

## 4.13 Logarithmus und Exponentialfunktion

Für  $x > 0$  setze

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$\underbrace{1}_{\text{stetig}} \sim \text{Integral existiert}$

Hauptatz:  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  und  $\ln 1 = 0$

Notiz:  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f'(x) = \frac{1}{x}$  und  $f(1) = 0$ .

Dann gilt  $f(x) = \ln x$  für alle  $x$ .

Rechenregel:  $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

$$\text{Denn: } (\ln(x \cdot y))' = \frac{y}{x \cdot y} = \frac{1}{x}$$

$$\text{Folgt: } \ln(x \cdot y) = \ln x + c(y)$$

$$\text{Dabei } \ln(1 \cdot y) = \ln 1 + c(y) \rightsquigarrow c(y) = \ln y$$

$$\text{bzw. } \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \text{ wie gewünscht.}$$

Hieraus erhalte :

$$\ln x^2 = 2 \ln x$$

$$\ln x^3 = 3 \ln x$$

⋮

$$\boxed{\ln x^n = n \cdot \ln x \quad \text{für natürliche Zahlen } n}$$

$$0 = \ln 1 = \ln \left( x^n \cdot \frac{1}{x^n} \right) = \ln x^n + \ln \frac{1}{x^n} = n \cdot \ln x + \ln x^{-n}$$

liefert:  $\ln x^{-n} = -n \cdot \ln x$ ; erhalte

$$\boxed{\ln x^n = n \cdot \ln x \quad \text{für ganze Zahlen } n}$$

Nun betrachte die Funktion  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Wegen  $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$  ist  $\ln$  streng monoton wachsend.

$\ln 2 > \ln 1 = 0 \rightsquigarrow \ln 2^n = n \cdot \ln 2$  nimmt beliebig

große Werte an;  $\ln \left(\frac{1}{2}\right)^n = -n \cdot \ln 2$  nimmt beliebig  
kleine Werte an.

§4 / S.51

Fazit:  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton  
wachsend und  $\{\ln x \mid 0 < x < \infty\} = \mathbb{R}$   
(zws?) sowie:  $\ln$  differenzierbar.

Es gibt daher eine differenzierbare Umkehrfunktion  
 $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  Exponentialfunktion  
von  $\ln$ . Diese ist streng monoton wachsend.

$$\begin{aligned} \text{Aus } x = \ln \exp x \text{ folgt } 1 &= (\ln \exp x)' \\ &= \ln'(\exp x) \cdot \exp' x \\ &= \frac{\exp' x}{\exp x} \\ \text{bzw. } \boxed{\exp' = \exp} \quad \text{und } \boxed{\exp(0) = 1} \\ \text{w.g. } \ln 1 &= 0. \end{aligned}$$

Sehe  $e = \exp(1)$  Eulersche Zahl

und  $a^b = \exp(b \cdot \ln a)$  für  $a > 0$ .

Bek.:  $e^b = \exp(b)$

$$\begin{array}{l} \text{Def.} \\ \text{L} \end{array} \quad \exp(b \cdot \underbrace{\ln e}_{=1}) = \exp(b) \quad \checkmark$$

wg.  $e = \exp(1)$

Rechenregeln für Potenzen lassen sich für bel.  
Exponenten nachweisen

Z.B.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$$\begin{aligned} \exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(y \cdot \ln a) &= \exp(x \cdot \ln a + y \cdot \ln a) \\ &= \exp((x+y) \cdot \ln a) = a^{x+y} \end{aligned}$$

und  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

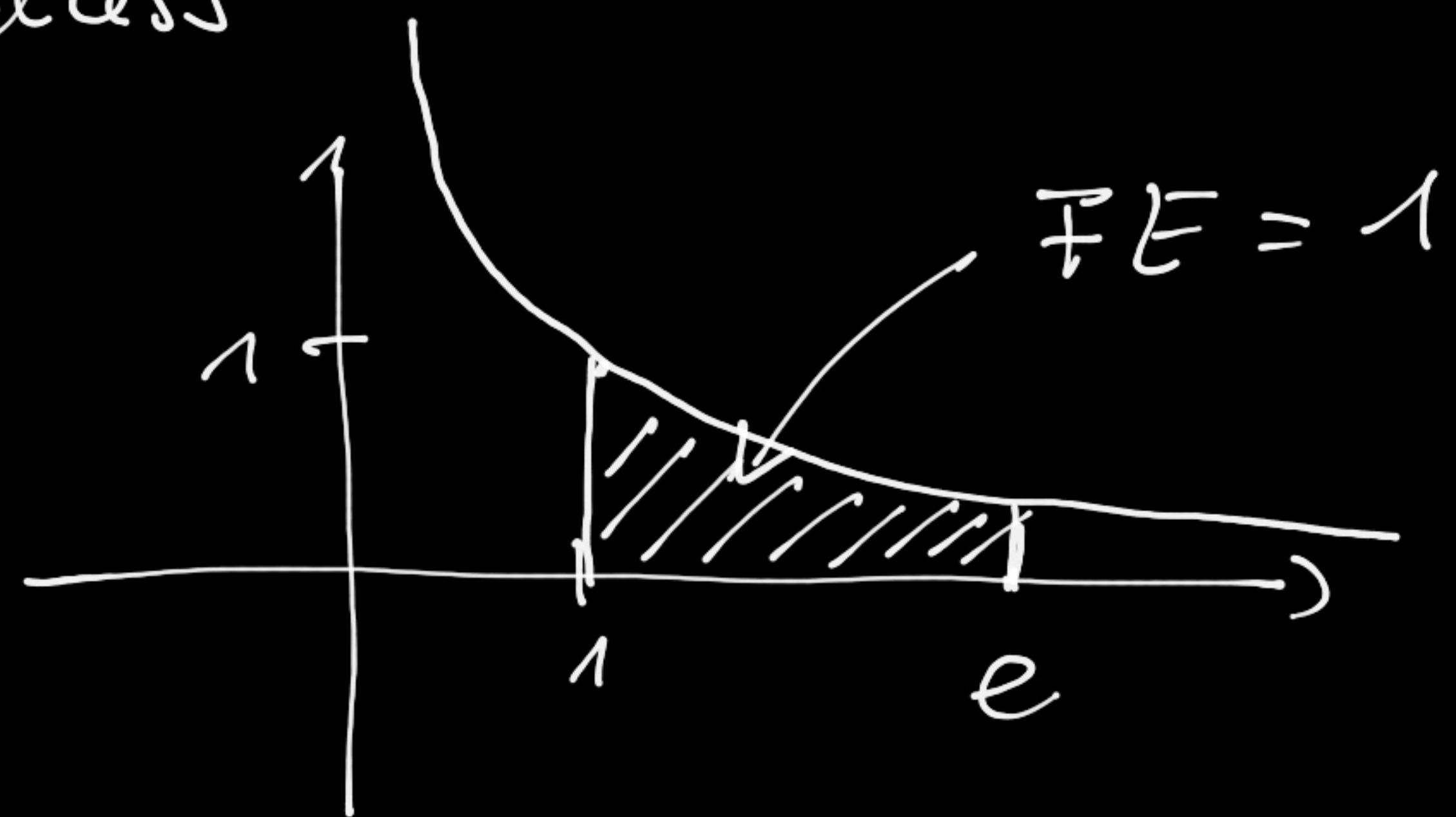
und  $a^2 = a \cdot a$  und vieles mehr...

Bemerkung:  $e = ?$

$$e = \exp(\lambda) \quad e \\ \text{also} \quad \lambda = \ln e = \int_1^e \frac{1}{t} dt$$

bestimme  $x = e$  so, dass

$$x \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lambda$$



#### 4.14 Die Winkelfunktionen

im Schnell durchlaufen

$$\text{Für } x \in \mathbb{R} \text{ setze } \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \arctan 0 = 0$$

$\arctan$  ist auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend.

Zws.:  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (\alpha, \beta)$  umkehrbar.

$$\text{Es gilt: } \arctan(-x) = \arctan x$$

$$\arctan(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt \stackrel{\substack{\text{Subst.} \\ s = -t}}{=} \int_0^x \frac{1}{1+(-s)^2} \cdot (-1) \cdot ds$$

$$= -\arctan x \quad \checkmark$$

Also:  $\alpha = -\beta$ , reicht,  $\beta$  zu bestimmen.

$$\left( \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Folgt:  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$  ist konstant auf  $(0, \infty)$

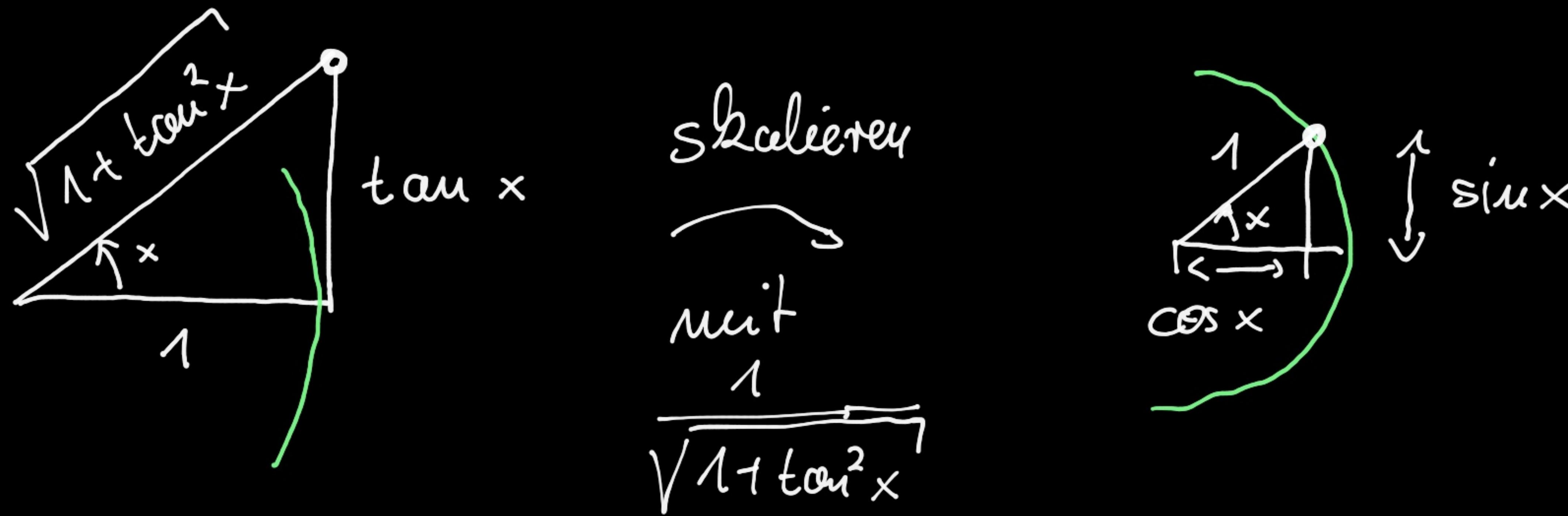
$$\text{Seite } \pi \stackrel{\text{Def.}}{=} 4 \cdot \arctan 1 = 4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \arctan 1 + \arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x + \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Also:  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$  besitzt eine

Umkehrfunktion  $\tan : \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ .



Def Für  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  setze

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

Dann:  $\cos, \sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  sind diff'bar,  
 $\cos' = -\sin$ ,  $\sin' = \cos$  und  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

Setze per  
 und  $\cos(x + \pi) = -\cos x$   
 $\sin(x + \pi) = -\sin x$  fort.

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \infty^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \quad (\text{wgl. } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ ...})$$

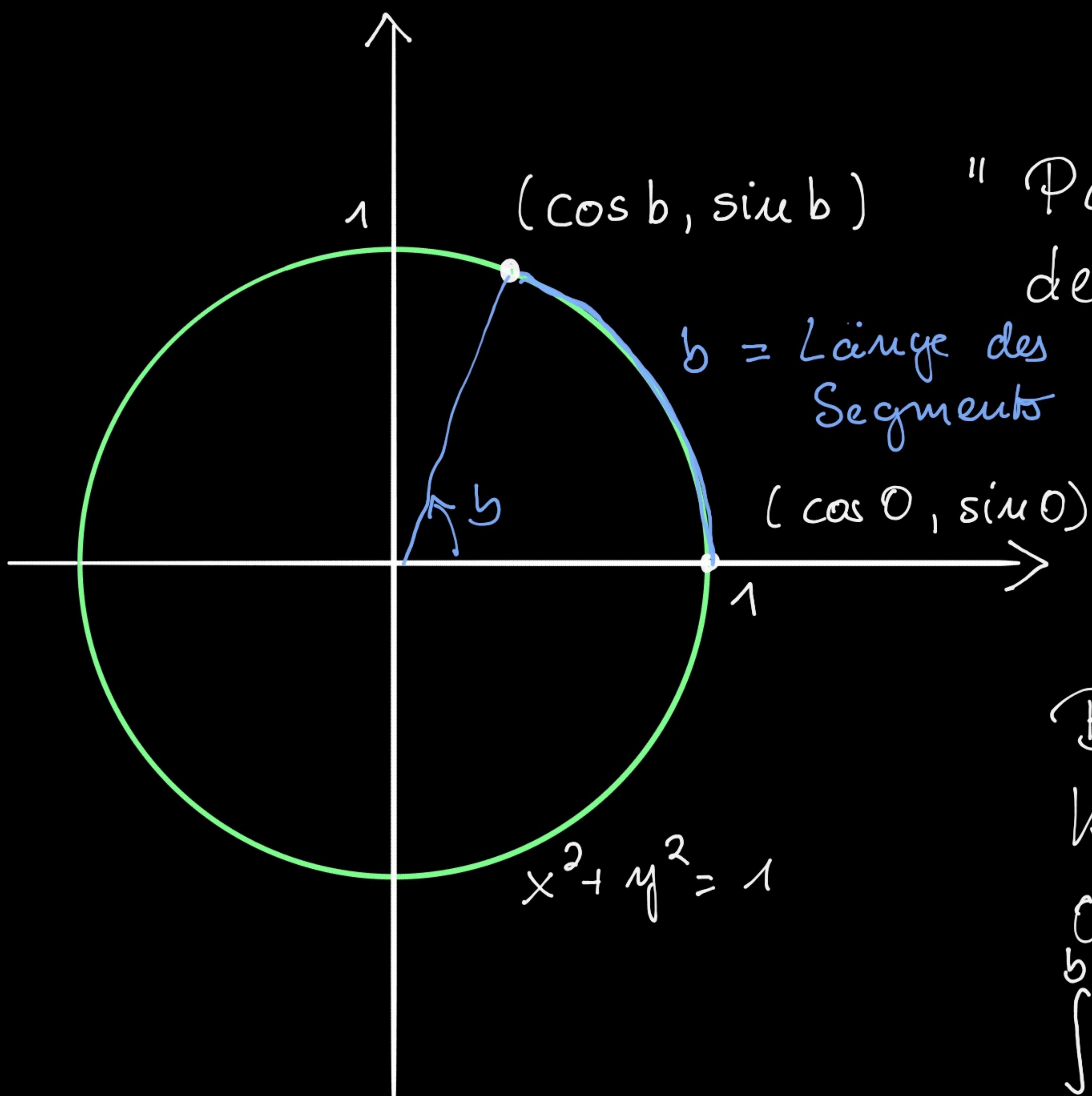
Lemma : I Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $p \in I$

mit :  $f$  ist stetig diff'bar auf  $I \setminus \{p\}$ .

Ist  $f'$  in  $p$  stetig eignäzbar ( $\lim_{x \rightarrow p} f'(x) = u$ ),

so ist  $f$  in  $p$  diff'bar und  $f'(p) = u$ .

Hieraus erhält :  $\cos, \sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   
sind differenzierbar.



"Parametrisierung"  
des Einheitskreises.

$b = \text{Länge des Segments}$

$(\cos 0, \sin 0)$

Bogenlänge der Kurve  $(x(t), y(t))$ ,

$0 \leq t \leq b$ , ist

$$\int_0^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Hier:

$$\int_0^b \sqrt{(\cos t')^2 + (\sin t')^2} dt = \int_0^b 1 dt = b$$

## 4.15 Unendliche Integrale

Vorgelegt:  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$f$  sei stetig, also speziell:

$\int_a^u f(x) dx$  existiert für jedes  $a \leq u < b$

Dann setze  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx$ ,

falls diese Grenzwert existiert.

$$\text{Bsp: } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^u =$$

$\uparrow$

$$\int x^{-2} dx = \frac{1}{-1} x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{u} + 1 \right) = 1 .$$

§4 (S. 60)

Genauso

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{für auf } (a, b] \text{ erklärte Funktionen}$$

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{für auf } (a, b) \text{ erklärte Funktionen}$$

Etwas anderes:  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \in (\alpha, \beta)$

$f$  ist auf  $[\alpha, p)$  und auf  $(p, \beta]$  definiert.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx \\ &= \lim_{u \rightarrow p^-} \int_a^u f(x) dx + \lim_{u \rightarrow p^+} \int_u^b f(x) dx \end{aligned}$$

Oder "Cauchy-Hauptwert"

$$\text{CHW-} \int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{p-h} f(x) dx + \int_{p+h}^b f(x) dx \right)$$

C also  $h > 0$

$$\underline{\text{Beispiel}} \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \lim_{u \rightarrow 0^-} \int_{-1}^u \frac{1}{x^3} dx + \lim_{v \rightarrow 0^+} \int_v^1 \frac{1}{x^3} dx$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-2} x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^-} \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_{-1}^u + \lim_{v \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_v^1$$

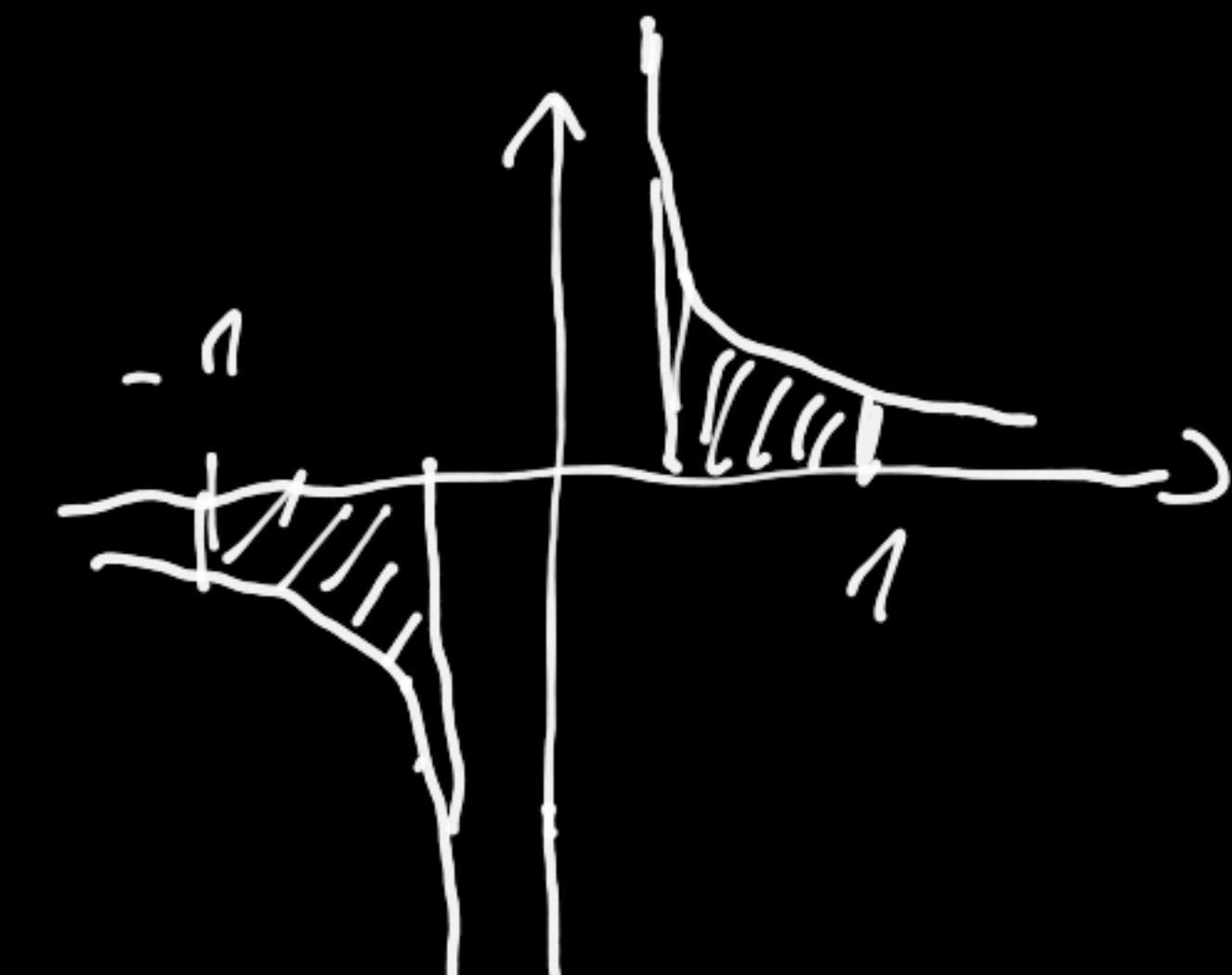
existiert  
nicht

Dagegen

$$CHW - \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-h} \frac{1}{x^3} dx + \int_h^1 \frac{1}{x^3} dx \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_{-1}^{-h} + \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_h^1 \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2h^2} \right) = 0$$



Beispiel : Die Gamma - Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } x > 0$$

↑  
Gamma

- $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^u = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - e^{-u}) = 1$

- $x > 1$  :  $\Gamma(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} F(u)$  mit  $F(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt > 0$

ist auf  $[0, \infty)$  streng monoton wachsend,

d.h.  $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u)$  existiert genau dann, wenn  $F(u)$  beschränkt

Es gilt :

Satz  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x)}{e^x} = 0$  für jedes Polynom  $p(x)$ .

Beispiel : Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } x > 0$$

$$F(u) = \int_0^u e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{x-1} \cdot t^2 = 0, \quad \text{d.h.}$$

Es gibt  $N$  mit  $e^{-t} t^{x-1} \cdot t^2 \leq 1$  für  $t \geq N$   
bzw.  $e^{-t} t^{x-1} \leq t^{-2}$  für  $t \geq N$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^N e^{-t} t^{x-1} dt + \int_N^u e^{-t} t^{x-1} dt \\ &\leq \int_0^N e^{-t} t^{x-1} dt + \int_N^u t^{-2} dt \leq \int_0^N e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty t^{-2} dt \\ &= 1 \text{ gäbt es } \square \end{aligned}$$

ist beschränkt ✓

Beispiel : Die Gamma - Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } x > 0$$

Für  $0 < x < 1$  gelte der Konvergenz beweis ähnlich,

beachte :  $\Gamma(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u e^{-t} t^{x-1} dt$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u(t)} \underbrace{t^x}_{v(t)} dt = [-e^{-t} t^x]_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

( $x \geq 1$ )

$$u(t) = -e^{-t}, v'(t) = x \cdot t^{x-1}$$

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Speziell.  $x = n$  natürliche Zahl

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \\ &= \dots = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \underbrace{\Gamma(1)}_{=1} = n! \end{aligned}$$

Für die Übung brauchen wir noch

#### 4.16 Vergleichskriterium

- (a) Ist  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gibt es  $\alpha, k$  mit  $1 < \alpha$  und  $|f(x)| \leq K/x^\alpha$  für alle (großen)  $x$ , so konvergiert  $\int_a^\infty f(x) dx$ .
- (b) Ist  $f: (0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gibt es  $\alpha, k$  mit  $0 < \alpha < 1$  und  $|f(x)| \leq K/x^\alpha$  für alle  $x \in (0, b]$ , so konvergiert  $\int_0^b f(x) dx$ .

Notiz  $\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \int x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$   
 $1 < \alpha \rightsquigarrow 1-\alpha < 0 \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-\alpha} = 0 \rightsquigarrow \int_{\alpha(0)}^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  konvergiert

Spezialfall:  $0 \leq f(x) \leq \frac{K}{x^\alpha}$  mit  $1 < \alpha$  gilt für alle  $x$

$$F(u) = \int_a^u f(t) dt \leq \int_a^u \frac{K}{x^\alpha} dx \in \mathbb{R}; F(u) \text{ mon. wachsend und beschränkt, also gibt es } \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \int_a^\infty f(x) dx$$

# Übung

§4 | S. 66

Stelle jeweils fest, ob das unbestimmte Integral existiert, und berechne ggf. dessen Wert.

$$\textcircled{1} \quad \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u x \cdot e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} [(-x - 1)e^{-x}]_0^u \\ = \textcircled{x}$$

Stammfunktion von  $x \cdot e^{-x}$   
 Aus abr.:  $[(ax+b) \cdot e^{-x}]^1 = (a - ax - b)e^{-x} \stackrel{!}{=} x \cdot e^{-x}$

$$\textcircled{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - (1+u)e^{-u}) = \underline{\underline{1}}$$

$$\textcircled{2} \quad \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underbrace{(-x^2)'}_{= (e^{-x^2})'} \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow \infty} [e^{-x^2}]_0^u \\ = -\frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow \infty} (e^{-u^2} - 1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\textcircled{3} \quad \int_0^2 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int 2x \cdot (x^2 - 1)^{-2} dx &= - \int - (x^2 - 1)^1 \cdot (x^2 - 1)^{-1-1} dx \\ &= - \int ((x^2 - 1)^{-1})^1 dx = - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

~~Einsetzen~~

$$\int_0^2 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx \neq \left[ \frac{1}{1-x^2} \right]_0^2$$

~~Einsetzen~~

der Funktion  $\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$  hat Singularität  $x = -1$  im

Integrationsintervall  $[0, 2]$ .

$$\begin{aligned} \text{CHW} \int_0^2 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx &= \lim_{h \rightarrow 0+} \left( \int_0^{1-h} \dots + \int_{1+h}^2 \dots \right) = \lim_{h \rightarrow 0+} \left( \left[ \frac{1}{1-x^2} \right]_0^{1-h} - \left[ \frac{1}{1-x^2} \right]_{1+h}^2 \right) \\ &= -1 - \frac{1}{3} + \lim_{h \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{1-(1-h)^2} - \frac{1}{1-(1+h)^2} \right) \end{aligned}$$

(3) (Forts.)

$$\begin{aligned}
 & \text{CHW} \int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2} dx = -1 - \frac{1}{3} + \lim_{h \rightarrow 0+} \left( \frac{\frac{1}{1-(1-h)^2}}{2h-h^2} - \frac{\frac{1}{1-(1+h)^2}}{-2h-h^2} \right) \\
 &= -\frac{4}{3} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h+h^2 - (2h-h^2)}{(2h+h^2) \cdot (2h-h^2)} \\
 &= -\frac{4}{3} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4h}{4h^2-h^4} \quad \text{divergiert.}
 \end{aligned}$$

④ Konvergiert  $\int_a^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}$  ?

Schmierblatt: Für große  $x$  gilt  $1+x^4 \approx x^4$

also  $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ ;  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$  div.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{k}{x} \quad \leftarrow \quad x^2 \geq k \cdot \sqrt{1+x^4}$$

$$\leftarrow x^4 \geq k^2 \cdot (1+x^4) = k^2 + k^2 \cdot x^4$$

$$\leftarrow (1-k^2) \cdot x^4 \geq k^2$$

$$\leftarrow^{x \geq 2} (1-k^2) \cdot 2^4 \geq k^2$$

$$\leftarrow 16 \geq 17k^2 \quad \text{gilt z.B. f. } k = \frac{1}{2}$$

Reinschrift:  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 17 \leq 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq (1 - (\frac{1}{2})^2) \cdot 2^4$

$$\leq (1 - (\frac{1}{2})^2) \cdot x^4 \quad \text{f. } x \geq 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1+x^4) \leq x^4 \quad \text{bzw. } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^4} \leq x^2$$

und damit  $\frac{1}{2x} \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$

④ Konvergiert  $\int_2^\infty \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}$  ?

$$\text{Für } x \geq 2 \text{ gilt } \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{1}{2x}$$

$$\text{Für } x \geq 2 \text{ gilt } \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}x} \quad \text{geht schneller.}$$

$$\text{Es folgt, } \int_2^u \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} \geq \int_2^u \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} (\ln u - \ln 2) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \infty$$

$$\text{d.h. } \int_2^\infty \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} \text{ divergiert.}$$

⑤ Konvergiert  $\int_8^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x+x^3}}$  ?

$$\sqrt[3]{\frac{1}{1+x+x^3}} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x^3+x^3+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}x}$$

Also:  $\int_8^u \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x+x^3}} \geq \sqrt[3]{3} \int_8^u \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} (\ln u - \ln 8) \rightarrow \infty$

Liefert: Integral divergiert.

⑥  $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$  konvergiert?

$$\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{x^3}$$

Vergleichssatz: konvergiert

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \int \frac{\frac{2}{x^2} / x^3}{2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} dx \\
 &= \int \frac{(1 - \frac{1}{x^2})'}{2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} dx = \int \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)' dx = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}
 \end{aligned}$$

Folgt:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = \left[ \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right]_2^\infty$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}}_{= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

Zusatz:

$$\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int_1^e \frac{1/x}{\ln x} dx = \int_1^e \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = [\ln \ln x]_1^e = 0 + \infty = \infty .$$