4.13 Logarithmus und Exponentialfunktion

Für $x > 0$ setze

$$\ln x = \int_1^x \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{stetig} \rightsquigarrow \text{ Integral existiert}} \, dt$$

Hauptsatz: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und $\ln 1 = 0$

Notiz: $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f(1) = 0$.
Dann gilt $f(x) = \ln x$ für alle x.

Rechenregel: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

Denn: $(\ln(x \cdot y))' = \frac{y}{x \cdot y} = \frac{1}{x}$

Folgt: $\ln(x \cdot y) = \ln x + c(y)$

Dabei $\ln(1 \cdot y) = \ln 1 + c(y) \rightsquigarrow c(y) = \ln y$

bzw. $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$, wie gewünscht.

Hieraus erhalte:

$$\ln x^2 = 2 \ln x$$
$$\ln x^3 = 3 \ln x$$
$$\vdots$$
$$\boxed{\ln x^n = n \cdot \ln x \quad \text{für natürliche Zahlen } n}$$

$$0 = \ln 1 = \ln\left(x^n \cdot \frac{1}{x^n}\right) = \ln x^n + \ln \frac{1}{x^n} = n \cdot \ln x + \ln x^{-n}$$

liefert: $\ln x^{-n} = -n \cdot \ln x$; erhalte

$$\boxed{\ln x^n = n \cdot \ln x \quad \text{für ganze Zahlen } n}$$

Jetzt betrachte die Funktion $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Wegen $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ ist $\ln$ streng monoton wachsend.

$\ln 2 > \ln 1 = 0 \rightsquigarrow \ln 2^n = n \cdot \ln 2$ nimmt beliebig große Werte an; $\ln \left(\frac{1}{2}\right)^n = -n \cdot \ln 2$ nimmt beliebig kleine Werte an. $n \in \mathbb{N}$

Fazit: $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und $\{ \ln x \mid 0 < x < \infty \} = \mathbb{R}$ (ZWS!) sowie, $\ln$ differenzierbar.

Es gibt daher eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$ Exponentialfunktion

von $\ln$. Diese ist streng monoton wachsend.

Aus $x = \ln \exp x$ folgt
$$1 = (\ln \exp x)' = \ln'(\exp x) \cdot \exp' x = \frac{\exp' x}{\exp x}$$

bzw. $\boxed{\exp' = \exp}$ und $\boxed{\exp(0) = 1}$

wg. $\ln 1 = 0$.

Setze $e = \exp(1)$ Eulersche Zahl

und $a^b = \exp(b \cdot \ln a)$ für $a > 0$.

Beh: $e^b = \exp(b)$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \exp(b \cdot \underbrace{\ln e}_{=1}) = \exp(b) \quad \checkmark$$

wg. $e = \exp(1)$

Rechenregeln für Potenzen lassen sich für bel. Exponenten nachweisen!

z.B. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$$\exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(y \cdot \ln a) = \exp(x \cdot \ln a + y \cdot \ln a)$$
$$= \exp((x+y) \cdot \ln a) = a^{x+y}$$

und $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

und $a^2 = a \cdot a$ und vieles mehr ...

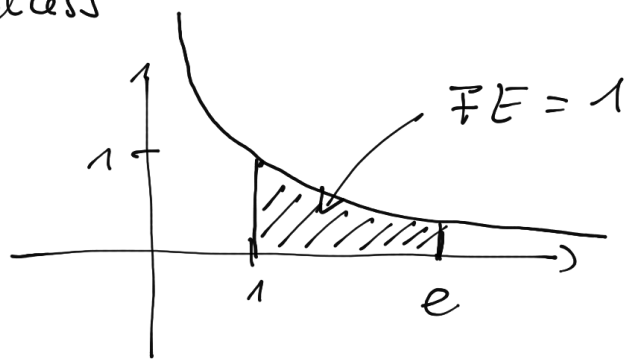
<u>Bemerkung</u>: $e = ?$

$$e = \exp(1)$$

also $1 = \ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt$

bestimme $x = e$ so, dass

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$$



4.14 Die Winkelfunktionen im Schnelldurchlauf

Für $x \in \mathbb{R}$ setze $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \arctan 0 = 0$$

arctan ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

ZWS: $\arctan : \mathbb{R} \to (a, b)$ umkehrbar.

Es gilt: $\arctan(-x) = \arctan x$

$$\arctan(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}\,dt \overset{\text{Subst. } s=-t}{=} \int_0^x \frac{1}{1+(-s)^2} \cdot (-1) \cdot ds$$

$$= -\arctan x \quad \checkmark$$

Also: $a = -b$, reicht, b zu bestimmen.

$$\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Folgt: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ ist konstant auf $(0,\infty)$

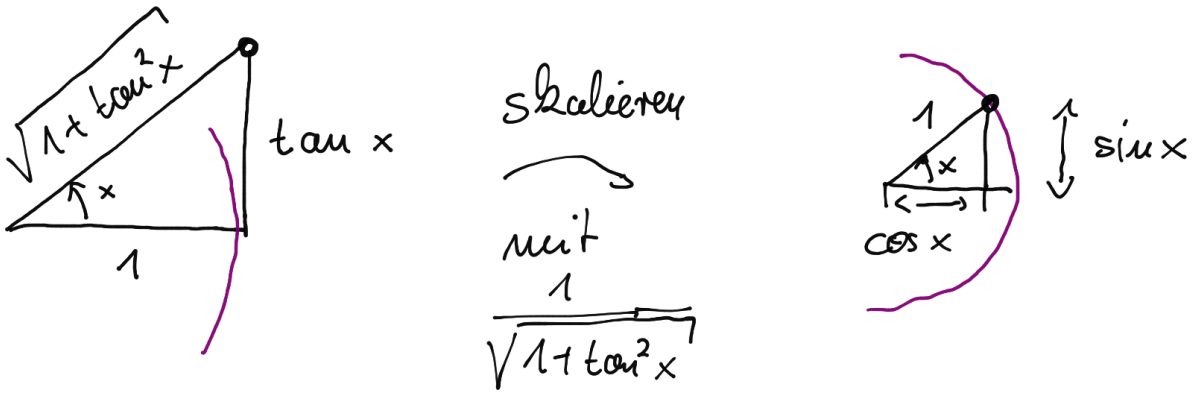
Setze $\pi \overset{\text{Def.}}{=} 4\cdot\arctan 1 = 4\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \lim_{x\to\infty} \arctan x + \lim_{x\to\infty} \arctan\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Also: $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ besitzt eine Umkehrfunktion $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.



<u>Def</u> Für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ setze

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

Dann: $\cos, \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ sind diff'bar,

$\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Setze per $\cos(x+\pi) = -\cos x$

und $\sin(x+\pi) = -\sin x$ fort.

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x \text{ "}= \frac{1}{\sqrt{1+\infty^2}}\text{ "} = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \qquad (\text{wg. } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ \& \ \ldots)$$

<u>Lemma</u>: I Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $p \in I$

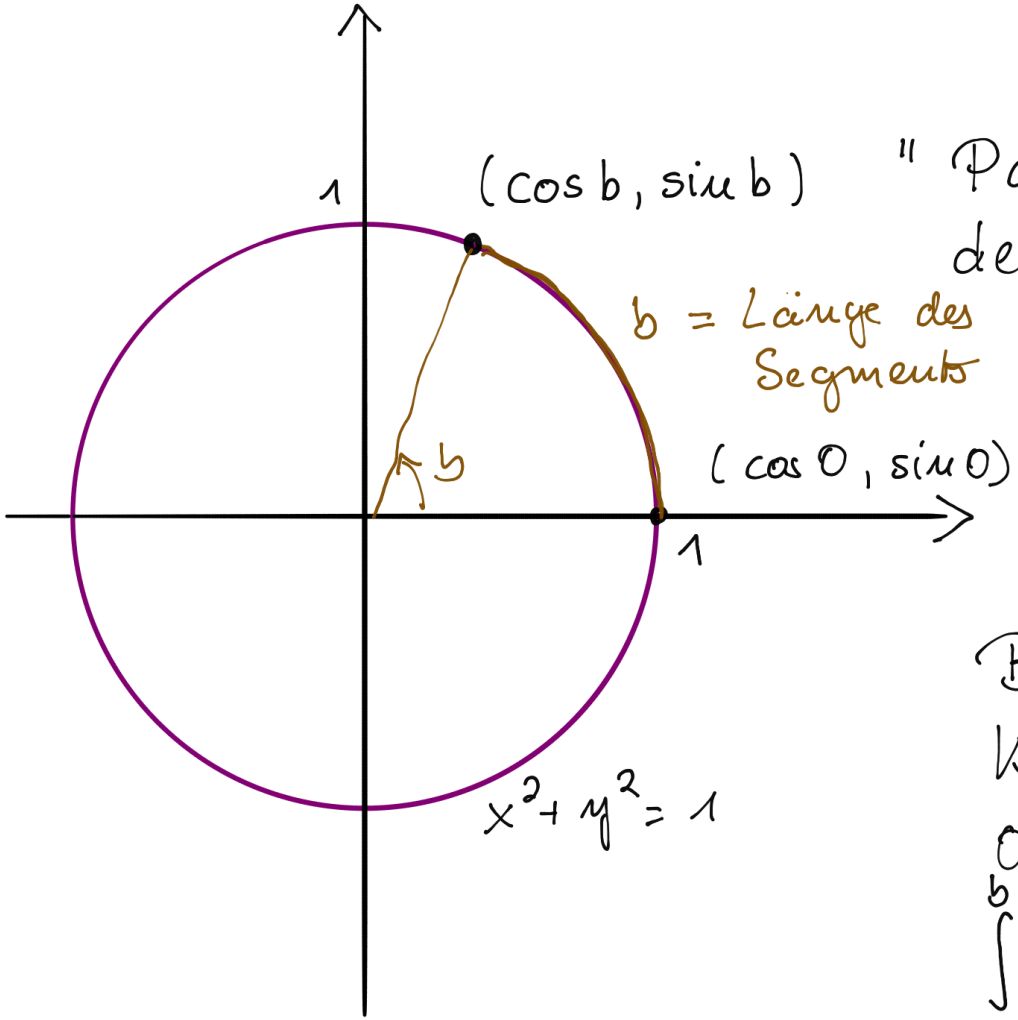
mit: f ist stetig diff'bar auf $I \setminus \{p\}$.

Ist f' in p stetig ergänzbar $\left(\lim_{x \to p} f'(x) = u \right)$,

so ist f in u diff'bar und $f'(p) = u$.

Hieraus erhalte: $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

sind differenzierbar.



"Parametrisierung" des Einheitskreises.

Bogenlänge der Kurve $(x(t), y(t))$, $0 \le t \le b$, ist

$$\int_0^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Hier:

$$\int_0^b \sqrt{((\cos t)')^2 + ((\sin t)')^2}\, dt = \int_0^b 1\, dt = b$$

4.15 Uneigentliche Integrale

Vorgelegt: $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

f sei stetig, also speziell:

$\int_a^u f(x)\,dx$ existiert für jedes $a \leq u < b$

Dann setze $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to b-} \int_a^u f(x)\,dx$,

falls dieser Grenzwert existiert.

Bsp: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u =$

$\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1} x^{-1} = -\frac{1}{x}$

$= \lim_{u \to \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1\right) = 1.$

Genauso $\int_a^b f(x)\,dx$ für auf $(a, b]$ erklärte Funktionen

$\int_a^b f(x)\,dx$ für auf (a, b) erklärte Funktionen

Etwas anders: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $p \in (a, b)$

f ist auf $[a, p)$ und auf $(p, b]$ definiert.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{u \to p-} \int_a^u f(x)\,dx + \lim_{u \to p+} \int_u^b f(x)\,dx$$

oder "Cauchy-Hauptwert"

$$\text{CHW-}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0+} \left(\int_a^{p-h} f(x)\,dx + \int_{p+h}^b f(x)\,dx \right)$$

also $h > 0$

§4 S.61

Beispiel $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{u\to 0-} \int_{-1}^{u} \frac{1}{x^3}\,dx + \lim_{v\to 0+} \int_{v}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$

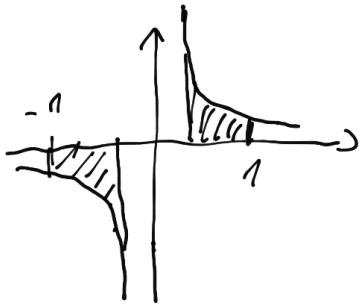
$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$= \lim_{u\to 0-} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{u} + \lim_{v\to 0+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{v}^{1}$$ existiert <u>nicht</u> !

Dagegen $\displaystyle \text{CHW}\!-\!\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{h\to 0+}\left(\int_{-1}^{-h} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{h}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx\right)$

$$= \lim_{h\to 0+}\left(\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-h} + \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{h}^{1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0+}\left(-\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2h^2}\right) = 0$$



Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \text{für } x > 0$$

Gamma

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{u\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty} (1 - e^{-u}) = 1$
- $x > 1$: $\Gamma(x) = \lim_{u\to\infty} F(u)$ mit $F(u) = \int_0^u \underbrace{e^{-t} t^{x-1}}_{>0}\, dt$

  ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend,

  d.h. $\lim_{u\to\infty} F(u)$ existiert genau dann, wenn $F(u)$ beschränkt

Es gilt:

Satz $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$ für jedes Polynom $p(x)$.

Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad \text{für } x > 0$$

$$F(u) = \int_0^u e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} t^{x-1} \cdot t^2 = 0, \quad \text{d.h.}$$

Es gibt N mit $e^{-t} t^{x-1} \cdot t^2 \leq 1$ für $t \geq N$

bzw. $e^{-t} t^{x-1} \leq t^{-2}$ für $t \geq N$

$$F(u) = \int_0^N e^{-t} t^{x-1}\,dt + \int_N^u e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

$$\leq \int_0^N e^{-t} t^{x-1}\,dt + \int_N^u t^{-2}\,dt \leq \int_0^N e^{-t} t^{x-1}\,dt + \underbrace{\int_1^\infty t^{-2}\,dt}_{= 1 \text{ gibt es!}}$$

ist beschränkt ✓

Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \text{für} \quad x > 0$$

Für $0 < x < 1$ geht der Konvergenzbeweis ähnlich,

beachte: $\Gamma(x) = \lim\limits_{h \to 0+} \int_h^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt + \lim\limits_{u \to \infty} \int_1^u e^{-t} t^{x-1}\, dt$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-t}}_{u'(t)} \underbrace{t^x}_{v(t)}\, dt = \left[-e^{-t} t^x\right]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$(x \geq 1)$

$u(t) = -e^{-t}, \quad v'(t) = x \cdot t^{x-1}$

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Speziell: $x = n$ natürliche Zahl

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) =$$

$$= \ldots\ldots = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underbrace{\Gamma(1)}_{=1} = n!$$

Für die Übung brauchen wir noch

4.16 Vergleichskriterium

(a) Ist $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und gibt es α, k mit $1 < \alpha$ und $|f(x)| \leq K / x^\alpha$ für alle (großen) x, so konvergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

(b) Ist $f : (0, b] \to \mathbb{R}$ stetig und gibt es α, k mit $0 < \alpha < 1$ und $|f(x)| \leq K / x^\alpha$ für alle $x \in (0, b]$, so konvergiert $\int_0^b f(x)\,dx$.

Notiz $\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int x^{-\alpha}\,dx \overset{\alpha \neq 1}{=} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$

$1 < \alpha \rightsquigarrow 1 - \alpha < 0 \rightsquigarrow \lim_{x \to \infty} x^{1-\alpha} = 0 \rightsquigarrow \int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergiert (>0)

Spezialfall: $0 \leq f(x) \leq K / x^\alpha$ mit $1 < \alpha$ gilt für alle x

$F(u) = \int_a^u f(t)\,dt \leq \int_a^\infty \frac{K}{x^\alpha}\,dx \in \mathbb{R}$; $F(u)$ mon. wachsend und beschränkt, also gibt es $\lim_{u \to \infty} F(u) = \int_a^\infty f(x)\,dx$

§4 / S. 66

Übung

Stelle jeweils fest, ob das uneigentliche Integral existiert, und berechne ggf. dessen Wert.

① $$\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_0^u x\cdot e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^u$$

$$= \circledast$$

Stammfunktion von $x\cdot e^{-x}$

Ansatz: $$\left[(ax+b)\cdot e^{-x}\right]' = (a-ax-b)e^{-x} \overset{!}{=} x\cdot e^{-x}$$

$$\circledast = \lim_{u\to\infty}\left(1-(1+u)e^{-u}\right) = \underline{\underline{1}}$$

② $$\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \underbrace{(-x^2)'\cdot e^{-x^2}}_{=(e^{-x^2})'}\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left[e^{-x^2}\right]_0^u$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left(e^{-u^2}-1\right) = \frac{1}{2} \;//$$

③ $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx$

$$\int 2x\cdot(x^2-1)^{\overset{=-1-1}{-2}}\,dx = -\int -(x^2-1)'\cdot(x^2-1)^{-1-1}\,dx$$

$$= -\int \left((x^2-1)^{-1}\right)'\,dx = -\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$$

⚠ $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx \neq \left[\frac{1}{1-x^2}\right]_0^2$ ⚠

denn $\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ hat Singularität $x=-1$ im Integrationsintervall $[0,2]$.

CHW $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx = \lim_{h\to 0+}\left(\int_0^{1-h}\cdots + \int_{1+h}^{2}\cdots\right) = \lim_{h\to 0+}\left(\left[\frac{1}{1-x^2}\right]_0^{1-h} + \left[\frac{1}{1-x^2}\right]_{1+h}^{2}\right)$

$$= -1 - \frac{1}{3} + \lim_{h\to 0+}\left(\frac{1}{1-(1-h)^2} - \frac{1}{1-(1+h)^2}\right)$$

③ (Forts.)

$$\text{CHW} \int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx = -1 - \frac{1}{3} + \lim_{h\to 0+} \left(\frac{1}{\underbrace{1-(1-h)^2}_{2h-h^2}} - \frac{1}{\underbrace{1-(1+h)^2}_{-2h-h^2}} \right)$$

$$= -\frac{4}{3} + \lim_{h\to 0+} \frac{+2h+h^2 - (2h-h^2)}{+(2h+h^2)\cdot(2h-h^2)}$$

$$= -\frac{4}{3} + \lim_{h\to 0+} \frac{4h}{4h^2-h^4} \quad \text{divergiert.}$$

④ Konvergiert $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$?

Schmierblatt: Für große x gilt $1+x^4 \approx x^4$

also $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ div.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{k}{x} \quad \leftarrow \quad x^2 \geq k\cdot\sqrt{1+x^4}$$

Konstante

$$\leftarrow \quad x^4 \geq k^2\cdot(1+x^4) = k^2 + k^2\cdot x^4$$

$$\leftarrow \quad (1-k^2)\cdot x^4 \geq k^2$$

$$\xleftarrow{x\geq 2} \quad (1-k^2)\cdot 2^4 \geq k^2$$

$$\leftarrow \quad 16 \geq 17k^2 \quad \text{gilt z.B. für } k=\frac{1}{2}$$

Reinschrift: $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 17 \leq 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot 2^4$

$$\leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot x^4 \text{ f. } x\geq 2$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(1+x^4) \leq x^4$ bzw. $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+x^4} \leq x^2$

und damit $\frac{1}{2x} \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$

(4) Konvergiert $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$?

Für $x \geq 2$ gilt $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{1}{2x}$

Für $x \geq 2$ gilt $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,x}$ geht schneller.

Es folgt: $\int_2^u \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} \geq \int_2^u \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}(\ln u - \ln 2) \xrightarrow{u \to \infty} \infty$

d.h. $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$ divergiert.

§4/S.71

⑤ Konvergiert $\int_8^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x+x^3}}$?

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^3+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}\,x}$$

Also: $\int_8^u \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x+x^3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \int_8^u \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\ln u - \ln 8) \longrightarrow \infty$

Liefert: Integral divergiert.

⑥ $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ konvergiert ?

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{x^3}$$

Vergleichssatz: konvergiert

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{2/x^3}{2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'}{2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx = \int \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)' dx = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Folgt: $$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} \text{ "}= \left[\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right]_2^\infty \text{ "}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}_{=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zusatz: $$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot \ln x} = \int_1^e \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \int_1^e \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = \left[\ln \ln x\right]_1^e$$

$$= 0 + \infty = \infty .$$