frac{11}{x-2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x - 3\cdot\ln|x-1| + 11\ln|x-2| \quad (+c)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \ln\frac{|x-2|^{11}}{|x-1|^3}$$

§8/S.42

Übung: Bestimme $\int \frac{x+2}{(x-1)\cdot(x+1)\,(x-2)}\,dx$!

Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx = \int \frac{3/-2}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/6}{x+1}\,dx + \int \frac{4/3}{x-2}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot \ln|x-1| - \frac{1}{6}\cdot \ln|x+1| + \frac{4}{3}\cdot \ln|x-2|$$

$$\cancel{\int_0^3 \ldots\, dx}$$

zwischen 0 und 3 liegt die Nullstelle 1 des Nenners $\overset{!}{=} 0$

4.11 Eine Standardsubstitution

Vorgelegt ist eine rationale Funktion $f(x)$

Gesucht ist $\int f(e^x)\,dx$.

Substitution $t = e^x$

$x = \ln t \qquad dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\rightsquigarrow \quad \int \underbrace{\frac{f(t)}{t}}_{\text{rationale Funktion}}\,dt = F(t) \quad \text{per Partialbruchzerlegung}$$

Rücksubstitution: $\int f(e^x)\,dx = F(e^x)$

<u>Beispiel</u>: $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}-1}\,dx$

Substitution: $t = e^{x}$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$

$e^{3x} = (e^{x})^3 = t^3$
$e^{2x} = t^2$

$$\rightsquigarrow \int \frac{t^3+2}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$(t^3+2) : (t^3-t) = 1$
$-(t^3-t)$
$t+2$

$$= \int 1\,dt + \int \frac{t+2}{t^2-1}\,dt$$

$t^2-1 = (t-1)(t+1)$

$$= t + \int\left(\frac{3/2}{t-1} + \frac{-1/2}{t+1}\right)dt$$

$$= t + \frac{3}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1|$$

Rücksubst.: $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}-1}\,dx = e^{x} + \frac{3}{2}\ln|e^{x}-1| - \frac{1}{2}\ln|e^{x}+1|$

4.12 Noch eine Standardsubstitution

$R(u,v)$ rationale Funktion in zwei Veränderlichen,

z.B. $R(u,v) = \dfrac{u^4 + 3u^3 - 2u^2v^2 + 3u^2v - 8v^3 + 7}{7uv^2 + 9uv - 16v^{42}}$

Gesucht: $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

z.B. $R(u,v) = \dfrac{u^2 + 3uv - v^2}{u+v}$, $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x + 3\cos x \sin x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}\,dx$

Substitution: $t = \tan\frac{x}{2}$ bzw. $x = 2\arctan t$

Erinnerung: $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Also: $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$$= \cos^2\frac{x}{2} \cdot \left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right)$$

§4 / S. 46

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} \cdot \left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right)$$

$$1 + \tan^2\frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

Folgt $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$; einsetzen:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \tan\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Fazit: Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$; $x = 2\arctan t$.

$\rightsquigarrow$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$;

$$dx = \frac{2}{1+t^2}$$

<u>Beispiel</u> $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Subst. $t = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\rightsquigarrow \int \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|$$

Rücksubst:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

<u>Übung</u>: Berechne $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x \frac{2t}{1+t^2}$,

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{2t+1-t^2}\,dt$$

$$= -2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} = -2 \cdot \int \frac{dt}{(t-(1+\sqrt{2}))\cdot(t-(1-\sqrt{2}))}$$

$$= -2 \int \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t-(1+\sqrt{2})} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t-(1-\sqrt{2})} \right) dt = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\ln|t-(1-\sqrt{2})| - \ln|t-(1+\sqrt{2})| \right)$$

Rücksubst. $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\ln\left|\tan\frac{x}{2} - (1-\sqrt{2})\right| - \ln\left|\tan\frac{x}{2} - (1+\sqrt{2})\right| \right)$$