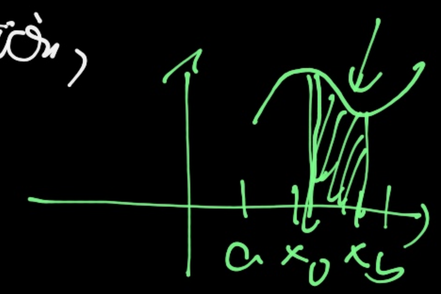
§4: Der Hauptsatz

$\int_a^b f(x)\,dx = ?$ Vor. f ist stetig

F heißt <u>Stammfunktion</u> von f, falls $F' = f$

<u>Bsp</u>: $f(x) = x^2 \rightsquigarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3$ Stammfunktion,

denn $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$ ✓



Dann: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

<u>Bsp</u>: $\int_1^2 x^2\,dx \overset{\text{Hauptsatz}}{=} F(2) - F(1) = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Stammfunktion: $\frac{1}{3}x^3 = F(x)$

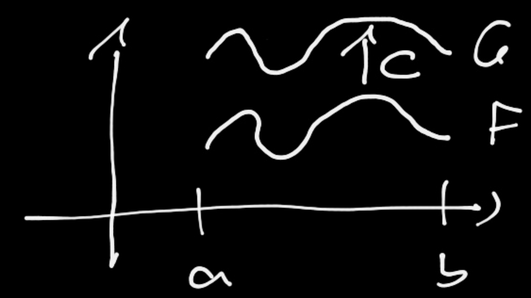
<u>Hauptsatz</u>: Ist f stetig auf $[a,b]$ und $x_0 \in [a,b]$,

so ist $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfunktion

von f.

Hauptsatz: Ist f auf $[a,b]$ stetig und $x_0 \in [a,b]$, so ist $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

Es gilt: Sind $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von f, so gibt es ein c mit $G(x) = F(x) + c$ f. alle x



Denn: $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x)$

$= f(x) - f(x) = 0$ f. alle $a \le x \le b$

Also (§ 2): Es gibt c mit

$F(x) - G(x) = c$ bzw. $F(x) = G(x) + c$ für alle x. ✓

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

Folgt $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt$

$= \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt \overset{\text{Hauptsatz}}{=} F(b) - F(a)$

$= (F(b) + c) - (F(a) + c) = G(b) - G(a)$ ✓

Speziell: $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{7}{3}$

<u>Anwendung</u>: $\pi^{\sqrt{2}} = ?$

$= \left(e^{\ln \pi}\right)^{\sqrt{2}}$

$= e^{\sqrt{2} \cdot \ln \pi}$

$e = 2{,}7\ldots$

$(e^x)' = e^x$

$\ln x$ Umkehrfkt.

Erinnerung: e^x ist streng monoton wachsend und differenzierbar, also gibt es Umkehrfkt. $\ln$.

$(x>0)$: $x = e^{\ln x} \rightsquigarrow 1 = (\ln x)' \cdot e^{\ln x} = (\ln x)' \cdot x$

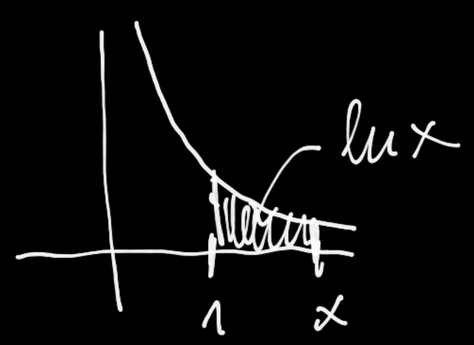
bzw. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ stetig.

HAUPTSATZ. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \overset{\text{Def}}{=} \ln x$ diff'bar

$(x>0)$

Stammfkt. von $\frac{1}{x}$ mit $F(1) = \ln 1 = 0$.



$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ für $x > 0$

4.1 Stammfunktionen

I Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$.
Eine Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f (auf I), falls F auf I diff'bar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

4.2 Satz (I Intervall)
Sind F, G zwei Stammfunktionen von f auf I, so gibt es eine Zahl c, sod.

$$G(x) = F(x) + c \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis: Nach Vor. $F'(x) = f(x) = G'(x)$

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{f. alle } x$$

(2.19): Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) - F(x) = c$ f. alle x

bzw. $G(x) = F(x) + c$ für alle x.

Bsp: $f(x) = x^2$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist Stammfunktion (gesucht)

$((F(x)+c)' = F'(x))$

Also $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ — " —

$(c \in \mathbb{R})$

und mehr Stammfunktionen gibt es nicht.

Sprechweise: unbestimmtes Integral

$\int f(x)\,dx$ bezeichnet die Menge aller Stammfunktionen von f.

Also $\int x^2\,dx = \left\{ \frac{1}{3}x^3 + c \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$

suche eine Stammfunktion aus!

Schreibe $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 42$ $(+c,\ c \in \mathbb{R})$

Liste einiger Stammfunktionen

Für $n \neq -1$ ist $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$, denn:

$$\left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)' = (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1-1} = x^n.$$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x$, $\int e^x \, dx = e^x$

$\int \sin x \, dx = -\cos x$, $\int \cos x \, dx = \sin x$,

$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x$ usw.

denn $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

<u>Notiz</u> F Stammfkt von f, G Stammfkt von g

Dann: $F+G$ Stammfkt von $f+g$,

denn $(F+G)' = F' + G' = f + g$

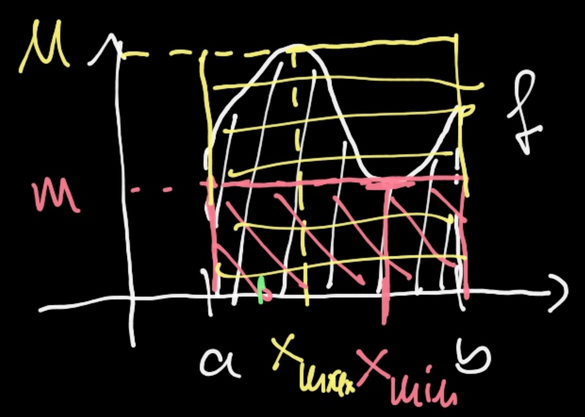
4.3 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung (MWS-I)

Vorgelegt ist eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann gibt es ein $p \in [a,b]$ mit

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{exist. (3.22)}} = f(p)\cdot(b-a)$$

Beweis



MinMax: Es gibt $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit $m = f(x_{min}) \le f(x) \le M = f(x_{max})$ für alle x gilt.

Monotonie des Integrals:

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\boxed{z}} \le M\cdot(b-a)$$

$m\cdot(b-a) = f(x_{min})\cdot(b-a)$ und $M\cdot(b-a) = f(x_{max})\cdot(b-a)$ sind Werte der stetigen Fkt $h(x) = f(x)\cdot(b-a)$; z liegt dazwischen

ZWS: Gibt $p \in [a,b]$ mit $f(p)\cdot(b-a) = h(p) = z = \int_a^b f(x)\,dx$ ∎

4.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Vorgelegt ist ein Intervall I, eine stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in I$. Dann gilt:

(a) Die Funktion $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f auf I,

existiert für jedes x, dem f stetig

d.h. $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)$.

(b) Ist G eine bel. Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \overset{\text{Def.}}{=} [G(x)]_a^b$

für $a, b \in I$.

<u>Beweis von a)</u>: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$$

Intervalladditivität

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

MWS-I: Gibt $p \in I$ mit $f(p)\cdot(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, h\cdot f(p)$$

mit p zwischen x und $x+h$

also $p = x + \tau_{x,h}\cdot h$ mit $\tau_{x,h} \in [0,1]$

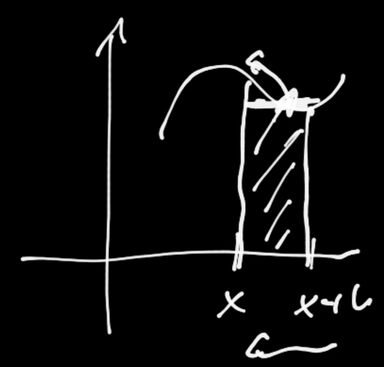
$$= \lim_{h\to 0} f(x+\tau_{x,h}\cdot h) \overset{!}{=} f(x),$$

denn: $|(x+\tau_{x,h}\cdot h) - x| = |\tau_{x,h}\cdot h| \leq |h|$

zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ sod. $|f(x+u) - f(x)| < \varepsilon$ für alle u mit $|u| < \delta$.

Also: $|f(\underbrace{x+\tau_{x,h}\cdot h}) - f(x)| < \varepsilon$ für $|h| < \delta$.

Das zeigt alles.



<u>Beweis von b)</u> :

Nach a) ist $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

Vorgelegt ist eine weitere Stammfunktion $G(x)$ von f.

Es gibt c mit $G(x) = F(x) + c$ für alle x

Folgt
$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + c) - (F(a) + c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt + \int_{a}^{x_0} f(t)\,dt \\ &= \int_{a}^{b} f(t)\,dt \end{aligned}$$

$\square$

Hausaufgabe 9A:

Vorgelegt sind stetige Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei $g(x) \geq 0$ für alle x gelten möge.

Zeige: Es gibt ein $p \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(p) \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

Für $g(x) = 1$ f. alle x erhält man hieraus den MWS-I, weshalb dieser Satz auch als verallgemeinerter Mittelwertsatz bezeichnet wird.

Hinweis: Passe den Beweis von MWS-I an.

4.5 Partielle Integration

Vorgelegt ist ein Intervall I.

$f: I \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, falls f diff'bar und f' stetig.

⚠ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist diff'bar, aber f' ist $x=0$ nicht stetig, also: f diff'bar, aber <u>nicht</u> stetig diff'bar.

Vorgelegt: $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar.

$$(f \cdot g)' = \underbrace{f'g + f \cdot g'}_{\text{stetig}}, \text{ also } f \cdot g \text{ Stammfunktion}$$

der stetigen Funktion $f' \cdot g + f \cdot g'$ bzw.

$$f \cdot g = \int (f'g + fg')\, dx = \int f'g\, dx + \int fg'\, dx$$

$$\boxed{\int f' g \, dx = f g - \int f \cdot g' \, dx}$$

partielle Integration

f, g stetig diff'bar

Eine Stammfunktion $M(x) = \int f'(x)\, g(x)\, dx$ erhält man, indem man eine Stammfunktion $Q(x) = \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$ bestimmt und dann $M(x) = f(x) \cdot g(x) - Q(x)$ setzt.

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = [M(x)]_a^b = M(b) - M(a)$$

$$= f(b) \cdot g(b) - f(a)\, g(a) + Q(a) - Q(b)$$

$$= [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \,, \quad \text{also}$$

$$\boxed{\int_a^b f' g \, dx = [f g]_a^b - \int_a^b f g' \, dx}$$

<u>Beispiel</u> $\int x \cdot \sin x \, dx = ?$

$$\int f g' \, dx = fg - \int f' g \, dx$$

Mögl. 1

$f(x) = x \rightsquigarrow f'(x) = 1$

$g(x) = -\cos x \leftsquigarrow g'(x) = \sin x$

$\downarrow$

$$\underset{f}{\int x} \cdot \underset{g'}{\sin x} \, dx = \underset{f \cdot g}{-x \cos x} - \underset{f' g}{\int 1 \cdot (-\cos x) \, dx}$$

partielle Integration

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

Mögl. 2

$f(x) = \sin x \rightsquigarrow f'(x) = \cos x$

$g(x) = \frac{1}{2} x^2 \leftsquigarrow g'(x) = x$

$$\int x \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cos x \, dx$$

Probe: $(-x \cos x + \sin x) = -\cancel{\cos x} + x \sin x + \cancel{\cos x}$ ✓

<u>Beispiel</u>: $\int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{\cos x} \, dx = \underset{f \cdot g}{x^2 \sin x} - \underset{f' g}{\int 2x \sin x \, dx}$

$f'(x) = 2x \, , \quad g(x) = \sin x$

$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$

$= x^2 \sin x - x \cos x + \sin x$

<u>Beispiel</u>: $\int \underset{f}{(x-2)} \cdot \underset{g'}{e^{3x}} \, dx$ $\qquad \int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x}$

$f'(x) = 1 \, , \quad g(x) = \int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x}$

$= \underset{f \cdot g}{\frac{1}{3}(x-2) e^{3x}} - \underset{f' \cdot g}{\int \frac{1}{3} e^{3x} \, dx} = \frac{1}{3}(x-2) e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$

<u>Beispiel</u> $\int \underset{f}{e^x} \underset{g'}{\cos x} \, dx$

$f'(x) = e^x, \quad g(x) = \sin x$

$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$

$\overset{\text{p.I.}}{=} e^x \sin x - \int \underset{u}{e^x} \underset{v'}{\sin x} \, dx \quad , \; v = -\cos x$

$\overset{\text{p.I.}}{=} e^x \sin x - \left\{ \underset{u.v.}{-e^x \cos x} + \int e^x \cos x \, dx \right\}$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx \quad \Big| + \int e^x \cos x \, dx$

Also $2 \cdot \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x \quad \Big| : 2$

$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$

<u>Beispiel</u> $\int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{g'}{\cos x}\, dx$, $g = \sin$

$$\overset{\text{p.I}}{=} \sin^2 x - \int \underset{f'}{\cos x}\, \underset{g}{\sin x}\, dx \quad \Big| + \int \cos x \sin x\, dx$$

$$\rightsquigarrow \quad 2 \cdot \int \sin x \cos x\, dx = \sin^2 x$$

bzw. $\int \sin x \cos x\, dx = \underline{\frac{1}{2} \sin^2 x}$

Alternativ: $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{4} \cos(2x)$

Notiz $-\frac{1}{4} \cos(2x) = -\frac{1}{4} \left(\cos^2 x - \sin^2 x \right)$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \left(1 - 2 \sin^2 x \right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2} \sin^2 x} - \frac{1}{4}$$

§4 | S. 18

<u>Beispiel</u> $\int \ln x \, dx = \int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\ln x} \, dx = \underset{g}{x} \underset{f}{\ln x} - \int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{\frac{1}{x}} \, dx$

$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x$

<u>Beispiel</u> $\int \underset{f}{x} \underset{g'}{\ln x} \, dx = \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{(x \ln x - x)} - \int (x \ln x - x) \, dx$

$= x^2 (\ln x - 1) + \underbrace{\int x \, dx}_{\frac{1}{2} x^2} - \underbrace{\int x \ln x \, dx}$

$2 \int x \ln x \, dx = x^2 \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$

bzw. $\int x \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1)$

<u>oder</u>: $\int \underset{g'}{x} \underset{f}{\ln x} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \overbrace{\underset{g}{\frac{1}{2} x^2} \cdot \underset{f'}{\frac{1}{x}}}^{\frac{1}{2} x} \, dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1)$ ✓

4.6 Substitution

Vorgelegt: I, J Intervalle

$g: I \to J$ stetig differenzierbar

$f: J \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F.

Kettenregel: $F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$

Also: $F(g(x))$ ist Stammfkt. von $f(g(x)) \cdot g'(x)$

bzw.

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x))}$$

Beispiel $\int \underbrace{\cos}_{f}(\underbrace{\sin x}_{g(x)}) \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)}\, dx = \underset{F}{\sin}(\underset{g}{\sin x})$

↳ Stammfkt. $F(x) = \sin x$

Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

<u>Beispiel</u>: $\int \cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{g(t)})\, dt \qquad (\omega \neq 0)$

$\dot{g}(t) = \omega$

$$= \frac{1}{\omega} \int \underset{f}{\cos}(\underbrace{\omega t + \varphi}_{g}) \cdot \underbrace{\omega}_{\dot{g}}\, dt = \frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

↳ Stammfkt: sin

<u>Beispiel</u> $(a \neq 0)$ $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \int e^{ax+b} \cdot a\, dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b}$

$f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$, $g(x) = ax+b$, $g'(x) = a$

<u>Beispiel</u> $(a \neq 0)$ $\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{ax+b} \cdot a\, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$

$f(x) = \frac{1}{x}$

<u>Notiz</u>: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$

$x > 0$: ✓

$x < 0$: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))'$

$= \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ ✓

Allgemein: $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|$

$\int g'(x)\, e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)}$ usw.

<u>Beispiele</u>: • $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|$

• $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\cdot\int (\sqrt{x})'\cdot e^{\sqrt{x}}\,dx$

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}\cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 2\cdot e^{\sqrt{x}}$

Variante der Substitutionsregel:

Zusatzvoraussetzung: $g : I \to \mathcal{J}$ invertierbar

Zu berechnen ist $\int f(x)\,dx$

Berechne $H(t) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$

Beh.: Dann gilt $\int f(x)\,dx = H(g^{-1}(x))$

Denn: $H(g^{-1}(x))' = H'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1}(x))'$

$$= f(\underbrace{g(g^{-1}(x))}_{=x}) \cdot g'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1}(x))'$$

$$= f(x) \cdot \underbrace{\big(\underbrace{g(g^{-1}(x))}_{=x}\big)'}_{=1} = f(x).$$

Schreibweise : $y = g(x) \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = g'(x)$

<u>Merkregel</u>

Ziel: Berechne $\int f(x)\,dx$

Wähle eine <u>invertierbare</u> Funktion g

"Substituiere" $x = g(t)$

$\frac{dx}{dt} = g'(t)$ bzw. $dx = g'(t) \cdot dt$

und berechne $H(t) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$

Löse anschließend $x = g(t)$ zu $t = g^{-1}(x)$ auf

und substituiere zurück

$$\boxed{\int f(x)\,dx = H(g^{-1}(x))}$$

§4 / S.24

$$\int f(x)\,dx = H(g^{-1}(x)) \qquad \text{mit } H(t) = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Also: $$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[H(g^{-1}(x))\Big]_a^b = \Big[H(t)\Big]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)}$$

$$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

<u>Beispiel</u>: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Substituiere $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$, $t = \arcsin x$

$$\int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \underset{u}{\cos t}\cdot\underset{v'}{\cos t}\,dt$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \cos t\sin t + \int \sin^2 t\,dt = \cos t\sin t + \int(1-\cos^2 t)\,dt = t + \cos t\sin t - \int \cos^2 t\,dt,$$

also $\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\cdot(t + \cos t\sin t)$

<u>Beispiel</u> (Forts.) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Substitution $x = \sin t$, $t = \arcsin x$, $dx = \cos t\,dt$

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \cos t \cdot \sin t\right)$$

Rücksubst.: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \underbrace{\cos(\arcsin x)}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}\right)$

Also $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$

<u>Beispiel</u> $\int e^{\sqrt{1+x}}\,dx = ?$

Ansatz: $t = \sqrt{1+x}$ bzw. $\left.\begin{array}{l} x = t^2 - 1 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right\}$ Substitution

$$\int e^t\,2t\,dt = 2\int \underset{u}{t}\,\underset{v'}{e^t}\,dt = 2\left(t e^t - \int e^t\,dt\right) = 2(t-1)e^t$$

Rücksubst.: $2 \cdot \left(\sqrt{1+x} - 1\right) \cdot e^{\sqrt{1+x}}$

Hausaufgabe OGB:

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $\int x^2 \cos x \, dx$

(b) $\int \frac{\cos x}{4 + \sin x} \, dx$

(c) $\int \cos \sqrt{1-x} \, dx$

4.7 Polynome

Ein Term der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = p(x)$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt Polynom.

Für $a_n \neq 0$ heißt n der Grad des Polynoms, geschrieben: $n = \operatorname{grad} g(x)$.

Beispiel $p(x) = 3x^4 - e^2 \cdot x^2 + \sqrt{2}\, x + 42$ ist ein Polynom vom Grad $4 = \operatorname{grad} p(x)$

Notiz: $p(x) = 0$ hat den Grad $-\infty$

$p(x) = a_0$ $(\neq 0)$: konstante Polynom, Grad 0

$p(x) = a_1 x + a_0$ $(a_1 \neq 0)$: lineares Polynom, Grad 1

Notiz: $\operatorname{grad}(p(x) \cdot q(x)) = \operatorname{grad} p(x) + \operatorname{grad} q(x)$

4.8 Division mit Rest

Zu Polynomen $p(x)$, $q(x) \neq 0$ gibt es Polynome $a(x)$ und $r(x)$ mit $p(x) = a(x) \cdot q(x) + r(x)$

und $\operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} q(x)$

Beispiel: $p(x) = 2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3$

$q(x) = 2x^2 + 1$

$$
\begin{array}{l}
(2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3) : (2x^2 + 1) = x^3 - x + 3 \\
\underline{-(2x^5 + x^3)} \leftarrow (2x^2+1) \cdot x^5 \\
\qquad 2x^3 + 6x^2 + x + 3 \\
\qquad \underline{-(2x^3 + x)} \\
\qquad\qquad 6x^2 + 3 \\
\qquad\qquad \underline{-(6x^2 + 3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also:

$$2x^5 + 3x^3 + 6x^2 + x + 3 = (x^3 + x + 3)(2x^2 + 1) \; (+\,0)$$

<u>Beispiel</u>: $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = p(x)$; $x - 1 = q(x)$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + 4x + 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad 4x^2 - 2x + 1 \\
\quad \underline{-(4x^2 - 4x)} \\
\qquad 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(2x - 2)} \\
\qquad\quad \underline{3} = r(x) \qquad (\text{Grad} < \text{Grad}(x-1))
\end{array}
$$

Also: $\underbrace{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}_{p(1)} = \underbrace{(x-1)}_{0} \cdot \underbrace{(x^2 + 4x + 2)}_{k} + \underline{3}$

1 einsetzen $\quad p(1) = 0 \cdot k + \underline{3} = 3$

<u>Beobachtung</u> $u, v \neq 0$ reelle Zahlen, $p(x)$ Polynom

$$p(x) = a(x) \cdot \underbrace{(vx - u)}_{q(x)} + r$$

$\uparrow$ konstantes Polynom

$v \cdot \frac{u}{v} - u = 0$ liefert $\boxed{p\left(\frac{u}{v}\right) = r}$

Also: $\frac{u}{v}$ ist genau dann eine Nullstelle von $p(x)$ (also $p\left(\frac{u}{v}\right) = r$), wenn $r = 0$, d.h. wenn $p(x)$ glatt durch $vx - u$ teilbar ist.

<u>Beispiel</u> $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10$

$q(x) = x^2 + 2$

$$(x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10) : (x^2 + 2) = x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$\begin{array}{l}
-(x^5 \qquad\qquad + 2x^3) \\
\hline
\quad 2x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 10 \\
\quad -(2x^4 \qquad\quad + 4x^2) \\
\hline
\qquad\quad -x^3 + x^2 + x + 10 \\
\qquad -(-x^3 \qquad\quad - 2x) \\
\hline
\qquad\qquad x^2 + 3x + 10 \\
\qquad\qquad -(x^2 \qquad\quad + 2) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 3x + 8
\end{array}$$

$$x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 10$$
$$= (x^3 + 2x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + 2) + (3x + 8)$$

4.9 Das Horner-Schema

Zerlege $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$= (x - x_0) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) + r$$

$$= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - b_{n-1} x_0) \cdot x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2} x_0) x^{n-2}$$

$$+ \dots + (b_0 - b_1 x_0) \cdot x + (r - b_0 x_0)$$

Koeffizientenvergleich: $b_{n-1} = a_n$

$a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1} \cdot x_0$ bzw. $b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 \cdot b_{n-1}$

$\dots$ $b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 b_{n-2}$

$\vdots$

$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1$

$r = a_0 + x_0 \cdot b_0$

4.9 Das Horner-Schema (Forts.)

Zerlege $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 \cdot b_{n-1}$$

$$b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 \, b_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1$$

$$r = a_0 + x_0 \cdot b_0$$

HORNER - Schema

	a_n	a_{n-1}	$\dots\dots$	a_2	a_1	a_0
		$+$			$+$	$+$
x_0		$x_0 \cdot b_{n-1}$			$x_0 b_1$	$x_0 \cdot b_0$
	a_n	b_{n-2}		b_1	b_0	r
	$= b_{n-1}$					$= p(x_0)$

Bsp: $p(x) = x^4 + 3x + 1$

$x_0 = 5$

	1	0	0	3	1
5		$1 \cdot 5$	25	125	640
	1	5	25	128	641

Also: $5^4 + 3 \cdot 5 + 1 = 641$

bzw. $x^4 + 3x + 1$

$= (x-5) \cdot (x^3 + 5x^2 + 25x + 128) + 641$

<u>Übung</u>: a) Berechne den Wert von $p(x) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 19x - 13$ für $x = 5$.

b) Bestimme Zahlen $a_0, \dots, a_4$ mit

$$q(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 27x + 13 = \underbrace{a_4(x+2)^4 + \dots + a_1(x+2) + a_0}_{\text{"Polynom in } x+2\text{"}}.$$

a)

	1	-3	-13	19	-13
5		5	10	-15	20
	1	2	-3	4	7

$p(5) = 7$

b)

	1	8	21	27	13
-2		-2	-12	-18	-18
	1	6	9	9	-5
-2		-2	-8	-2	
	1	4	1	7	
-2		-2	-4		
	1	2	-3		

$$q(x) = (\underbrace{x^3 + 6x^2 + 9x + 9}_{})(x+2) - 5$$

$$= (x^2 + 4x + 1) \cdot (x+2) + 7$$

$$= (x^2 + 4x + 1) \cdot (x+2)^2 + 7 \cdot (x+2) - 5$$

$$= (x+2) \cdot (x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 7 \cdot (x+2) - 5$$

$$q(x) = (x+2)^4 - 3 \cdot (x+2)^2 + 7 \cdot (x+2) - 5$$

<u>Exkurs</u>:

$p(x)$ Polynom

n_1 heißt Nullstelle von $p(x)$, falls $p(n_1) = 0$,

d.h. $p(x) = q(x) \cdot (x - n_1)$ mit passendem Polynom $q(x)$

<u>Bsp</u> $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & 4 & -3 \\
1 & & 1 & -1 & 3 \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$\leftarrow$ $x = 1$ ist Nullstelle

$$p(x) = (x^2 - x + 3) \cdot (x - 1)$$

Jedes reelle Polynom lässt sich schreiben als

$$p(x) = r(x) \cdot (x - n_1) \cdot (x - n_2) \cdot \ldots \cdot (x - n_k)$$

wobei $r(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt.

$$= q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_s(x) \cdot (x - n_1) \cdot \ldots \cdot (x - n_k)$$

wobei $q_j(x)$ quadratisches Polynom ohne reelle Nullstellen

$p(x) = q(x) \cdot (x-u)^k$ mit $q(u) \neq 0$.

Dann heißt u eine k-fache Nullstelle von $p(x)$.
↑ "u hat Vielfachheit k"

$$p'(x) = q'(x) \cdot (x-u)^k + k\, q(x) \cdot (x-u)^{k-1}$$

$$= \Big[\underbrace{q'(x) \cdot (x-u) + k\, q(x)}_{x=u:\ q'(u) \cdot 0 + k \cdot \underbrace{q(u)}_{\neq 0} \neq 0} \Big] \cdot (x-u)^{k-1}$$

Beobachtung: $x = u$ ist k-fache Nullstelle ($k \geq 1$) von $p(x)$

$\rightsquigarrow$ $x = u$ ist $(k-1)$-fache Nullstelle von $p'(x)$,

d.h. $(x-u)^{k-1}$ teilt $p(x)$, $p'(x)$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{p(x)}{ggT(p(x), p'(x))}$ hat dieselben Nullstellen wie $p(x)$, aber deren Vielfachheit ist 1.

Nullstellensuche für ein Polynom $p(x)$ (mit Grad ≥ 2)

- Grad 2 $\rightsquigarrow$ "p-q-Formel", "a-b-c-Formel"
- Grad 3 $\rightsquigarrow$ Näherungslösungen per numerische Verfahren oder exakte Lösungen durch <u>Raten</u>

Spezialfall: $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0)$,
alle $a_0, a_1, \dots, a_n$ ganze Zahlen

Dann gilt: Ist $\frac{u}{v}$ eine <u>rationale</u> Nullstelle von $p(x)$,
so ist u ein Teiler von a_0
und v ein Teiler von a_n

Denn: $p(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) \cdot (vx - u)$,
also $\underline{-u b_0 = a_0}$, $b_0 v - u b_1 = a_1$, ..., $\underline{v b_{n-1} = a_n}$;
dabei: alle $b_0, \dots, b_{n-1}$ sind ganze Zahlen
Erhalte: u teilt a_0, v teilt a_1.

<u>Beispiel</u>: Finde alle Nullstellen von

$$p(x) = \underline{2}x^5 + 3x^4 - 22x^3 + 30x^2 - 16x + \underline{3}$$

Teiler von 3 sind $\pm 1, \pm 3$
pos. Teiler von 2 sind $1, 2$
} mögl. rationale NSt. $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

	2	3	−22	30	−16	3
1		2	5	−17	13	−3
	2	5	−17	13	−3	0
1		2	7	−10	3	
	2	7	−10	3	0	
3		6	39	87		
	~~2~~	~~13~~	~~29~~	~~90~~		
	2	7	−10	3		
1/2		1	4	−3		
	2	8	−6	0		

$$p(x) = (2x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 13x - 3)\cdot(x-1)$$

$$p(x) = (2x^3 + 7x^2 - 10x + 3)\cdot(x-1)^2$$

$x = 3$ keine NS.

$$\rightsquigarrow \quad p(x) = (2x^2 + 8x - 6)\cdot\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\cdot(x-1)^2$$
$$= (x^2 + 4x - 3)\cdot(2x-1)\cdot(x-1)^2$$

$x^2 + 4x - 3 = 0$ für $x = -2 \pm \sqrt{7}$: NSt. 1 (doppelt), $\frac{1}{2}$, $-2 \pm \sqrt{7}$

<u>Übung</u>: Bestimme alle Nullstellen von

$$p(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8$$

Mögl. rationale Nullstellen $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -3 & 10 & 8 \\
4 & & 4 & 0 & -12 & -8 \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & -2 & \underline{\underline{0}} \\
2 & & 2 & 4 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & \underline{\underline{0}} &
\end{array}$$

$(x^2 + 2x + 1)$

$$p(x) = (x-4)\cdot(x-2)\cdot(x+1)^2$$

4.10 Partialbruchzerlegung:

Vorgelegt ist eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$,

wobei $p(x), q(x) \neq 0$ Polynome sind.

Voraussetzung: $\operatorname{grad} p(x) < \operatorname{grad} q(x)$

und $q(x) = c \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$,

wobei $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind.

Dann gibt es Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{c \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{a_n}{x - x_n}$$

mit $$a_k = \frac{p(x_k)}{c \cdot (x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)}$$

Speziell: $\int f(x)\,dx = a_1 \ln|x - x_1| + \ldots + a_n \cdot \ln|x - x_n|$

$$= \ln\left(|x - x_1|^{a_1} \cdot \ldots \cdot |x - x_n|^{a_n}\right)$$

§4 / S. 41

Beispiel $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)}$ ⚠ Zählergrad < Nennergrad

$$(x-1)\cdot(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{l} (x^3 + x + 1) : (x^2 - 3x + 2) = x + 3 \\ -(x^3 - 3x^2 + 2x) \\ \hline \quad 3x^2 - x + 1 \\ \quad -(3x^2 - 9x + 6) \\ \hline \qquad\quad 8x - 5 \end{array}$$

Also: $f(x) = x + 3 + \dfrac{8x-5}{(x-1)(x-2)}$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{8x-5}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-3}{x-1} + \dfrac{11}{x-2}$

$$\frac{8x-5}{x-2} = a_1 + a_2 \frac{x-1}{x-2} \quad \overset{x=1}{\curvearrowright} \quad a_1 = \frac{3}{-1} = -3$$

Folgt: $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int (x+3)\,dx + \int \frac{-3}{x-1}\,dx + \int \frac{11}{x-2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x - 3\cdot \ln|x-1| + 11 \ln|x-2| \quad (+c)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \ln \frac{|x-2|^{11}}{|x-1|^3}$$

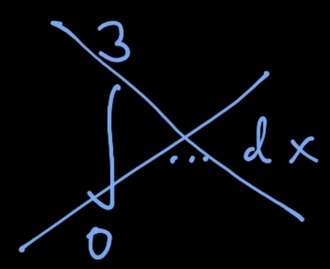
§8 | S.42

Übung: Bestimme $\int \frac{x+2}{(x-1)\cdot(x+1)\,(x-2)}\,dx$!

Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx = \int \frac{3/-2}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/6}{x+1}\,dx + \int \frac{4/3}{x-2}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot \ln|x-1| - \frac{1}{6}\cdot \ln|x+1| + \frac{4}{3}\cdot \ln|x-2|$$



zwischen 0 und 3 liegt die Nullstelle 1 des Nenners !

4.11 Eine Standardsubstitution

Vorgelegt ist eine rationale Funktion $f(x)$

Gesucht ist $\int f(e^x)\,dx$.

Substitution $t = e^x$

$x = \ln t \qquad dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{\int \frac{f(t)}{t}\,dt}_{\text{rationale Funktion}} = F(t) \quad \text{per Partialbruchzerlegung}$$

Rücksubstitution: $\int f(e^x)\,dx = F(e^x)$

<u>Beispiel</u>: $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}-1}\,dx$

Substitution: $t = e^x$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$

$e^{3x} = (e^x)^3 = t^3$
$e^{2x} = t^2$

$$\rightsquigarrow \int \frac{t^3+2}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$(t^3+2) : (t^3-t) = 1$$
$$\underline{-(t^3-t)}$$
$$t+2$$

$$= \int 1\,dt + \int \frac{t+2}{t^2-1}\,dt$$

$$t^2-1 = (t-1)(t+1)$$

$$= t + \int\left(\frac{3/2}{t-1} + \frac{-1/2}{t+1}\right)dt$$

$$= t + \frac{3}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1|$$

Rücksubst.: $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}-1}\,dx = e^x + \frac{3}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\ln|e^x+1|$

4.12 Noch eine Standardsubstitution

$R(u,v)$ rationale Funktion in zwei Veränderlichen,

z.B. $R(u,v) = \dfrac{u^4 + 3u^3 - 2u^2v^2 + 3u^2v - 8v^3 + 7}{7uv^2 + 9uv - 16v^{42}}$

Gesucht: $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

z.B. $R(u,v) = \dfrac{u^2 + 3uv - v^2}{u+v}$, $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x + 3\cos x \sin x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}\,dx$

Substitution: $t = \tan\frac{x}{2}$ bzw. $x = 2\arctan t$

Erinnerung: $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Also: $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$$= \cos^2\frac{x}{2} \cdot \left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right)$$

§4 / S. 46

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} \cdot \left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right)$$

$$1 + \tan^2\frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

Folgt $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$; einsetzen :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \tan\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Fazit: Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$; $x = 2\arctan t$.

$\rightsquigarrow$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$;

$$dx = \frac{2}{1+t^2}$$

<u>Beispiel</u> $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Subst. $t = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\rightsquigarrow \int \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|$$

Rücksubst:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

<u>Übung</u>: Berechne $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x \frac{2t}{1+t^2}$,

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{2t+1-t^2}\,dt$$

$$= -2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} = -2 \cdot \int \frac{dt}{(t-(1+\sqrt{2}))\cdot(t-(1-\sqrt{2}))}$$

$$= -2 \int \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t-(1+\sqrt{2})} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t-(1-\sqrt{2})} \right) dt = \frac{1}{2}\sqrt{2}\Big(\ln|t-(1-\sqrt{2})| - \ln|t-(1+\sqrt{2})| \Big)$$

Rücksubst. $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\Big(\ln\left|\tan\frac{x}{2} - (1-\sqrt{2})\right| - \ln\left|\tan\frac{x}{2} - (1+\sqrt{2})\right| \Big)$$

4.13 Logarithmus und Exponentialfunktion

Für $x > 0$ setze

$$\ln x = \int_1^x \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{stetig} \rightsquigarrow \text{ Integral existiert}} \, dt$$

Hauptsatz: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und $\ln 1 = 0$

Notiz: $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f(1) = 0$.
Dann gilt $f(x) = \ln x$ für alle x.

Rechenregel: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

Denn: $(\ln(x \cdot y))' = \frac{y}{x \cdot y} = \frac{1}{x}$

Folgt: $\ln(x \cdot y) = \ln x + c(y)$

Dabei $\ln(1 \cdot y) = \ln 1 + c(y) \rightsquigarrow c(y) = \ln y$

bzw. $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$, wie gewünscht.

Hieraus erhalte:

$$\ln x^2 = 2 \ln x$$
$$\ln x^3 = 3 \ln x$$
$$\vdots$$
$$\boxed{\ln x^n = n \cdot \ln x \quad \text{für natürliche Zahlen } n}$$

$$0 = \ln 1 = \ln\left(x^n \cdot \frac{1}{x^n}\right) = \ln x^n + \ln \frac{1}{x^n} = n \cdot \ln x + \ln x^{-n}$$

liefert: $\ln x^{-n} = -n \cdot \ln x$; erhalte

$$\boxed{\ln x^n = n \cdot \ln x \quad \text{für ganze Zahlen } n}$$

Jetzt betrachte die Funktion $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Wegen $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ ist $\ln$ streng monoton wachsend.

$\ln 2 > \ln 1 = 0 \rightsquigarrow \ln 2^n = n \cdot \ln 2$ $n \in \mathbb{N}$ nimmt beliebig große Werte an; $\ln \left(\frac{1}{2}\right)^n = -n \cdot \ln 2$ nimmt beliebig kleine Werte an.

Fazit: $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und $\{ \ln x \mid 0 < x < \infty \} = \mathbb{R}$ (ZWS!) sowie $\ln$ differenzierbar.

Es gibt daher eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$ Exponentialfunktion

von $\ln$. Diese ist streng monoton wachsend.

Aus $x = \ln \exp x$ folgt
$$1 = (\ln \exp x)' = \ln'(\exp x) \cdot \exp' x = \frac{\exp' x}{\exp x}$$

btw. $\boxed{\exp' = \exp}$ und $\boxed{\exp(0) = 1}$

wg. $\ln 1 = 0$.

Setze $e = \exp(1)$ Eulersche Zahl

und $a^b = \exp(b \cdot \ln a)$ für $a > 0$.

Beh: $e^b = \exp(b)$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \exp(b \cdot \underbrace{\ln e}_{=1}) = \exp(b) \checkmark$$

wg. $e = \exp(1)$

Rechenregeln für Potenzen lassen sich für bel. Exponenten nachweisen !

z.B. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$$\exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(y \cdot \ln a) = \exp(x \cdot \ln a + y \cdot \ln a)$$
$$= \exp((x+y) \cdot \ln a) = a^{x+y}$$

und $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

und $a^2 = a \cdot a$ und vieles mehr ...

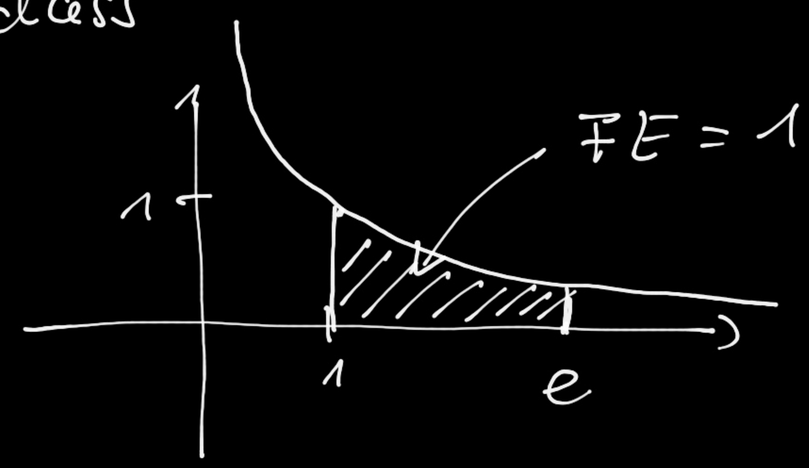
<u>Bemerkung</u>: $e = ?$

$$e = \exp(1)$$

also $1 = \ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt$

bestimme $x = e$ so, dass

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$$



4.14 Die Winkelfunktionen im Schnelldurchlauf

Für $x \in \mathbb{R}$ setze $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \arctan 0 = 0$$

arctan ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

ZWS: $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ umkehrbar.

Es gilt: $\arctan(-x) = \arctan x$

$$\arctan(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}\,dt \overset{\text{Subst. } s=-t}{=} \int_0^x \frac{1}{1+(-s)^2} \cdot (-1) \cdot ds$$

$$= -\arctan x \quad \checkmark$$

Also: $a = -b$, reicht, b zu bestimmen.

$$\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Folgt: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ ist konstant auf $(0,\infty)$

Setze $\pi \overset{\text{Def.}}{=} 4\cdot\arctan 1 = 4\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

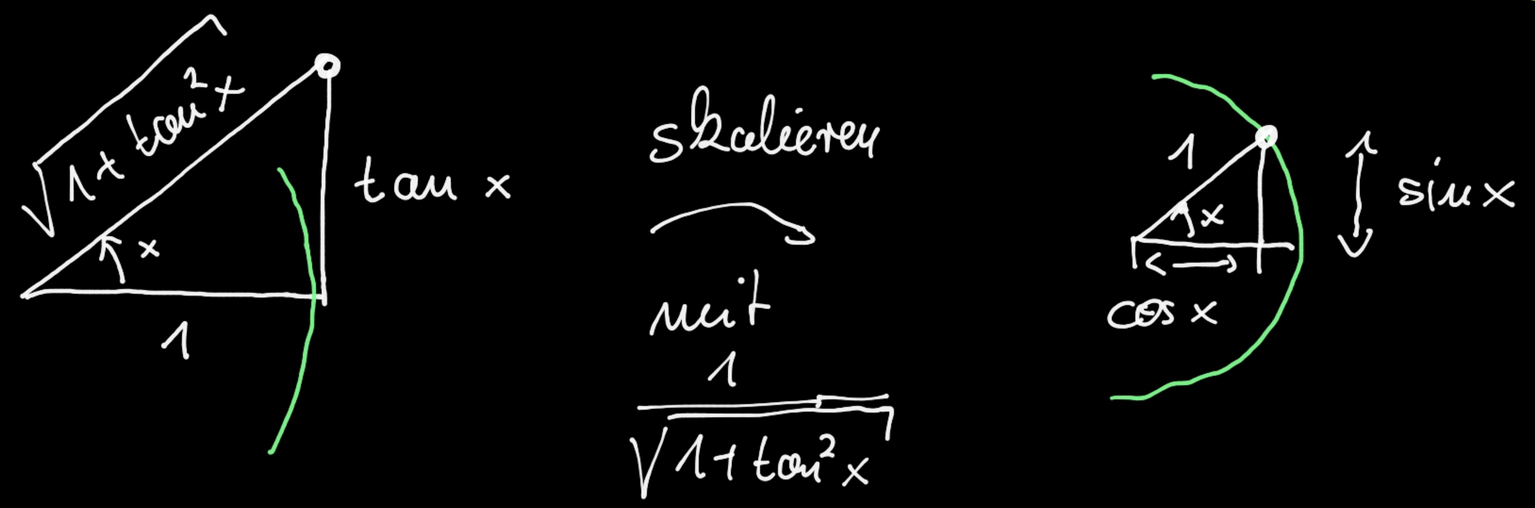
$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \lim_{x\to\infty} \arctan x + \lim_{x\to\infty} \arctan\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Also: $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ besitzt eine

Umkehrfunktion $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.



<u>Def</u> Für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ setze

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

Dann: $\cos, \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ sind diff'bar,

$\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Setze per $\cos(x+\pi) = -\cos x$

und $\sin(x+\pi) = -\sin x$ fort.

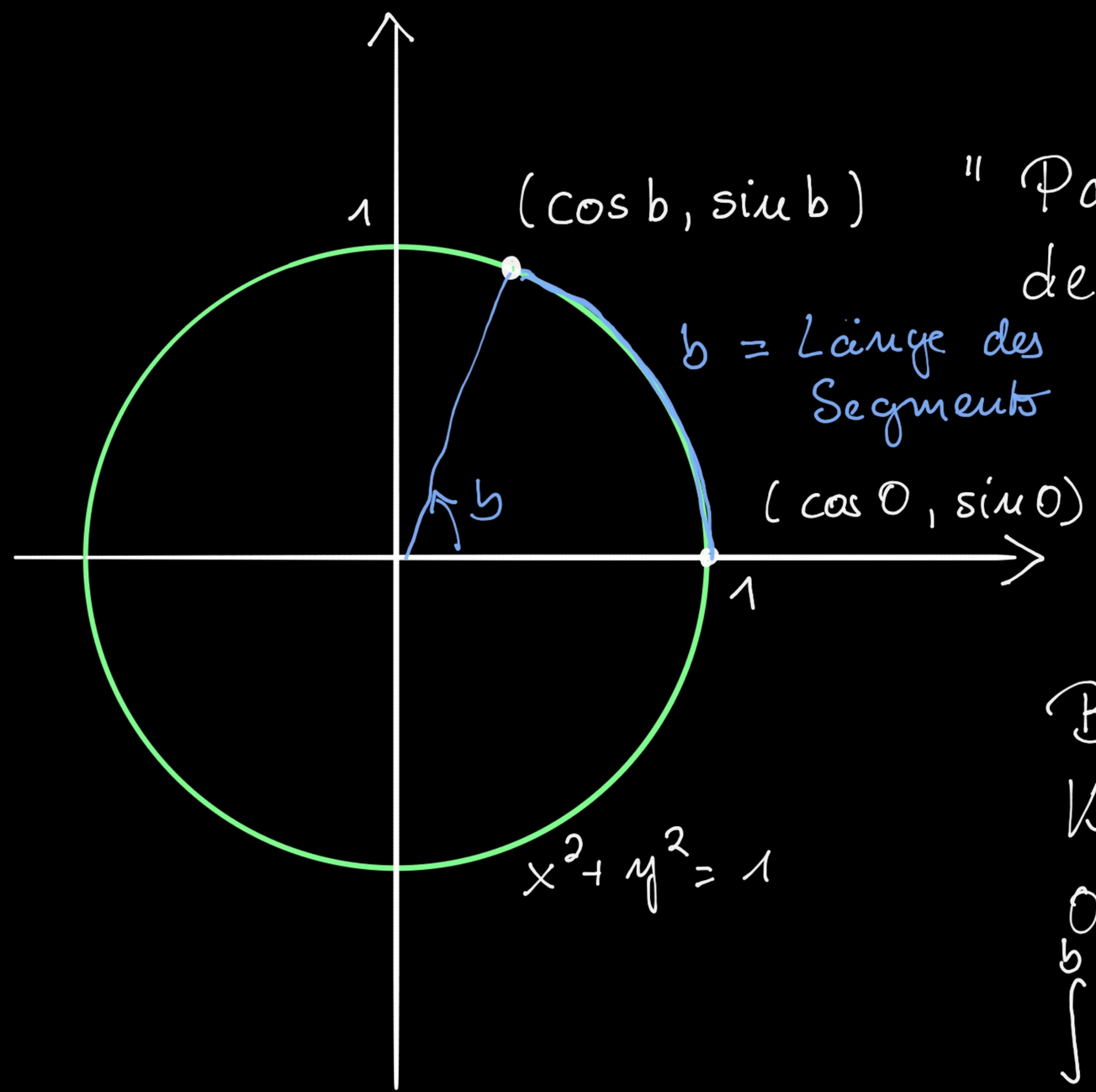
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x \text{ "}= \frac{1}{\sqrt{1+\infty^2}}\text{ "} = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \qquad (\text{wg. } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ \& \ \ldots)$$

<u>Lemma</u>: I Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $p \in I$
mit: f ist stetig diff'bar auf $I \setminus \{p\}$.
Ist f' in p stetig ergänzbar $\left(\lim_{x \to p} f'(x) = u \right)$,
so ist f in u diff'bar und $f'(p) = u$.

Hieraus erhalte: $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
sind differenzierbar.



"Parametrisierung" des Einheitskreises.

Bogenlänge der Kurve $(x(t), y(t))$, $0 \le t \le b$, ist

$$\int_0^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Hier: $$\int_0^b \sqrt{((\cos t)')^2 + ((\sin t)')^2}\, dt = \int_0^b 1\, dt = b$$

4.15 Uneigentliche Integrale

Vorgelegt: $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

f sei stetig, also speziell:

$\int_a^u f(x)\,dx$ existiert für jedes $a \leq u < b$

Dann setze $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to b-} \int_a^u f(x)\,dx$,

falls dieser Grenzwert existiert.

Bsp: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u =$

$\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1} x^{-1} = -\frac{1}{x}$

$= \lim_{u \to \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1\right) = 1.$

§4 | S. 60

Genauso $\int_a^b f(x)\,dx$ für auf $(a, b]$ erklärte Funktionen

$\int_a^b f(x)\,dx$ für auf (a, b) erklärte Funktionen

Etwas anders: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \in (a, b)$

f ist auf $[a, p)$ und auf $(p, b]$ definiert.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{u \to p-} \int_a^u f(x)\,dx + \lim_{u \to p+} \int_u^b f(x)\,dx$$

oder "Cauchy-Hauptwert"

$$\text{CHW-}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0+} \left(\int_a^{p-h} f(x)\,dx + \int_{p+h}^b f(x)\,dx \right)$$

also $h > 0$

§4 S.61

Beispiel $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{u\to 0-} \int_{-1}^{u} \frac{1}{x^3}\,dx + \lim_{v\to 0+} \int_{v}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$

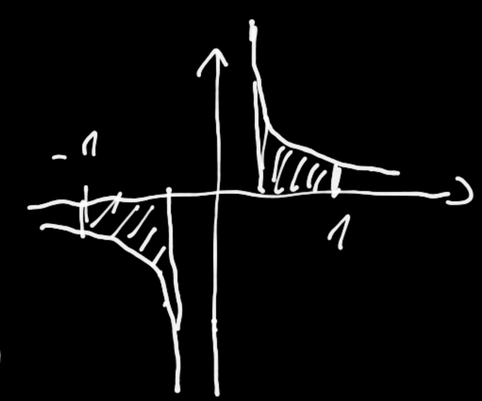
$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$= \lim_{u\to 0-} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{u} + \lim_{v\to 0+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{v}^{1}$$ existiert <u>nicht</u> !

Dagegen CHW $\displaystyle -\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{h\to 0+} \left(\int_{-1}^{-h} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{h}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx \right)$

$$= \lim_{h\to 0+} \left(\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-h} + \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{h}^{1} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0+} \left(-\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2h^2} \right) = 0$$



Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad \text{für } x > 0$$

Gamma

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{u\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty}\left(1 - e^{-u}\right) = 1$
- $x > 1$: $\Gamma(x) = \lim_{u\to\infty} F(u)$ mit $F(u) = \int_0^u \underbrace{e^{-t} t^{x-1}}_{>0}\,dt$

  ist auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend,

  d.h. $\lim_{u\to\infty} F(u)$ existiert genau dann, wenn $F(u)$ beschränkt

Es gilt:

Satz $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$ für jedes Polynom $p(x)$.

<u>Beispiel</u> : Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \text{für } x > 0$$

$$F(u) = \int_0^u e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t} t^{x-1} \cdot t^2 = 0 \,, \quad \text{d.h.}$$

Es gibt N mit $e^{-t} t^{x-1} \cdot t^2 \leq 1$ für $t \geq N$

bzw. $e^{-t} t^{x-1} \leq t^{-2}$ für $t \geq N$

$$F(u) = \int_0^N e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_N^u e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$$\leq \int_0^N e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_N^u t^{-2}\, dt \leq \int_0^N e^{-t} t^{x-1}\, dt + \underbrace{\int_1^\infty t^{-2}\, dt}_{= 1 \text{ gibt es!}}$$

ist beschränkt ✓

<u>Beispiel</u> : Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad \text{für } x > 0$$

Für $0 < x < 1$ geht der Konvergenzbeweis ähnlich,

beachte : $\Gamma(x) = \lim\limits_{h \to 0+} \int_h^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt + \lim\limits_{u \to \infty} \int_1^u e^{-t} t^{x-1}\, dt$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-t}}_{u'(t)} \underbrace{t^x}_{v(t)}\, dt = \left[-e^{-t} t^x\right]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$(x \geq 1)$

$u(t) = -e^{-t}$, $v'(t) = x \cdot t^{x-1}$

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Speziell. $x = n$ natürliche Zahl

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) =$$

$$= \ldots\ldots = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underbrace{\Gamma(1)}_{=1} = n!$$

Für die Übung brauchen wir noch

4.16 Vergleichskriterium

(a) Ist $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und gibt es α, k mit $1 < \alpha$ und $|f(x)| \leq K / x^\alpha$ für alle (großen) x, so konvergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

(b) Ist $f : (0, b] \to \mathbb{R}$ stetig und gibt es α, k mit $0 < \alpha < 1$ und $|f(x)| \leq K / x^\alpha$ für alle $x \in (0, b]$, so konvergiert $\int_0^b f(x)\,dx$.

Notiz $\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int x^{-\alpha}\,dx \overset{\alpha \neq 1}{=} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$

$1 < \alpha \rightsquigarrow 1 - \alpha < 0 \rightsquigarrow \lim_{x \to \infty} x^{1-\alpha} = 0 \rightsquigarrow \int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergiert (>0)

Spezialfall: $0 \leq f(x) \leq K / x^\alpha$ mit $1 < \alpha$ gilt für alle x

$F(u) = \int_a^u f(t)\,dt \leq \int_a^\infty \frac{K}{x^\alpha}\,dx \in \mathbb{R}$; $F(u)$ mon. wachsend und beschränkt, also gibt es $\lim_{u \to \infty} F(u) = \int_a^\infty f(x)\,dx$

Übung

Stelle jeweils fest, ob das uneigentliche Integral existiert, und berechne ggf. dessen Wert.

① $$\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_0^u x\cdot e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^u$$
$$= \circledast$$

Stammfunktion von $x\cdot e^{-x}$

Ansatz: $$\left[(ax+b)\cdot e^{-x}\right]' = (a - ax - b)e^{-x} \overset{!}{=} x\cdot e^{-x}$$

$$\circledast = \lim_{u\to\infty}\left(1 - (1+u)e^{-u}\right) = \underline{\underline{1}}$$

② $$\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \underbrace{(-x^2)'\cdot e^{-x^2}}_{=(e^{-x^2})'}\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left[e^{-x^2}\right]_0^u$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left(e^{-u^2} - 1\right) = \frac{1}{2} \;//$$

§4 / S.67

③ $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx$

$$\int 2x\cdot(x^2-1)^{\overset{=-1-1}{-2}}\,dx = -\int -(x^2-1)'\cdot(x^2-1)^{-1-1}\,dx$$

$$= -\int\left((x^2-1)^{-1}\right)'dx = -\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$$

⚠ $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx \neq \left[\frac{1}{1-x^2}\right]_0^2$ ⚠

denn $\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ hat Singularität $x=-1$ im Integrationsintervall $[0,2]$.

$$\text{CHW}\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx = \lim_{h\to 0+}\left(\int_0^{1-h}\cdots + \int_{1+h}^{2}\cdots\right) = \lim_{h\to 0+}\left(\left[\frac{1}{1-x^2}\right]_0^{1-h} + \left[\frac{1}{1-x^2}\right]_{1+h}^{2}\right)$$

$$= -1-\frac{1}{3} + \lim_{h\to 0+}\left(\frac{1}{1-(1-h)^2} - \frac{1}{1-(1+h)^2}\right)$$

③ (Forts.)

$$\text{CHW} \int_0^2 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx = -1 - \frac{1}{3} + \lim_{h\to 0+} \left(\frac{1}{\underbrace{1-(1-h)^2}_{2h-h^2}} - \frac{1}{\underbrace{1-(1+h)^2}_{-2h-h^2}} \right)$$

$$= -\frac{4}{3} + \lim_{h\to 0+} \frac{+2h+h^2-(2h-h^2)}{+(2h+h^2)\cdot(2h-h^2)}$$

$$= -\frac{4}{3} + \lim_{h\to 0+} \frac{4h}{4h^2-h^4} \quad \text{divergiert.}$$

§ 4 / S. 69

④ Konvergiert $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$?

Schmierblatt: Für große x gilt $1+x^4 \approx x^4$

also $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ div.

Konstante

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{k}{x} \quad \Leftarrow \quad x^2 \geq k\cdot\sqrt{1+x^4}$$

$$\Leftarrow \quad x^4 \geq k^2\cdot(1+x^4) = k^2 + k^2\cdot x^4$$

$$\Leftarrow \quad (1-k^2)\cdot x^4 \geq k^2$$

$$\overset{x\geq 2}{\Leftarrow} \quad (1-k^2)\cdot 2^4 \geq k^2$$

$$\Leftarrow \quad 16 \geq 17k^2$$ gilt z.B. für $k=\frac{1}{2}$

Reinschrift: $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 17 \leq 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot 2^4$

$$\leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot x^4 \text{ f. } x\geq 2$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(1+x^4) \leq x^4$ bzw. $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+x^4} \leq x^2$

und damit $\frac{1}{2x} \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$

(4) Konvergiert $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$?

Für $x \geq 2$ gilt $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{1}{2x}$

Für $x \geq 2$ gilt $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,x}$ geht schneller.

Es folgt: $\int_2^u \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} \geq \int_2^u \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}(\ln u - \ln 2) \xrightarrow{u\to\infty} \infty$

d.h. $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$ divergiert.

§4/S.71

⑤ Konvergiert $\int_8^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x+x^3}}$?

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^3+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}\,x}$$

Also: $\int_8^u \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x+x^3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \int_8^u \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\ln u - \ln 8) \longrightarrow \infty$

Liefert: Integral divergiert.

⑥ $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ konvergiert ?

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{x^3}$$

Vergleichssatz: konvergiert

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{2/x^3}{2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'}{2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx = \int \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)'dx = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

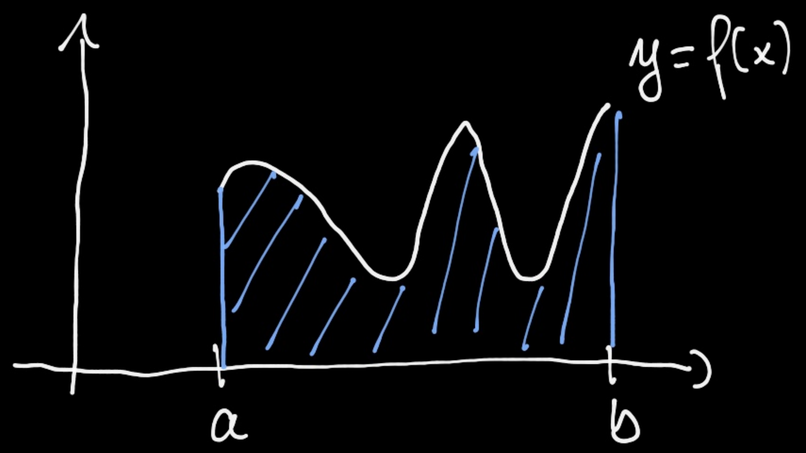
Folgt: $$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} \text{ "}= \left[\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right]_2^\infty \text{ "}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}_{=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zusatz: $$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot \ln x} = \int_1^e \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \int_1^e \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = \left[\ln \ln x\right]_1^e$$

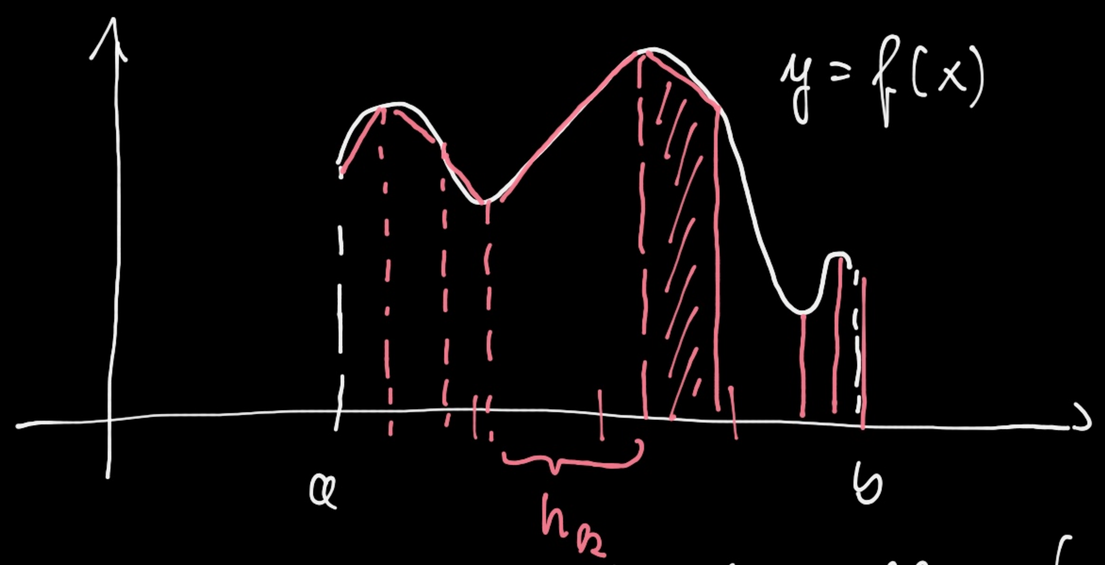
$$= 0 + \infty = \infty .$$

4.17 Numerische Integration



Ziel: Näherungsweises Bestimmen des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$.

Idee:

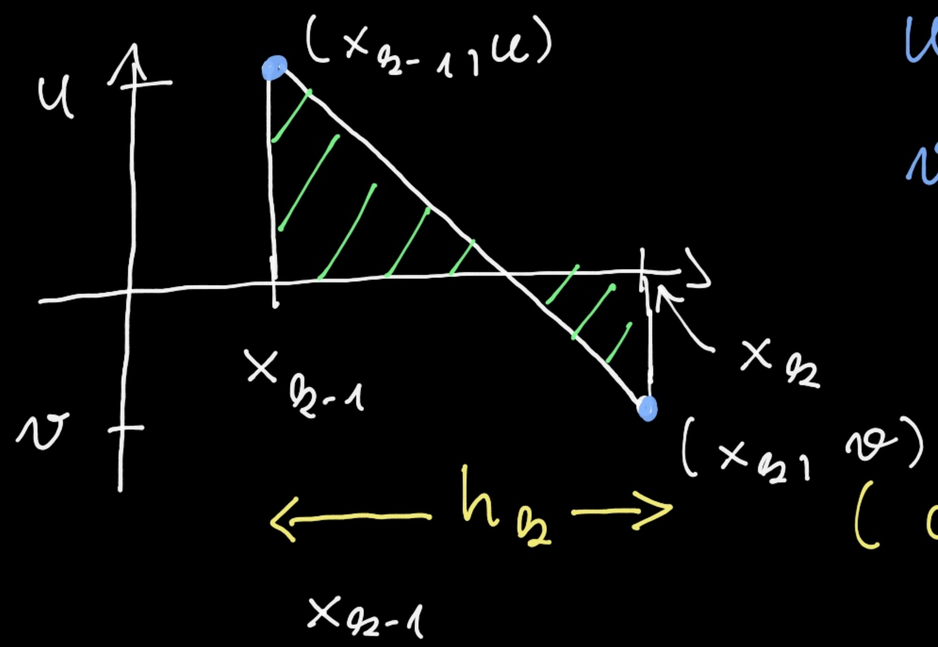


Ersetze Kurve durch einen Polygonzug und integriere diesen!

h_k = Breite des k-ten Teilintervalls (n Stück)

$h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n = b - a$

Trapezregel



hier:

$u = f(x_{k-1})$

$v = f(x_k)$

Fläche des Trapez

$$\frac{1}{2} \cdot (u+v) \cdot h_k$$

$$= \frac{1}{2}(u+v) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

(also $x_k = x_{k-1} + h_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k$)

Also: $\int_a f(x)\,dx \approx I_{k-1}$

Dann nehme $\int_a^{x_k} f(x)\,dx = \int_a^{x_{k-1}} f(x)\,dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$

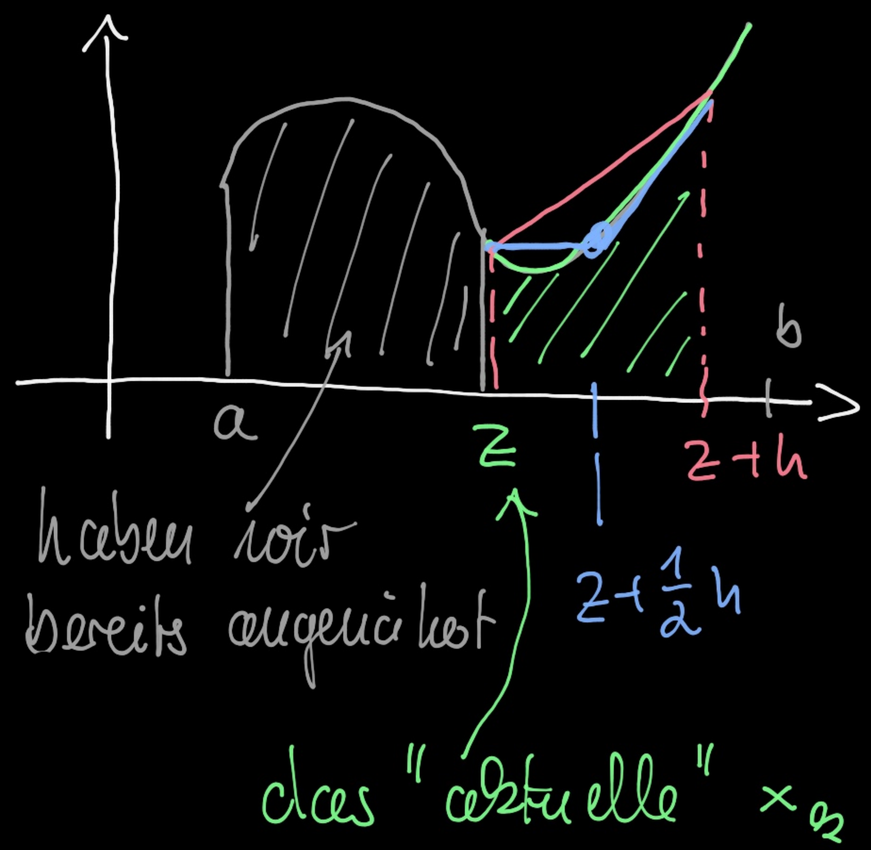
$$\approx I_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

Verbleibende Frage: $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+h_k} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} h_k \cdot \left(f(x_{k-1}) + f(x_{k-1}+h_k)\right)$

$h_k = ?$

4.18 Schrittweitensteuerung:

Idee:



h ist zunächst vorgegeben

Trapez über $[z, z+h]$

Inhalt: $I_h = \frac{1}{2} h \cdot \left(f(z) + f(z+h) \right)$

Trapeze über $[z, z+\frac{h}{2}]$ und $[z+\frac{h}{2}, z+h]$.

Inhalt

$$I_{h/2} = \frac{h}{4} \cdot \left(f(z) + f(z+\tfrac{h}{2}) \right) + \frac{h}{4} \cdot \left(f(z+\tfrac{h}{2}) + f(z+h) \right)$$

$$I_{h/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(f(z) + f(z+h) \right) + \frac{h}{2} \cdot f(z+\tfrac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{2} I_h + \frac{h}{2} \cdot f(z+\tfrac{h}{2})$$

<u>Verfahren</u> (ohne Feinheiten)

Eingabe: a, b, h (anfängliche Schrittweite), ε (Fehlerschranke), $f(x)$

Ausgabe: Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$

Schritt ($A \approx \int_a^z f(x)\,dx$ schon angenähert; aktuelle Schrittweite ist h, "Fehler" höchstens $\frac{z-a}{b-a} \cdot \varepsilon$)

Berechne $I_h = \frac{h}{2}\left(f(z) + f(z+h)\right)$

und $I_{h/2} = \frac{1}{2} I_h + \frac{h}{2} f\left(z + \frac{h}{2}\right)$

sowie $P = |I_h - I_{h/2}|$

$P \leq \frac{h\varepsilon}{b-a} \rightsquigarrow h \leftarrow 1.9 \cdot h,\ A \leftarrow A + I_{h/2},\ z \leftarrow z+h$

(Falls $z+h > b$: $h := b - z$)

$P > \frac{h\varepsilon}{b-a} \rightsquigarrow A \leftarrow A,\ z \leftarrow z,\ h \leftarrow 0.5\,h$

h zu klein: Abbruch

$\curvearrowright$ neuer Schritt

Klausurvorbereitung für §3 und §4:

§3: Berechnen von Integralen nach Def.: NEIN

① Zeige: $a(n) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

(1.) ist beschränkt

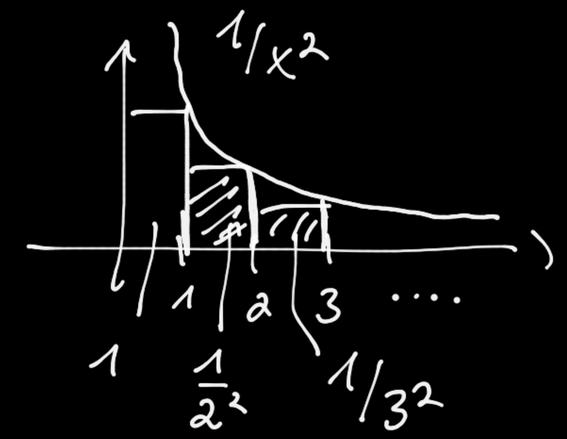
(2.) konvergiert für $n \to \infty$

$\lim_{n \to \infty} a(n) = \frac{\pi^2}{6}$

<u>Lösung</u>: (2.) folgt aus (1.), da $a(n)$ monoton wachsend

zu (1.) $1 \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{n^2} \cdot 1$

$f(x) = 1/x^2$



$$\underline{a(n)} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Untersumme von } 1/x^2 \text{ auf } [1,n]\text{; } \frac{1}{x^2} \text{ ist fallend!}}$$

$$\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 2 - \frac{1}{n} \underline{\leq 2} = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

§4 / S. 78

② Wieso existiert $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{t+e^t}{2+\sin t}\,dt$ für jedes x?

Bestimme – wenn möglich – die Ableitung $f'(x)$.

Wieso ist $x = 0$ ein lokales Minimum von f?

Gibt es weitere lokale Extrema?

Lsg $h(t) = \frac{t+e^t}{2+\sin t}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig, also gibt es eine differenzierbare Stammfunktion H, $H'(x) = h(x)$, nämlich $H(x) = \int_0^x \frac{t+e^t}{2+\sin t}\,dt$, also $f(x) = H(x^2)$

Kettenregel: $f'(x) = 2x\,H'(x) = 2x \cdot \frac{x+e^x}{2+\sin x}$

② [Forts.] $f(x) = \dots$, $f'(x) = 2x \dfrac{x+e^x}{2+\sin x}$

Wieso ist $x = 0$ ein lokales Minimum von f?

Gibt es weitere lokale Extrema?

Lösung: $f'(0) = 0 \rightsquigarrow x = 0$ kritischer Punkt

$2+\sin x > 0$, $x + e^x = 1$ für $x = 0$, also > 0 für $x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{für } x < 0,\ x \geq 0 \\ > 0 & \text{für } x > 0,\ x \geq 0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow x = 0 \text{ Minimum.}$$

$f'(x) = 0$ nur, falls $x = 0$ oder $x + e^x = 0$

$(x+e^x)' = 1 + e^x > 0 \rightsquigarrow x + e^x$ ist streng wachsend

$\rightsquigarrow$ höchstens eine Nullstelle

$x + e^x > 0$ für $x \geq 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^x) = -\infty$, $0 + e^0 = 1 > 0$

$\rightsquigarrow f'(x)$ besitzt genau eine Nullstelle in $(-\infty, 0)$

f' wechselt Vorzeichen von $+$ nach $-$ $\rightsquigarrow x_0$ lokales Max.

§4 / S. 80

③ $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar;

dabei gelte $\boxed{x \leq f'(x) \leq 42 - x^2}$ sowie $f(0) = 3$.

Was kann man über $f(3)$ sagen?

<u>Lösung</u>: Monotonie des Integrals

$$\underbrace{\int_0^3 x\,dx}_{\frac{9}{2}} \leq \underbrace{\int_0^3 f'(x)\,dx}_{\substack{= \\ \text{H.S.}}\ f(3) - f(0) \ = \ f(3) - 3} \leq \underbrace{\int_0^3 (42 - x^2)\,dx}_{= \left[42x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 \ = \ 126 - 9 \ = \ 117}$$

stetig!

Also $\boxed{\frac{15}{2} \leq f(3) \leq 120}$

§4/81

④ Berechne $\int e^x \sin x \, dx$ und $\int x^2 \sin x \, dx$ mit partieller Integration.

Lösung: $\int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{\sin x} \, dx = e^x \sin x - \int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{\cos x} \, dx$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \quad \Big| + \int \ldots$$

$$\rightsquigarrow \quad 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\rightsquigarrow \quad \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \left(e^x \sin x - e^x \cos x \right)$$

$$= \frac{e^x}{2} \left(\sin x - \cos x \right)$$

⑤ Bestimme $\int_0^3 e^{\sqrt{1+x}}\,dx$ mit einer passenden Substitution.

Lsg $u = \sqrt{1+x}$ $\qquad x = 0 \,..\, 3$, $u = \underbrace{\sqrt{1+0}}_{1} \,..\, \underbrace{\sqrt{1+3}}_{2}$

$x = u^2 - 1$

$dx = 2u\,du$

Folgt: $\int_0^3 e^{\sqrt{1+x}}\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \int_1^2 e^u\, 2u\,du = 2 \cdot \int_1^2 \underbrace{u}_{f}\, \underbrace{e^u}_{g'}\,du$

$\underset{\text{part. Int.}}{=} 2\left\{ \underbrace{\left[u\,e^u\right]_1^2}_{f\cdot g} - \int_1^2 \underbrace{e^u}_{f'\cdot g}\,du \right\}$

$= 2\left\{ 2e^2 - e^1 - \left[e^u\right]_1^2 \right\}$

$= 2 \cdot \left\{ 2e^2 \cancel{-e} - e^2 \cancel{+e^1} \right\} = 2 \cdot e^2$

§4 / S. 83

⑥ Berechne $\int_1^2 x^3 e^{x^2}\,dx$.

1. Lsg: $u = x^2$ $\qquad u = 1^2 = 1 \;\ldots\; 2^2 = 4$

$x = \sqrt{u}$, $\quad dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

$\uparrow$

$$\left(u^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Substitution: $\int_1^2 x^3 e^{x^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{u}^{\,3}\cdot e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 u\,e^u\,du = \frac{1}{2}\left[(u-1)\cdot e^u\right]_1^4 = \frac{3}{2}e^4$$

2. Lsg: $\frac{1}{2}\int_1^2 \underbrace{x^2}_{f}\cdot\underbrace{\left(2x\,e^{x^2}\right)}_{g'} dx = \frac{1}{2}\left\{\left[x^2\cdot e^{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{2x}_{f'}\,\underbrace{e^{x^2}}_{g}\,dx\right\}$

$g' \rightsquigarrow g(x) = e^{x^2}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[x^2 e^{x^2}\right]_1^2 - \left[e^{x^2}\right]_1^2\right\} = \frac{3}{2}e^4.$$

§4 / S. 84

⑦ Bestimme eine Stammfunktion für $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 2x - 6}{x \cdot (x-2) \cdot (x+3)}$

$$x \cdot (x-2) \cdot (x+3) = x \cdot (x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + 2x^3 + 2x - 6) : (x^3 + x^2 - 6x) = x + 1 \\
\underline{-(x^4 + x^3 - 6x^2)} \\
\quad x^3 + 6x^2 + 2x - 6 \\
\quad \underline{-(x^3 + x^2 - 6x)} \\
\qquad 5x^2 + 8x - 6 \quad \leftarrow \text{Rest}
\end{array}$$

$$\frac{5x^2 + 8x - 6}{x \cdot (x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+3}$$ Partialbruchzerlegung

$$\left(\frac{20 + 16 - 6}{2 \cdot 5}\right) \qquad \frac{45 - 24 - 6}{15}$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 2x - 6}{x \cdot (x-2)(x+3)}\, dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x| + 3 \ln|x-2| + \ln|x+3| \quad (+c)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x \cdot (x-2)^3 (x+3)| \quad (+c)$$

§4 / S. 85

⑧ Berechne $\int \frac{2x^3+x^2+3}{x^2+x-2}\,dx$.

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(2x^3+x^2+3) : (x^2+x-2) = 2x-1 \\
\underline{-\,(2x^3+2x^2-4x)} \\
\quad -x^2+4x+3 \\
\quad \underline{-(-x^2-x+2)} \\
\qquad\qquad 5x+1
\end{array}
$$

Nullstellen:

x^2+x-2

$= (x-1)\cdot(x+2)$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

Folgt $\int \frac{2x^3+x^2+3}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(2x-1+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx$

$$= x^2 - x + 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2|$$

§4 / S. 86

(9) Berechne $\int \frac{e^{4x}+2e^{3x}+2e^{x}-6}{e^{2x}+e^{x}-6}\,dx = (*)$

Subst. $u = e^{x}$, $x = \ln u$, $dx = \frac{1}{u}\,du$

$$\rightsquigarrow \int \frac{u^4+2u^3+2u-6}{u\cdot(u^2+u-6)}\,du$$

$\leftarrow (u+3)\cdot(u-2)$

(7) $= \frac{1}{2}u^2 + u + \ln|u| + 3\ln|u-2| + \ln|u+3|$

Rücksubst.

$(*) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^{x} + x + 3\cdot\ln|e^{x}-2| + \ln|e^{x}+3|$

(10) Finde eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x}.$$

Lsg Standardsubst.: $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2-2t}{1+t^2+2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= -2\int \frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2 \cdot (t^2+1)}\,dt$$ ... fortgeschrittene Partialbruchzerl.

oder: Nach den Zen: $(1+\sin)' = \cos x$

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\,dx + \int \frac{-\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= \ln(1+\sin x) + \int \frac{1-1-\sin x}{1+\sin x}\,dx = \ln(1+\sin x) - x + \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

§4 / S. 88

Bisher: $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x}\, dx = \ln(1+\sin x) - x + \int \frac{1}{1+\sin x}\, dx.$

$\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx$ durch Standardsubstitution $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\rightsquigarrow \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2 \cdot \int \frac{1}{1+t^2+2t}\, dt$$

$$= 2 \cdot \int \frac{1}{(t+1)^2}\, dt = \frac{-2}{t+1}$$

Probe $\left(\frac{-2}{t+1}\right)' = \frac{2}{(t+1)^2}$

Rücksubst. $\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}$

Also $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x}\, dx = \ln(1+\sin x) - x - \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$

Hausaufgaben:

§4/S.89

Aufgabe 2: Vorgelegt ist die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Gib die Grenzwerte $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x)$ an. **2 P.**

2. Zeige, dass $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$ nicht existiert. **4 P.**

3. Bestimme sämtliche lokalen Extremstellen von f. **5 P.**

4. Fertige eine ungefähre Skizze von f an. **3 P.**

14/58

Aufgabe 3:

a. Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = \dfrac{x^4+x^3+x-1}{x^2-1}$. **6 P.**

b. Berechne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. **6 P.**

Hinweis: Substituiere zunächst $x = \cos(t)$. Eine Stammfunktion von $\sin^2 t$ ist $\frac{1}{2}(t - \cos(t)\sin(t))$.

12/58