

4.7 Polynome

Ein Term der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = p(x)$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt **Polynom**.

Für $a_n \neq 0$ heißt n der **Grad** des Polynoms,
geschrieben: $n = \text{grad } p(x)$.

Beispiel $p(x) = 3x^4 - e^2 \cdot x^2 + \sqrt{2}x + 42$

ist ein Polynom vom Grad $4 = \text{grad } p(x)$

Notiz: $p(x) = 0$ hat den Grad $-\infty$

$p(x) = a_0$: konstante Polynom, Grad 0
 $(\neq 0)$

$p(x) = a_1 x + a_0$: lineares Polynom, Grad 1
 $(a_1 \neq 0)$

Notiz: $\text{grad}(p(x) \cdot q(x)) = \text{grad } p(x) + \text{grad } q(x)$

4.8 Division mit Rest

Zu Polynomen $p(x)$, $q(x) \neq 0$ gibt es Polynome $\alpha(x)$ und $r(x)$ mit $p(x) = \alpha(x) \cdot q(x) + r(x)$ und $\text{grad } r(x) < \text{grad } q(x)$

Beispiel 1 $p(x) = 2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3$

$$q(x) = 2x^2 + 1$$

$$\begin{array}{r}
 (2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3) : (\underline{2x^2} + 1) = x^3 + x + 3 \\
 - (2x^5 + x^3) \quad \leftarrow (2x^2 + 1) \cdot x^5 \\
 \hline
 2x^3 + 6x^2 + x + 3 \\
 - \overline{(2x^3 + x)} \\
 \hline
 6x^2 + 3 \\
 - \overline{(6x^2 + 3)} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Also:

$$\begin{aligned}
 2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3 \\
 = (x^3 + x + 3)(2x^2 + 1) (+ 0)
 \end{aligned}$$

Beispiel: $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = p(x)$; $x - 1 = q(x)$

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + 4x + 2 \\ - (x^3 - x^2) \\ \hline 4x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - (4x^2 - 4x) \\ \hline 2x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(2x - 2) \\ \hline 3 = r(x) \quad (\text{Grad } < \text{Grad}(x-1)) \end{array}$$

Also: $\underbrace{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}_{p(1)} = (x - 1) \cdot \underbrace{(x^2 + 4x + 2)}_{*} + \underline{3}$

1 einsetzen $\Rightarrow 0 + \underline{3} = 3$

Beobachtung $u, v \neq 0$ reelle Zahlen, $p(x)$ Polynom

$$p(x) = a(x) \cdot \underbrace{(vx - u)}_{q(x)} + r$$

\uparrow konstantes Polynom

$$v \cdot \frac{u}{v} - u = 0 \quad \text{liefert} \quad \boxed{p\left(\frac{u}{v}\right) = r}$$

Also: $\frac{u}{v}$ ist genau dann eine Nullstelle von $p(x)$ (also $p\left(\frac{u}{v}\right) = r$), wenn $r = 0$, d.h.
wenn $p(x)$ glatt durch $vx - u$ teilbar ist.

Beispiel $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10$

$$q(x) = x^2 + 2$$

$$\begin{aligned}
 & (x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10) : (x^2 + 2) = x^3 + 2x^2 - x + 1 \\
 - & \underline{(x^5 + 2x^3)} \\
 & \underline{2x^4 - x^3} + 5x^2 + x + 10 \\
 - & \underline{(2x^4 + 4x^2)} \\
 & \underline{-x^3 + x^2 + x + 10} \\
 - & \underline{(-x^3 - 2x)} \\
 & \underline{x^2 + 3x + 10} \\
 - & \underline{(x^2 + 2)} \\
 & \underline{3x + 8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10 \\
 = & (x^3 + 2x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + 2) + (3x + 8)
 \end{aligned}$$

4.9 Das Horner-Schema

Zerlege $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$

$$\begin{aligned} & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= (x - x_0) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) + r \\ &= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - b_{n-1} x_0) \cdot x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2} x_0) \cdot x^{n-2} \\ &\quad + \dots + (b_0 - b_1 x_0) \cdot x + (r - b_0 x_0) \end{aligned}$$

Koeffizienten vergleichen: $b_{n-1} = a_n$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1} \cdot x_0 \quad \text{bzw. } b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 \cdot b_{n-1}$$

$$\dots - \qquad \qquad \qquad b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 \cdot b_{n-2}$$

⋮

$$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1$$

$$r = a_0 + x_0 \cdot b_0$$

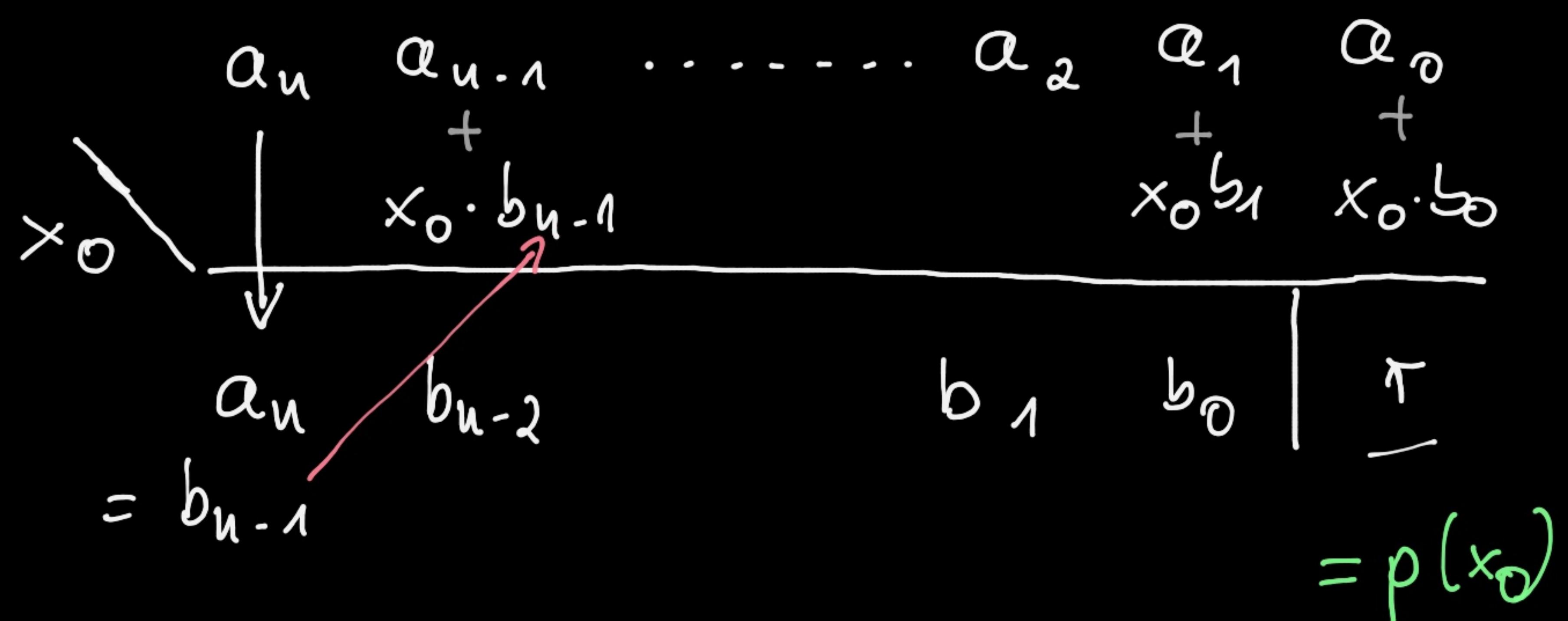
4.9 Das Horner-Schema (Forts.)

Zerlege $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

HORNER-Schema



$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + x_0 \cdot b_{n-1} \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + x_0 \cdot b_{n-2} \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1 + x_0 \cdot b_1 \\ r &= a_0 + x_0 \cdot b_0 \end{aligned}$$

Bsp: $p(x) = x^4 + 3x + 1$
 $x_0 = 5$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1 \\ 5 \backslash \underline{1 \cdot 5 \ 25 \ 125 \ 640} \\ 1 \ 5 \ 25 \ 128 \boxed{641} \end{array}$$

Also: $5^4 + 3 \cdot 5 + 1 = 641$

bzw. $x^4 + 3x + 1$

$$\begin{aligned} &= (x-5) \cdot (x^3 + 5x^2 + 25x + 128) \\ &\quad + 641 \end{aligned}$$

Übung: a) Berechne den Wert von $p(x) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 19x - 13$ für $x = 5$.

b) Bestimme Zahlen $\alpha_0, \dots, \alpha_4$ mit

$$q(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 27x + 13 = \underbrace{\alpha_4(x+2)^4 + \dots + \alpha_1(x+2) + \alpha_0}_{\text{"Polynom in } x+2\text{"}}.$$

a)

$1 \quad -3 \quad -13 \quad 19 \quad -13$	5 \underline{5} 10 -15 20	1 2 -3 4 <u>7</u>
---	------------------------------------	----------------------------

$p(5) = 7$

b)

$1 \quad 8 \quad 21 \quad 27 \quad 13$	-2 \underline{-2} -12 -18 -18	1 6 9 9 <u>-5</u>
--	--	----------------------------

	-2 \underline{-2} -8 -2	1 4 1 <u>7</u>
--	-------------------------------	----------------------

	-2 \underline{-2} -4	1 <u>2</u> <u>-3</u>
--	-------------------------	----------------------

$q(x) = (\underbrace{x^3 + 6x^2 + 9x + 9}_{(x^2 + 4x + 1)})(x+2) - 5$
 $\Rightarrow (x^2 + 4x + 1) \cdot (x+2) + 7$
 $= (x^2 + 4x + 1) \cdot (x+2)^2 + 7 \cdot (x+2) - 5$
 $= (x+2) \cdot (x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 7 \cdot (x+2) - 5$

$$q(x) = (x+2)^4 - 3 \cdot (x+2)^2 + 7 \cdot (x+2) - 5$$

Exkurs:

$p(x)$ Polynom

n_1 heißt Nullstelle von $p(x)$, falls $p(n_1) = 0$,

d.h. $p(x) = q(x) \cdot (x - n_1)$ mit passendem Polynom $q(x)$

Bsp $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \quad 4 \quad -3 \\ 1 \quad \quad -1 \quad 3 \\ \hline 1 \quad -1 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{x=1 ist Nullstelle} \\ \rightarrow \end{array}$$

$p(x) = (x^2 - x + 3) \cdot (x - 1)$

Jedes reelle Polynom lässt sich schreiben als

$$p(x) = r(x) \cdot (x - n_1) \cdot (x - n_2) \cdots \cdot (x - n_k)$$

wobei $r(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt.

$$= q_1(x) \cdots q_s(x) \cdot (x - n_1) \cdots (x - n_k)$$

wobei $q_i(x)$ quadratisches Polynom ohne reelle Nullstellen

$$p(x) = q(x) \cdot (x - u)^k \quad \text{mit } q(u) \neq 0.$$

Dann heißt u eine k -fache Nullstelle von $p(x)$,
 ↗ "u hat Vielfachheit k "

$$\begin{aligned} p'(x) &= q'(x) \cdot (x - u)^{k-1} + kq(x) \cdot (x - u)^{k-1} \\ &= \underbrace{[q'(x) \cdot (x - u) + kq(x)]}_{\substack{x=u: q'(u) \cdot 0 + k \cdot \underline{q(u)} \neq 0 \\ \neq 0}} \cdot (x - u)^{k-1} \end{aligned}$$

Beobachtung: $x = u$ ist k -fache Nullstelle ($k \geq 1$) von $p(x)$
 $\leadsto x = u$ ist $(k-1)$ -fache Nullstelle von $p'(x)$,

d.h. $(x - u)^{k-1}$ teilt $p(x), p'(x)$

Wus $\frac{p(x)}{\text{ggT}(p(x), p'(x))}$ hat dieselben Nullstellen wie $p(x)$,
 aber deren Vielfachheit ist 1.

Nullstellensuche für ein Polynom $p(x)$ (mit Grad ≥ 2)

- Grad 2 \rightsquigarrow "p-q - Formel", "a-b-c - Formel"
- Grad 3 \rightsquigarrow Näherungslösungen per numerische Verfahren
oder exakte Lösungen durch Rätseln

Spezialfall: $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, ($a_n \neq 0$),
alle a_0, a_1, \dots, a_n ganze Zahlen

Dann gilt: Ist $\frac{u}{v}$ eine rationale Nullstelle von $p(x)$,
so ist u ein Teiler von a_0
und v ein Teiler von a_n

Denn: $p(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) \cdot (vx - u)$,
also $-ub_0 = a_0$, $b_0 v - ub_1 = a_1, \dots, v b_{n-1} = a_n$;
dabei: alle b_0, \dots, b_{n-1} sind ganze Zahlen
Erhalte: u teilt a_0 , v teilt a_1 .

Beispiel: Finde alle Nullstellen von

$$p(x) = \underline{2x^5 + 3x^4 - 22x^3 + 30x^2 - 16x + 3}$$

Teiler von 3 sind $\pm 1, \pm 3$ } mögl. rationale Nst. $\pm 1, \pm 3,$
 pos. Teiler von 2 sind $1, 2$ } $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r} 2 & 3 & -22 & 30 & -16 & 3 \\ 1 \backslash & 2 & 5 & -17 & 13 & -3 \\ \hline 2 & 5 & -17 & 13 & -3 & \underline{\underline{0}} \\ 1 \backslash & 2 & 7 & -10 & 3 & \underline{\underline{0}} \\ \hline 2 & 7 & -10 & 3 & \underline{\underline{0}} \\ 3 \curvearrowleft & 6 & 39 & 87 & & \\ \hline 2 & 13 & 29 & 80 & & \\ \hline 2 & 7 & -10 & 3 & & \\ 1/2 \backslash & 1 & 4 & -3 & & \\ \hline 2 & 8 & -6 & \underline{\underline{0}} & & \end{array}$$

$$p(x) = (2x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 13x - 3) \cdot (x-1)$$

$$p(x) = (2x^3 + 7x^2 - 10x + 3) \cdot (x-1)^2$$

$$x=3 \text{ keine Nst.}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x^2 + 8x - 6) \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x-1)^2 \\ &= (x^2 + 4x - 3) \cdot (2x-1) \cdot (x-1)^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0 \text{ für } x = -2 \pm \sqrt{7} : \text{ Nst. } 1 \text{ (doppelt), } \frac{1}{2}, -2 \pm \sqrt{7}$$

Übung: Bestimme alle Nullstellen von
 $p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8$

Mögl. rationale Nullstellen $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$$\begin{array}{r} 1 & -4 & -3 & 10 & 8 \\ 4 \backslash & 4 & 0 & -12 & -8 \\ \hline 1 & 0 & -3 & -2 & \left. \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \hline \end{array} \right\} = \\ 2 \backslash & 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

$(x^2 + 2x + 1)$

$$p(x) = (x-4) \cdot (x-2) \cdot (x+1)^2$$

4.10 Partialbruchzerlegung:

Vorgelegt ist eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$,

wobei $p(x), q(x) \neq 0$ Polynome sind.

Voraussetzung: $\text{grad } p(x) < \text{grad } q(x)$



und $q(x) = c \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)$,

wobei x_1, \dots, x_n paarweise verschieden sind.



Dann gibt es Zahlen a_1, \dots, a_n mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{c \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \dots + \frac{a_n}{x - x_n}$$

$$\text{mit } a_k = \frac{p(x_k)}{c \cdot (x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

$$\begin{aligned} \text{Speziell: } \int f(x) dx &= a_1 \ln|x - x_1| + \dots + a_n \ln|x - x_n| \\ &= \ln(|x - x_1|^{a_1} \cdots |x - x_n|^{a_n}) \end{aligned}$$

§4/S.41

Beispiel $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)}$ $\frac{!}{\cancel{\cancel{}}}$ Zählergrad < Nennergrad

$$(x-1) \cdot (x-2) = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{aligned} (x^3 + x + 1) : (x^2 - 3x + 2) &= x + 3 \\ - \underline{(x^3 - 3x^2 + 2x)} \\ \hline 3x^2 - x + 1 \\ - \underline{(3x^2 - 9x + 6)} \\ \hline 8x - 5 \end{aligned}$$

$$\text{Also: } f(x) = x + 3 + \frac{8x - 5}{(x-1)(x-2)}$$

Partialbruchzerlegung: $\frac{8x - 5}{(x-1)(x-2)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{11}{x-2}$

$$\frac{8x - 5}{x-2} = a_1 + a_2 \frac{x-1}{x-2} \quad \stackrel{x=1}{\curvearrowright} \quad a_1 = \frac{3}{-1} = -3$$

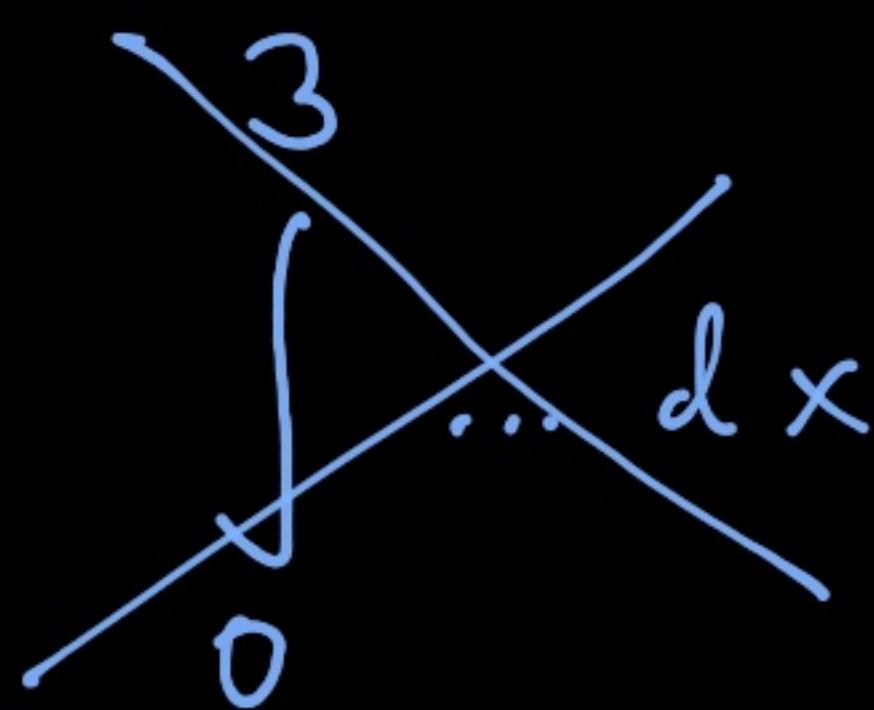
$$\begin{aligned} \text{Folgt: } \int \frac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)} dx &= \int (x+3) dx + \int \frac{-3}{x-1} dx + \int \frac{11}{x-2} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 3x - 3 \cdot \ln|x-1| + 11 \ln|x-2| (+c) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \ln \frac{|x-2|^11}{|x-1|^3} \end{aligned}$$

Übung: Bestimme $\int \frac{x+2}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2)} dx$!

Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx = \int \frac{\frac{3}{2}/-2}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{x-2} dx$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{6} \cdot \ln|x+1| + \frac{4}{3} \cdot \ln|x-2|$$



zwischen 0 und 3 liegt die Nullstelle 1 des Nenners $\frac{1}{0}$

4.11 Eine Standardsubstitution

Vorgelegt ist eine rationale Funktion $f(x)$

Gesucht ist $\int f(e^x) dx$.

$$\text{Substitution} \quad t = e^x \\ x = \ln t \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

$$\sim \int \underbrace{\frac{f(t)}{t}}_{\text{rationale Funktion}} dt = F(t) \quad \text{per Partialbruchzerlegung}$$

$$\text{Rücksubstitution: } \int f(e^x) dx = F(e^x)$$

Beispiel: $\int \frac{e^{3x} + 2}{e^{2x} - 1} dx$

Substitution: $t = e^x$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$

$$\begin{aligned} e^{3x} &= (e^x)^3 = t^3 \\ e^{2x} &= t^2 \end{aligned}$$

$$\sim \int \frac{t^3 + 2}{t^2 - 1} \cdot \frac{1}{t} dt \quad (t^3 + 2) : (t^3 - t) = 1$$

$$- \frac{(t^3 - t)}{t + 2}$$

$$= \int 1 dt + \int \frac{t+2}{t^2 - 1} dt \quad t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

$$= t + \int \left(\frac{3/2}{t-1} + \frac{-1/2}{t+1} \right) dt$$

$$= t + \frac{3}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln |t+1|$$

Rücksubst.: $\int \frac{e^{3x} + 2}{e^{2x} - 1} dx = e^x + \frac{3}{2} \ln |e^x - 1| - \frac{1}{2} \ln |e^x + 1|$

4.12 Noch eine Standardsubstitution

$R(u, v)$ rationale Funktion in zwei Veränderlichen,
 z.B. $R(u, v) = \frac{u^4 + 3u^3 - 2u^2v^2 + 3u^2v - 8v^3 + 7}{7uv^2 + 9uv - 16v^4 - 2}$

Gesucht: $\int R(\cos x, \sin x) dx$

$$\text{z.B. } R(u, v) = \frac{u^2 + 3uv - v^2}{u+v} , \int \frac{\cos^2 x + 3\cos x \sin x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx$$

Substitution: $t = \tan \frac{x}{2}$ bzw. $x = 2 \arctan t$

$$\text{Erinnerung: } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Also: } dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$1 + \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

Folgt $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$; einsetzen:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \\ = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \tan \frac{x}{2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Fazit: Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$; $x = 2 \arctan t$.

$$\leadsto \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}$$

Beispiel $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Subst. $t = \tan \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$

$$\hookrightarrow \int \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t|$$

Rücksubst.:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln |\tan \frac{x}{2}|$$

Übung : Berechne $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x \frac{2t}{1+t^2}$,

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned} & \sim \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{2t+1-t^2} dt \\ &= -2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} = -2 \cdot \int \frac{dt}{(t-(1+\sqrt{2})).(t-(1-\sqrt{2}))} \\ &= -2 \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t-(1+\sqrt{2})} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t-(1-\sqrt{2})} \right) dt = \frac{1}{2}\sqrt{2} \left(\ln |t-(1-\sqrt{2})| \right. \\ & \quad \left. - \ln |t-(1+\sqrt{2})| \right) \end{aligned}$$

Rücksubst. $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \left(\ln \left| \tan \frac{x}{2} - (1-\sqrt{2}) \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} - (1+\sqrt{2}) \right| \right)$$