Abschnitt B: Reihen

Bsp $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ unendliche Summe

$\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ Folge "Partialsumme der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$"

$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ist eine konvergente Folge, denn

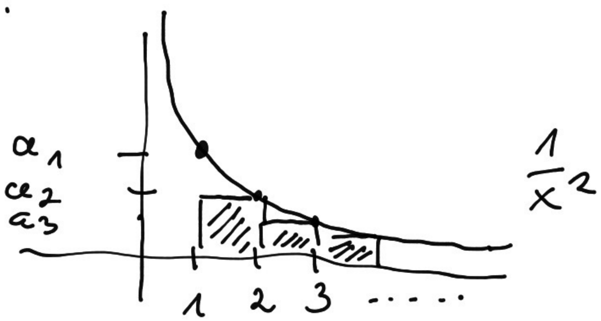
- $(s_n)_n$ ist monoton wachsend

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}}_{= s_n} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{> 0} > s_n$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^3}{6} = L}$$

- $(s_n)_n$ ist beschränkt:

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{a_k}$$



$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

Untersumme

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

- Satz von der monotonen Konvergenz: $(s_n)_n$ konvergiert $= L = \frac{\pi^2}{6}$

Definition (Reihen)

Vorgelegt: Eine reelle Zahlenfolge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$.

Unter der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man

(a) die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Konvergenz / Divergenz / Monotonie der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezieht sich immer auf die Folge der Partialsummen.

(b) Konvergiert die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$ gegen den Grenzwert L, so schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L \qquad \text{(Reihenwert)}$$

Beispiel: Die geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

Die geometrische Summenformel: $q \neq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

denn $(1-q)\cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} q^k}_{q+q^2+\ldots+q^n+q^{n+1} = q\cdot(1+q+\ldots+q^n)} = 1-q^{n+1}$

Teile noch durch $1-q$; fertig.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = s_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q}$$ konvergent für $|q|<1$

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert gegen $\dfrac{1}{1-q}$ für $|q|<1$

und divergiert für $|q| \geq 1$.

Dezimalzahlen

nicht abbrechende Dezimalzahlen $\pi = 3{,}14\ldots\ldots$

Betrachte $0{,}z_1z_2z_3z_4\ldots$ mit $z_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

$$0{,}z_1z_2z_3z_4\ldots := \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \frac{z_3}{10^3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}$$

(1.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}$ monoton wachsend

(2.) $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} \underset{z_k \le 10}{\le} \sum_{k=1}^{n} \frac{10}{10^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k-1}} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{10^l}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \le \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

$(s_n)_n$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent.

Übung: Weise nach, dass $0{,}\overline{9} = 1$

$\boxed{\text{STOP}}$

Die harmonische Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} k^2$ divergiert (na klar)

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, denn: $\frac{1}{2^4}$

$$\underbrace{1}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \frac{1}{17} + \dots$$

$\geq 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$

Allgemein $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$, also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Leibniz-Kriterium: Ist $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$.

zum Beispiel: $a_k = \frac{1}{k}$ erfüllt die Voraussetzung, also konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots$

[Grenzwert: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$

Absolute Konvergenz

Alle a_k positiv $\rightsquigarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ monoton wachsend
Für Konvergenz reicht dann die Beschränktheit.

<u>Definition</u> Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

<u>Beispiel</u>. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist konvergent, aber <u>nicht</u> absolut konvergent, denn $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (harmonische Reihe) ist divergent.

Satz: Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Strategie: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegeben. Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und zeige Beschränktheit. Dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

<u>Bsp</u> $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ konvergent, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent

↑ Leibniz-Kriterium reicht hier....

Das Majoranten-Kriterium

$0 \le m_k \le a_k \le M_k$ für alle k (endlich viele Ausnahmen erlaubt)

"für fast alle k" (= alle bis auf endlich viele)

Dann: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k$ heißt Minorante von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$,

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k$ heißt Majorante von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$

Notiz: $\sum\limits_{k=0}^{n} m_k \le \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \le \sum\limits_{k=0}^{n} M_k \quad \left(\le \sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k \right)$

Majorantenkriterium: Besitzt die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ eine konvergente Majorante, dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Minorantenkriterium: Sind alle $a_k \ge 0$ und besitzt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine divergente Minorante, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent

Notiz: Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

bzw.: $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \ne 0$ oder existiert nicht, so divergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$

Zwischenspiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k) \cdot x^k \qquad \text{"Potenzreihe"}$$

$|x| < 1$: $\quad |\sin(k) \cdot x^k| \leq |x|^k$

$\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k$ konvergente Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} |\sin(k)\, x^k|$,

d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k) \cdot x^k$ ist absolut konvergent, also konvergent

$|x| \geq 1$: $\quad \sin(k) \cdot x^k$ keine Nullfolge

(sonst wäre $\dfrac{\sin(k) \cdot \cancel{x^k}}{\cancel{x^k}}$ ebenfalls eine ...)

Fazit: $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k) \cdot x^k$ konvergent für $-1 < x < 1$

divergent für $x \leq -1$ oder $x \geq 1$

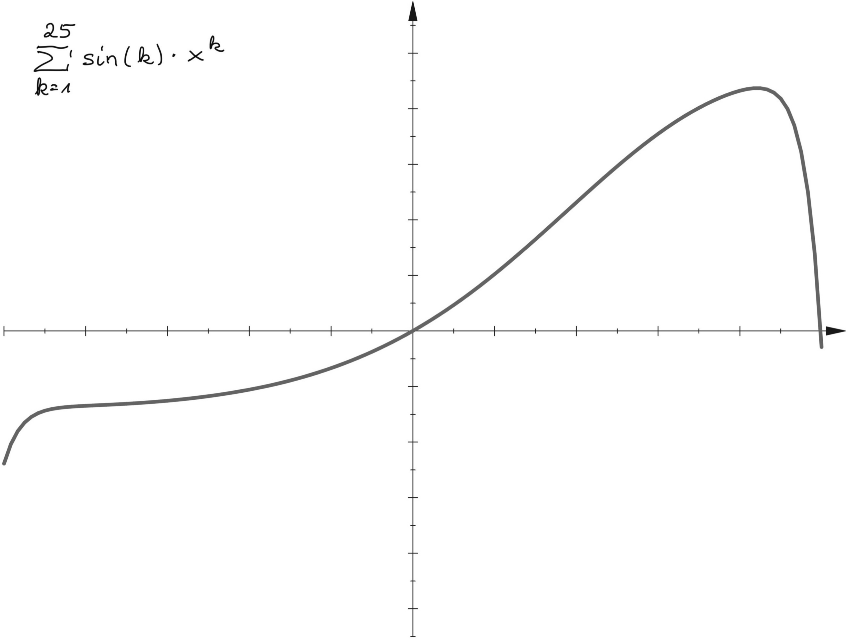
Folgt: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k)\, x^k$ definiert eine Funktion, die

auf $(-1, 1)$ erklärt ist.

Animation: $\sum_{k=1}^{n} \sin(k) \cdot x^k$ auf $[-1, 1]$

$n = 0 \ldots ?$

$$\sum_{k=1}^{25} \sin(k) \cdot x^k$$



Auf dem Weg zum Wurzelkriterium

$$\sum_{k=0}^{n} |\sin(k)\cdot x^k| \le \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |x|^k}_{\text{Majorante}} \xleftarrow[n\to\infty]{} \text{geom. Reihe}$$

Allgemein: $|a_k| \le q^k$ für fast alle k, $q < 1$

$\uparrow$ alle bis auf endlich viele

Dann: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$,

also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

Etwa: $|a_k| \le q^k$ für $k > k_0$: reicht: „fast alle k"

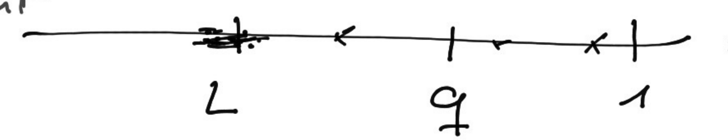
$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k|}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|}_{\le \sum q^k}$$

$|a_k| \le q^k$ ist äquivalent zu $\sqrt[k]{|a_k|} \le q$ (mit $q < 1$)

Wird zum Beispiel erzwungen von $L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$

Dann, $\sqrt[k]{|a_k|} \le \frac{1+L}{2} = q$ für große k, bzw. für fast alle k

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$



Derzeitiger Stand

Vorgelegt: Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Gibt es ein $q < 1$ (echt kleiner!) mit: $\sqrt[k]{|a_k|} \le q$ f. fast alle k, so konvergiert di Reihe absolut,

denn $|a_k| \le q^k$ für fast alle k zeig, dass die geometrische Reihe $\sum q^k$ (wg. $q < 1$) eine konvergente Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ist.

Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \ge 1$ für unendlich viele k, so ist $(a_k)_k$ keine Nullfolge und dahe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^k + 3^k}{5^k - 3^k}}_{a_k}$. $\quad 0 \le a_k = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k + \left(\frac{3}{5}\right)^k}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ (mit $\frac{1}{5^k}$ erweitern)

Also: $a_k \le \underbrace{\frac{1}{7}}_{= q \le 1}$ für fast alle k (Grenzwertdefinition)

Folgt: Die Reihe ist konvergent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k - 3^k} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{k_0 - 1} \frac{2^k + 3^k}{5^k - 3^k}}_{= Z} + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^k}_{\le \frac{1}{1 - \frac{1}{7}}}$$

Das Wurzelkriterium

Vorgelegt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' a_k$

Voraussetzung: $L = \lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert. Dann gilt

(A) Ist $L < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' a_k$ absolut

(B) Ist $L > 1$, so divergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' a_k$.

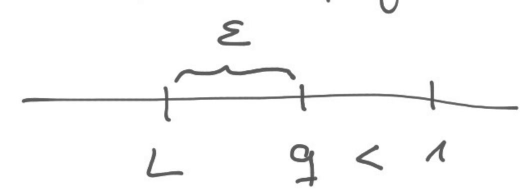
Für $L = 1$ gibt es keine allgemeine Aussage über die Konvergenz.

Beweis: (B) $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ für fast alle k

$\Rightarrow \quad (a_k)_k$ keine Nullfolge ✓

(A) Setze $q = \frac{1+L}{2} = L + \varepsilon$

mit $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0$



$\varepsilon = \frac{1-L}{2}$

Es gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für fast alle k.

Folgt: Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' q^k$ ist eine konvergente $(q<1)$ Majorante $(|a_k| \leq q^k$ für fast alle $k)$ von $\sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' |a_k|$.

$\sum{}' \frac{1}{k^2}$ absolut konvergent, $\sum{}' \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergent, aber nicht absolut konv.,

$\sum{}' 1$ divergent. In jedem Fall gilt $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$.

Das Quotientenkriterium

Erinnerung: Gibt $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L$, so gilt $L = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

(Vor.: fast alle $a_k \neq 0$)

Also gilt das Quotientenkriterium:

Vorgelegt sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \neq 0$ für fast alle k.

Voraussetzung: $L = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert. Dann gilt:

(A) Ist $L < 1$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut

(B) Ist $L > 1$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Für $L = 1$ lässt sich keine allgemeine Aussage treffen.

Für welche x konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} k^7 \cdot x^k$?

$$= x + 2^7 \cdot x^2 + 3^7 \cdot x^3 + \dots$$

Wurzelkriterium : $a_k = k^7 \cdot x^k$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k}^{\,7} \cdot |x| \xrightarrow{k\to\infty} |x|$$

$|x| < 1 \leadsto$ abs. konvergent : abs. konvergent für $x \in (-1, 1)$

$|x| > 1 \leadsto$ divergent : divergent außerhalb $[-1, 1]$

$x = \pm 1 \leadsto |a_k| = k^7$ keine Nullfolge, also divergent.

Erhalte Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^7 \cdot x^k$, $-1 < x < 1$

Für welche x konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k^7 \cdot x^{2k+1}}_{a_k}$?

Betrachte $b_k = k^7 \cdot x^{2k}$

$$\sqrt[k]{|b_k|} = \sqrt[k]{k}^{\,7} \cdot |x|^2 \longrightarrow |x|^2$$

$\sum_{k=0}^{\infty} k^7 x^{2k}$ konvergiert für $|x| < 1$, divergiert für $|x| \geq 1$

$\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} k^7 \cdot x^{2k+1}$ ebenso.

Übung

1.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(k^k)^2}{k^{(k^2)}}}_{a_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k}}{k^{(k^2)}}$

Wurzelkriterium: $\displaystyle\left(\frac{(k^k)^2}{k^{(k^2)}}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{k^2}{k^k} = \frac{1}{k^{k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1$; konvergent.

2.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

Quotientenkriterium: $\displaystyle\frac{((k+1)!)^2}{(2\cdot(k+1))!} \Big/ \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

$\displaystyle= \frac{(\cancel{k+1})!\,(\cancel{k+1})!\,(\cancel{2k})!}{(\cancel{2k+2})!\,\cancel{k}!\,\cancel{k}!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+2)} = \frac{(1+\frac{1}{k})^2}{(2+\frac{1}{k})\cdot(2+\frac{2}{k})}$

$\displaystyle\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1$; konvergent.

3.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}$

$\displaystyle\frac{k}{1+k^2} \geq \frac{k}{k^2+k^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}$, also $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ eine divergente Minorante $\longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{1+k^2}$ ist divergent

4.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$

$\displaystyle\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$: divergent

5.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

Wurzelkriterium: $\displaystyle\sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{e} < 1$;

konvergent!

Hausaufgabe

Überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{6^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} + \sqrt{k^2+k} - k \right)^k$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{\sqrt{k}}$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+4}{k^2(k+2)^2}$

Binomialkoeffizient : $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$, spez. $\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k! \cdot k!}$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\sqrt{k^2+k} - k \right)$$