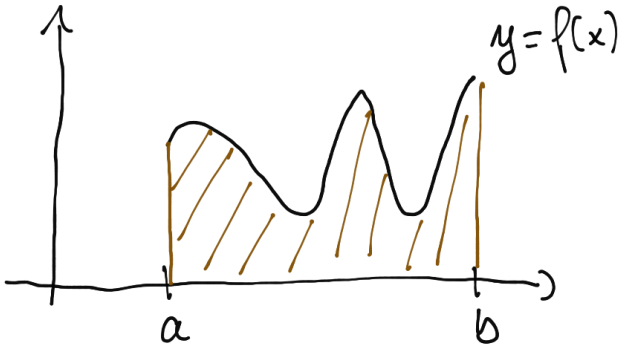
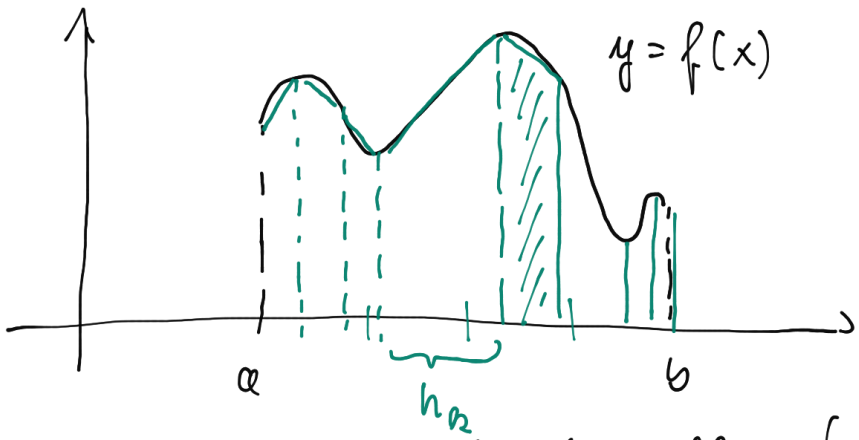
4.17 Numerische Integration



Ziel: Näherungsweises Bestimmen des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$.

Idee:

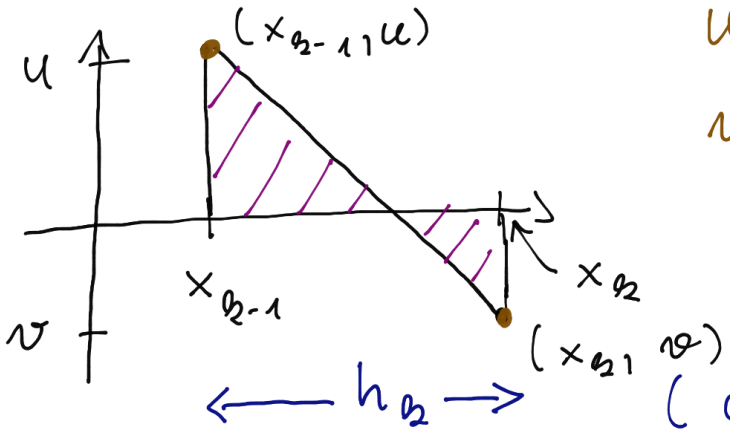


Ersetze Kurve durch einen Polygonzug und integriere diesen!

h_k = Breite des k-ten Teilintervalls (n Stück)

$h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n = b - a$

Trapezregel



hier:

$u = f(x_{k-1})$

$v = f(x_k)$

Fläche des Trapez

$\frac{1}{2} \cdot (u+v) \cdot h_k$

$= \frac{1}{2}(u+v) \cdot (x_k - x_{k-1})$

(also $x_k = x_{k-1} + h_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k$)

Also: $\int_a^{x_{k-1}} f(x)\,dx \approx I_{k-1}$

Dann nehme $\int_a^{x_k} f(x)\,dx = \int_a^{x_{k-1}} f(x)\,dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$

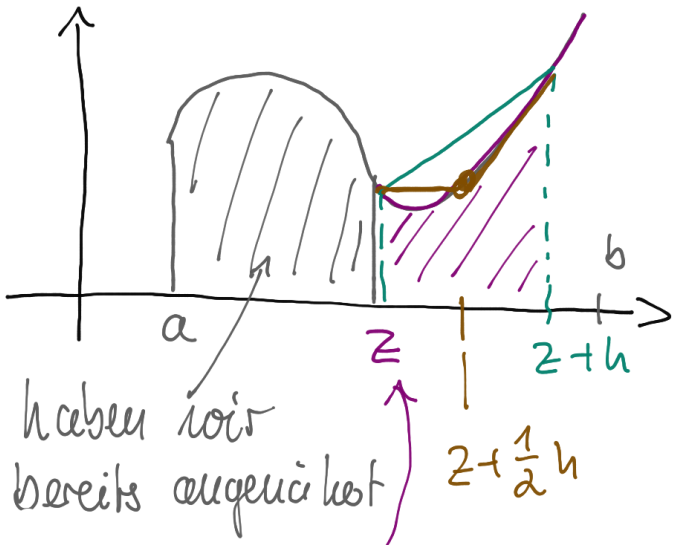
$\approx I_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$

Verbleibende Frage: $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+h_k} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} h_k \cdot \left(f(x_{k-1}) + f(x_{k-1}+h_k) \right)$

$h_k = ?$

4.18 Schrittweitensteuerung:

Idee:



h ist zunächst vorgegeben

Trapez über $[z, z+h]$

Inhalt: $I_h = \frac{1}{2} h \cdot (f(z) + f(z+h))$

Trapeze über $[z, z+\frac{h}{2}]$ und $[z+\frac{h}{2}, z+h]$.

Inhalt

$$I_{h/2} = \frac{h}{4} \cdot \left(f(z) + f(z+\tfrac{h}{2}) \right) + \frac{h}{4} \cdot \left(f(z+\tfrac{h}{2}) + f(z+h) \right)$$

$$I_{h/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(f(z) + f(z+h) \right) + \frac{h}{2} \cdot f(z+\tfrac{h}{2})$$

$$= \frac{1}{2} I_h + \frac{h}{2} \cdot f(z+\tfrac{h}{2})$$

<u>Verfahren</u> (ohne Feinheiten)

Eingabe: a, b, h (anfängliche Schrittweite), ε (Fehlerschranke), $f(x)$

Ausgabe: Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$

Schritt ($A \approx \int_a^z f(x)\,dx$ schon angenähert; aktuelle Schrittweite ist h, "Fehler" höchstens $\frac{z-a}{b-a} \cdot \varepsilon$)

Berechne $I_h = \frac{h}{2}\left(f(z) + f(z+h) \right)$

und $I_{h/2} = \frac{1}{2} I_h + \frac{h}{2} f\left(z + \frac{h}{2}\right)$

sowie $P = | I_h - I_{h/2} |$

$P \leq \frac{h\varepsilon}{b-a} \rightsquigarrow h \leftarrow 1.9 \cdot h,\ A \leftarrow A + I_{h/2},\ z \leftarrow z+h$

(Falls $z+h > b$: $h := b - z$)

$P > \frac{h\varepsilon}{b-a} \rightsquigarrow A \leftarrow A,\ z \leftarrow z,\ h \leftarrow 0.5\,h$

h zu klein: Abbruch

$\rightsquigarrow$ neuer Schritt

Klausurvorbereitung für §3 und §4:

§3: Berechnen von Integralen nach Def.: NEIN

① Zeige: $a(n) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

(1.) ist beschränkt

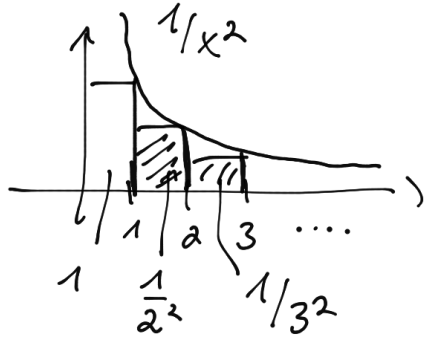
(2.) konvergiert für $n \to \infty$

$\lim_{n \to \infty} a(n) = \frac{\pi^2}{6}$

Lösung: (2.) folgt aus (1.), da $a(n)$ monoton wachsend

zu (1.) $1 \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{n^2} \cdot 1$

$f(x) = 1/x^2$



$$a(n) = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Untersumme von } 1/x^2 \text{ auf } [1, n]; \ \frac{1}{x^2} \text{ ist fallend!}}$$

$$\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

§4 / S. 78

② Wieso existiert $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{t+e^t}{2+\sin t}\,dt$ für jedes x?

Bestimme – wenn möglich – die Ableitung $f'(x)$.

Wieso ist $x = 0$ ein lokales Minimum von f?

Gibt es weitere lokale Extrema?

Lsg $h(t) = \frac{t+e^t}{2+\sin t}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig, also gibt es eine differenzierbare Stammfunktion H, $H'(x) = h(x)$, nämlich $H(x) = \int_0^x \frac{t+e^t}{2+\sin t}\,dt$, also $f(x) = H(x^2)$

Kettenregel: $f'(x) = 2x\,H'(x) = 2x \cdot \frac{x+e^x}{2+\sin x}$

② [Forts.] $f(x) = \dots$, $f'(x) = 2x \dfrac{x+e^x}{2+\sin x}$

Wieso ist $x = 0$ ein lokales Minimum von f?

Gibt es weitere lokale Extrema?

Lösung: $f'(0) = 0 \rightsquigarrow x = 0$ kritischer Punkt

$2+\sin x > 0$, $x + e^x = 1$ für $x = 0$, also > 0 für $x \geq 0$

$\left.\begin{array}{lll} f'(x) < 0 & \text{für} & x < 0,\ x \geq 0 \\ > 0 & \text{für} & x > 0,\ x \geq 0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow x = 0$ Minimum.

$f'(x) = 0$ nur, falls $x = 0$ oder $x + e^x = 0$

$(x+e^x)' = 1 + e^x > 0 \rightsquigarrow x + e^x$ ist streng wachsend

$\rightsquigarrow$ höchstens eine Nullstelle

$x + e^x > 0$ für $x \geq 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^x) = -\infty$, $0 + e^0 = 1 > 0$

$\rightsquigarrow f'(x)$ besitzt genau eine Nullstelle in $(-\infty, 0)$

f' wechselt Vorzeichen von $+$ nach $-$ $\rightsquigarrow x_0$ lokales Max.

§4 / S. 80

③ $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar;
dabei gelte $\boxed{x \le f'(x) \le 42 - x^2}$ sowie $f(0) = 3$.
Was kann man über $f(3)$ sagen?

<u>Lösung</u>: Monotonie des Integrals

stetig!

$$\underbrace{\int_0^3 x\,dx}_{\frac{9}{2}} \le \underbrace{\int_0^3 f'(x)\,dx}_{\overset{\text{H.S.}}{=} f(3)-f(0) \;=\; f(3)-3} \le \underbrace{\int_0^3 (42-x^2)\,dx}_{= \left[42x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 \;=\; 126 - 9 \;=\; 117}$$

Also $\boxed{\frac{15}{2} \le f(3) \le 120}$

§4/81

④ Berechne $\int e^x \sin x \, dx$ und $\int x^2 \sin x \, dx$ mit partieller Integration.

Lösung: $\int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{\sin x} \, dx = e^x \sin x - \int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{\cos x} \, dx$

$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right)$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \quad \Big| + \int \ldots$

$\rightsquigarrow \; 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$

$\rightsquigarrow \; \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \left(e^x \sin x - e^x \cos x \right)$

$= \frac{e^x}{2} \left(\sin x - \cos x \right)$

⑤ Bestimme $\int_0^3 e^{\sqrt{1+x}}\,dx$ mit einer passenden Substitution.

Lsg $u = \sqrt{1+x}$ $\qquad x = 0 \,..\, 3 \quad , \quad u = \underbrace{\sqrt{1+0}}_{1} \,..\, \underbrace{\sqrt{1+3}}_{2}$

$x = u^2 - 1$

$dx = 2u\,du$

Folgt: $\int_0^3 e^{\sqrt{1+x}}\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \int_1^2 e^u\, 2u\,du = 2 \cdot \int_1^2 \underbrace{u}_{f}\,\underbrace{e^u}_{g'}\,du$

$\underset{\text{part. Int.}}{=} 2\left\{ \underbrace{\left[u\,e^u\right]_1^2}_{f \cdot g} - \int_1^2 \underbrace{e^u}_{f' \cdot g}\,du \right\}$

$= 2\left\{ 2e^2 - e^1 - \left[e^u\right]_1^2 \right\}$

$= 2 \cdot \left\{ 2e^2 \cancel{- e} - e^2 \cancel{+ e^1} \right\} = 2 \cdot e^2$

§4 / S. 83

⑥ Berechne $\int_1^2 x^3 e^{x^2}\,dx$.

1. Lsg: $u = x^2$ $\qquad u = 1^2 = 1 \ldots 2^2 = 4$

$x = \sqrt{u}$, $\quad dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

$\uparrow$

$(u^{1/2})' = \frac{1}{2}\cdot u^{1/2-1} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

Substitution: $\int_1^2 x^3 e^{x^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{u}^3 \cdot e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

$= \frac{1}{2}\int_1^4 u e^u\,du = \frac{1}{2}\left[(u-1)\cdot e^u\right]_1^4 = \frac{3}{2}e^4$

2. Lsg: $\frac{1}{2}\int_1^2 \underbrace{x^2}_{f}\cdot\underbrace{(2x\,e^{x^2})}_{g'} dx = \frac{1}{2}\left\{\left[x^2 e^{x^2}\right]_1^2 - \int_1^2 \underset{f'}{2x}\,\underset{g}{e^{x^2}}\,dx\right\}$

$g' \rightsquigarrow g(x) = e^{x^2}$

$= \frac{1}{2}\left\{\left[x^2 e^{x^2}\right]_1^2 - \left[e^{x^2}\right]_1^2\right\} = \frac{3}{2}e^4$.

§4 / S. 84

7 Bestimme eine Stammfunktion für $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 2x - 6}{x \cdot (x-2) \cdot (x+3)}$

$x \cdot (x-2) \cdot (x+3) = x \cdot (x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x$

Polynomdivision: $(x^4 + 2x^3 + 2x - 6) : (x^3 + x^2 - 6x) = x + 1$

$$
\begin{array}{l}
-\ \underline{(x^4 + x^3 - 6x^2)} \\
\quad x^3 + 6x^2 + 2x - 6 \\
\quad -\ \underline{(x^3 + x^2 - 6x)} \\
\qquad 5x^2 + 8x - 6 \quad \leftarrow \text{Rest}
\end{array}
$$

$$\frac{5x^2 + 8x - 6}{x \cdot (x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+3}$$ Partialbruchzerlegung

$\left(\dfrac{20 + 16 - 6}{2 \cdot 5}\right)$ $\quad \dfrac{45 - 24 - 6}{15}$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 2x - 6}{x \cdot (x-2)(x+3)}\, dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x| + 3\ln|x-2| + \ln|x+3| \quad (+c)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x \cdot (x-2)^3 (x+3)| \quad (+c)$$

§4 / S. 85

⑧ Berechne $\int \frac{2x^3+x^2+3}{x^2+x-2}\,dx$.

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(2x^3+x^2+3) : (x^2+x-2) = 2x-1 \\
-\,(2x^3+2x^2-4x) \\
\hline
\quad -x^2+4x+3 \\
\quad -(-x^2-x+2) \\
\hline
\qquad\quad 5x+1
\end{array}
$$

Nullstellen:

x^2+x-2

$= (x-1)\cdot(x+2)$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

Folgt $\int \frac{2x^3+x^2+3}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(2x-1+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx$

$$= x^2 - x + 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2|$$

§4 / S. 86

(9) Berechne $\int \frac{e^{4x}+2e^{3x}+2e^{x}-6}{e^{2x}+e^{x}-6}\,dx = (*)$

Subst. $u = e^{x}$, $x = \ln u$, $dx = \frac{1}{u}\,du$

$$\rightsquigarrow \int \frac{u^4+2u^3+2u-6}{u\cdot(u^2+u-6)}\,du$$

$\leftarrow (u+3)\cdot(u-2)$

(7) $= \frac{1}{2}u^2 + u + \ln|u| + 3\ln|u-2| + \ln|u+3|$

Rücksubst.

$(*) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^{x} + x + 3\cdot\ln|e^{x}-2| + \ln|e^{x}+3|$

(10) Finde eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x}.$$

Lsg Standardsubst.: $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2-2t}{1+t^2+2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= -2\int \frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2 \cdot (t^2+1)}\,dt$$ ... fortgeschrittene Partialbruchzerl.

oder: Nach den Regeln: $(1+\sin)' = \cos x$

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\,dx + \int \frac{-\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= \ln(1+\sin x) + \int \frac{1-1-\sin x}{1+\sin x}\,dx = \ln(1+\sin x) - x + \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

Bisher: $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x}\, dx = \ln(1+\sin x) - x + \int \frac{1}{1+\sin x}\, dx.$

$\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx$ durch Standardsubstitution $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\rightsquigarrow \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2 \cdot \int \frac{1}{1+t^2+2t}\, dt$$

$$= 2 \cdot \int \frac{1}{(t+1)^2}\, dt = \frac{-2}{t+1}$$

Probe $\left(\frac{-2}{t+1}\right)' = \frac{2}{(t+1)^2}$

Rücksubst. $\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}$

Also $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x}\, dx = \ln(1+\sin x) - x - \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$

Hausaufgaben:

§4/S.89

Aufgabe 2: Vorgelegt ist die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Gib die Grenzwerte $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x)$ an. **2 P.**

2. Zeige, dass $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$ nicht existiert. **4 P.**

3. Bestimme sämtliche lokalen Extremstellen von f. **5 P.**

4. Fertige eine ungefähre Skizze von f an. **3 P.**

14/58

Aufgabe 3:

a. Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = \dfrac{x^4+x^3+x-1}{x^2-1}$. **6 P.**

b. Berechne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. **6 P.**

Hinweis: Substituiere zunächst $x = \cos(t)$. Eine Stammfunktion von $\sin^2 t$ ist $\frac{1}{2}(t - \cos(t)\sin(t))$.

12/58