Satz über Potenzreihen

Vorgelegt ist die über eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ definierte Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-p)^k$.
Dann ist f auf dem Konvergenzintervall $(p-R, p+R)$ stetig, beliebig oft differenzierbar und integrierbar.
Außerdem gilt

(a) $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-p)^{k-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\, c_{l+1} (x-p)^l$;
diese Potenzreihe hat wieder Konvergenzradius R.

(b) $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-p)^{k+1} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{l-1}}{l} (x-p)^l$
ist die Stammfunktion von $f(x)$ mit $F(p) = 0$;
auch diese Potenzreihe hat Konvergenzradius R.

Notiz: $\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} \underset{l=k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} c_{l+1} (l+1) \cdot x^l$

$f'(x)$ und $x \cdot f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k$ haben den gleichen Konvergenzradius, nämlich $\left(\limsup \sqrt[k]{|k c_k|}\right)^{-1} = \left(\limsup \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|c_k|}\right)^{-1}$
$= \left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \limsup \sqrt[k]{|c_k|}\right)^{-1} = \left(1 \cdot \frac{1}{R}\right)^{-1} = R$ ✓

Anwendung: $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$$

$x = \tan(\arctan x)$ differenzieren:

$$1 = \tan'(\arctan x) \cdot \arctan' x \qquad \text{(Kettenregel!)}$$

$$= \left[1 + \tan^2(\arctan x)\right] \cdot \arctan' x$$

$$1 = \left[1 + x^2\right] \cdot \arctan' x \Rightarrow \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \underset{|x|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2k}$$

Integrieren:

$$\arctan x = \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\boxed{\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1}} \qquad \text{für } |x| < 1$$

Konvergenzradius ist $R = 1$

$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ gilt für $|x| < 1$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ konvergiert (aber nicht absolut):

$\sum \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ für $x = 1$

$\left(\frac{1}{2k+1}\right)_{k=0}^{\infty}$ ist eine monoton fallende Nullfolge $\to$ Leibniz

Abelscher Grenzwertsatz:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ auf $[0,1]$ und $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist auf $[0,1]$ (und speziell in $x = 1$) stetig.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ ist konvergent

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} 1^{2k+1}$$

$$= \lim_{x \to 1-} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}}_{= \arctan x}$$

$$= \lim_{x \to 1-} \arctan x \overset{\arctan \text{ ist stetig}}{=}$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{wg } \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

Ähnlich: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2}$

Knobelaufgabe 1

Zeige $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$

und folgere $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

Hinweis: $\ln' x = \frac{1}{x}$, $\ln 1 = 0$.

Zum Beweis des Satzes (Darf $p = 0$ annehmen)

I = Konvergenzintervall, $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k}_{S_n(x) \text{ Polynom, stetig}}$$

$f(x)$ ist in $x = x_0$ stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S_n(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

$$= \lim_{x \to x_0} S_n(x)$$

$$\underline{\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0}} S_n(x) = \underline{\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty}} S_n(x) \quad \leftarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \underbrace{\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m}_{= 0} &= 0 \\ \lim_{m \to \infty} \underbrace{\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m}_{= 1^m} &= 1 \end{aligned}\right\} \neq$$

I. A. darf man Grenzwertprozesse **NICHT** vertauschen

$g_n(x) = x^n \quad , \quad x \in [0,1]$

$g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underset{\text{stetig}}{x^n} = \begin{cases} 0 & \text{f. } x<1 \\ 1 & \text{f. } x=1 \end{cases}$ unstetig

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$

- Zur Stetigkeit von $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' c_k x^k$:

$[a,b] \subseteq I = (-R,R)$ (R Konvergenzradius)

$|f(x) - s_n(x)| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}{}' c_k x^k \right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}{}' |c_k| \cdot |x|^k$

$\le \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}{}' |c_k| \cdot \underbrace{\max\{|a|,|b|\}}_{=:u \in (-R,R)}{}^k < \varepsilon$ für n groß

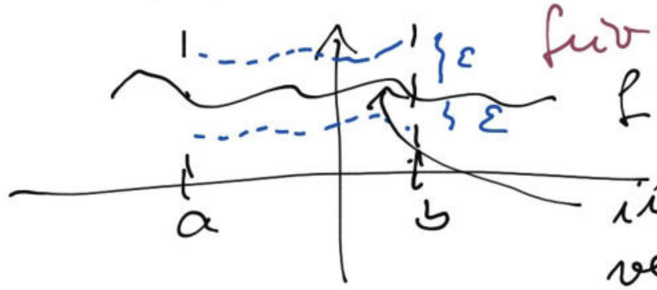
unabhängig von x ($\in [a,b]$)

$x \in [a,b]$ als Vor.

$\left| \sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' |c_k| u^k - \sum\limits_{k=0}^{n}{}' |c_k| u^k \right| < \varepsilon$ für n groß

Dreiecksungleichung

$|a+b| \le |a| + |b|$



in diesem ε-Schlauch verlaufen fast alle $s_n(x)$

Gezeigt: Für fast alle n gilt: $|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon$
für alle $a \leq x \leq b$

$$\underbrace{\|f - s_n\|_\infty}_{\text{von } n \text{ abhängige reelle Zahl}} = \sup\{|f(x) - s_n(x)| \,;\, a \leq x \leq b\}$$

$\|f - s_n\|_\infty < \varepsilon$ für fast alle n.

Also: $\lim\limits_{n \to \infty} \|f - s_n\|_\infty = 0$

Wir sagen: $s_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x)$ auf $[a, b]$.

Hieraus folgt: $f(x)$ ist stetig auf $[a,b]$ und damit auch auf $I = (-R, R)$

Denn: $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - s_n(x) + s_n(x) - s_n(x_0) + s_n(x_0) - f(x_0)|$

Dreiecksungl.

$$\underbrace{\leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{klein für große } n \\ \text{(unabh. von } x\text{ !)}}}{|f(x) - s_n(x)|} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{klein f. } x \approx x_0}}{|s_n(x) - s_n(x_0)|} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{klein für große } n}}{|s_n(x_0) - f(x_0)|}}_{\text{klein}}$$

... : fertig

Wir haben gezeigt: f ist stetig
Es folgt: f ist integrierbar.

$$\left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x s_n(t)\,dt \right| = \left| \int_0^x (f(t) - s_n(t))\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^x \underbrace{|f(t) - s_n(t)|}_{\leq \|f-s_n\|_\infty = \sup\{|f(t)-g(t)|\,;\ 0 \leq t \leq x\}} dt \leq \int_0^x \|f - s_n\|_\infty \,dt = x \cdot \|f - s_n\|_\infty \xrightarrow{\text{f. } n\to\infty} 0$$

Also
$$\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^x s_n(t)\,dt$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} c_k t^k\right) dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, c_k \cdot x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, c_k\, x^{k+1}$$

Warum ist $f(x)$ differenzierbar?

$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot x^{k-1}$ hat denselben Konvergenzradius.

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k + c_0$ ist eine Stammfunktion von $g(x)$,

s.o. $\triangledown_0$ Also $f'(x) = g(x)$ wie beh. $\square$

Abschnitt D: Taylorreihen

I Intervall, $p \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion.

Fragestellung: Gibt es eine Potenzreihe $\sum c_k (x-p)^k$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-p)^k$ für x nahe p.

f heißt <u>analytisch</u>, wenn die Frage für jedes $p \in I$ positiv beantwortet werden kann.

Falls $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-p)^k$ für $|x-p| < R$, $R > 0$:

$$= c_0 + c_1 \cdot (x-p) + c_2 \cdot (x-p)^2 + c_3 \cdot (x-p)^3 + \dots$$

Dann: $c_0 = f(p)$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-p) + 3c_3(x-p)^2 + \dots$$

$$c_1 = f'(p)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3 \cdot (x-p) + \dots$$

$$2c_2 = f''(p) \quad \text{bzw.} \quad c_2 = \frac{f''(p)}{2}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot c_3 + \dots$$

$$2 \cdot 3 \cdot c_3 = f'''(p) \quad \text{bzw.} \quad c_3 = \frac{f'''(p)}{3!}; \quad \text{allg.} \quad \boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!}}$$

Wenn $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-p)^k$ nahe p gilt,

dann gilt: $\boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!}}$ für alle k.

Minimalvoraussetzung: f ist beliebig oft differenzierbar

Def. Ist f beliebig oft differenzierbar, so heißt

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} \cdot (x-p)^k$$

die Taylorreihe von f in p.

1.) Die Taylorreihe kann den Konvergenzradius 0 haben.
Speziell: f lässt sich nicht durch seine Taylorreihe darstellen.

2.) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ Es gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle k

Also $T(x) = 0 \neq f(x)$ für $x \neq 0$

In Fall 1.) und 2.): $f(x)$ lässt sich nicht als Potenzreihe schreiben.

$f: I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig diff'bar

$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} \cdot (x-p)^k$ heißt n-tes Taylorpolynom von f bei p.

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ mit $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ n-tes Restglied.

Es gilt: $R_n(x) = \int_p^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

(Integralform des Restglieds)

$n = 0$: $f(x) = f(p) + \int_p^x f'(t)\,dt$ (Hauptsatz)

$n = 1$: $f(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x-p) + \int_p^x (x-t) \cdot f''(t)\,dt$

Lagrange: $R_n(x) = \frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$

für ein ξ zwischen p und x

$n = 0$: $f(x) = f(p) + (x-p) \cdot f'(\xi)$ Mittelwertsatz

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} \cdot (x-p)^k \iff R_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Beispiel $f(x) = \sin(x)$, $p = 0$

Taylorreihe $T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

$$\underbrace{T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{Konvergenzradius } = \infty} \overset{?}{=} \sin(x)$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sin^{(n+1)}(\xi) \right|$$

$$= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{\left| \sin^{(n+1)}(\xi) \right|}_{\leq 1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ konvergiert

also $\lim_{k \to \infty} \frac{|x|^k}{k!} = 0$

Folgt

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}}$$

Hausaufgabe : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$

(a) Zeige: Konvergenzradius ist ∞.

(b) Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.

(c) Zeige: $f(x) = \sin(x)$

Erinnerung: Gilt $g'' = -g$, so folgt

$$g(x) = g(0) \cdot \cos x + g'(0) \cdot \sin x$$

Spiel und Spaß mit Taylorpolynomen

Eingangsbsp.: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Potenzreihen sind stetig

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$o(x^n)$ bedeutet ein Funktion mit $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x} = 1 + o(1)$$

eine Fkt mit $\lim_{x \to 0} o(1) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 + \lim_{x \to 0} o(1) = 1.$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(x) \xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{2}$$

Andere Möglichkeit des Aufschreibens:

$$\sin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x + x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!}}_{R(x) \text{ stetig}}$$

$$\sin x = x + x^2 \cdot R(x)$$

erstes Taylor-polynom von sin

analytisch

Allg. $f(x) = T_n(x) + x^{n+1} \cdot S(x)$

mit $S(x)$ stetig

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + x \cdot R(x) \xrightarrow{x \to 0} 1 + 0 \cdot R(0) = 1$$

Beispiel

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)\cdot(\cos x - 1)}{x \cdot (\sin x - x)} = ?$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot S_1(x) \qquad \text{wie oben}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3 \cdot S_2(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \cdot S_3(x) \qquad \text{mit } S_1, S_2, S_3 \text{ stetig}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2} + x^3 \cdot S_1(x)\right)\left(-\frac{x^2}{2!} + x^3 S_2(x)\right)}{x \cdot \left(-\frac{x^3}{6} + x^4 \cdot S_3(x)\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{4} + x^5 \cdot \left(\frac{1}{2} S_2(x) - \frac{1}{2} S_1(x) + x\, S_1(x) S_2(x)\right)}{-\frac{x^4}{6} + x^5 \cdot S_3(x)} \qquad \text{KÜRZEN!}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{4} + x \cdot (\ldots)}{-\frac{1}{6} + x \cdot S_3(x)} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$$

Rechnen mit Taylorpolynomen

f Funktion. $(T_n f)(x)$ = Taylorpolynom n-ter Ordnung

<u>Bsp</u> $T_5 \sin(x)\cdot\cos(x) = T_5\left[(T_5 \sin)(x)\cdot(T_5 \cos)(x)\right]$

$$= T_5\left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right]$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} - \cancel{\frac{x^7}{4!5!}} + \frac{x^5}{5!} - \cancel{\frac{x^7}{5!2!}} + \cancel{\frac{x^9}{5!\cdot 4!}}$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^5$$

$$\sin x \cdot \cos x = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + x^6\cdot S(x), \quad S \text{ stetig}$$

$$T_n(f\cdot g) = T_n(T_n f \cdot T_n g)$$

gleicher Entwicklungspunkt !

Berechne T_3 von $e^{\sin x} = f(x)$ bei $p = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^4 \cdot S_1(x) \qquad (q = \sin(p) = 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \cdot S_2(x)$$

$(T_3 f)(x)$: ersetze x im $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

durch $x - \frac{x^3}{6}$ und werfe beim

Ausmult. alle Terme $x^4, x^5, \ldots$ weg

$$(T_3 f)(x) = T_3\left(1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6}\right)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \underbrace{1}_{f(0)} + \underbrace{x}_{f'(0)} + \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\frac{f''(0)}{2}} + \underbrace{0 \cdot x^3}_{f'''(0) = 0}$$

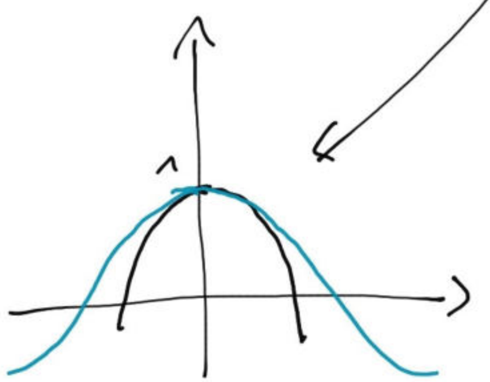
$$\Rightarrow f''(0) = 1$$

Was man am Taylorpolynom ablesen kann:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot \underbrace{S(x)}_{\text{stetig, bei } x=0 \text{ beschränkt}}$$

klein gegen $1, x, x^2$

$$\approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{für } x \approx 0$$



$$\left.\begin{aligned} \cos(0) &= 1 \\ \cos'(0) &= 0 \\ \cos''(0) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 \text{ ist Max.}$$

$$\cos(x^6) = 1 - \frac{x^{12}}{2} + x^{13}\tilde{S}(x)$$

$$\approx 1 - \frac{x^{12}}{2} \quad \text{für } x \approx 0 \Rightarrow 0 \text{ ist Max}$$