Schülervorlesung
IngMa I (Analysis 1)
Sommersemester 2020

Kapitel "Taylorreihen"

Vorspann:

$f : I \to \mathbb{R}$

x_0 Entwicklungspunkt

Finde ein Polynom vom Grad n mit:

$p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$

Das gilt genau dann, wenn $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$

Dann $f(x) = p(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{LAGRANGEsches Restglied}}$

für ein z (hängt von x, n, f ab) zwischen x_0 und x

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$

$x_0 = 0 \leftarrow \exp^{(k)}(0) = 1$

Taylorpolynom n-te Ord.

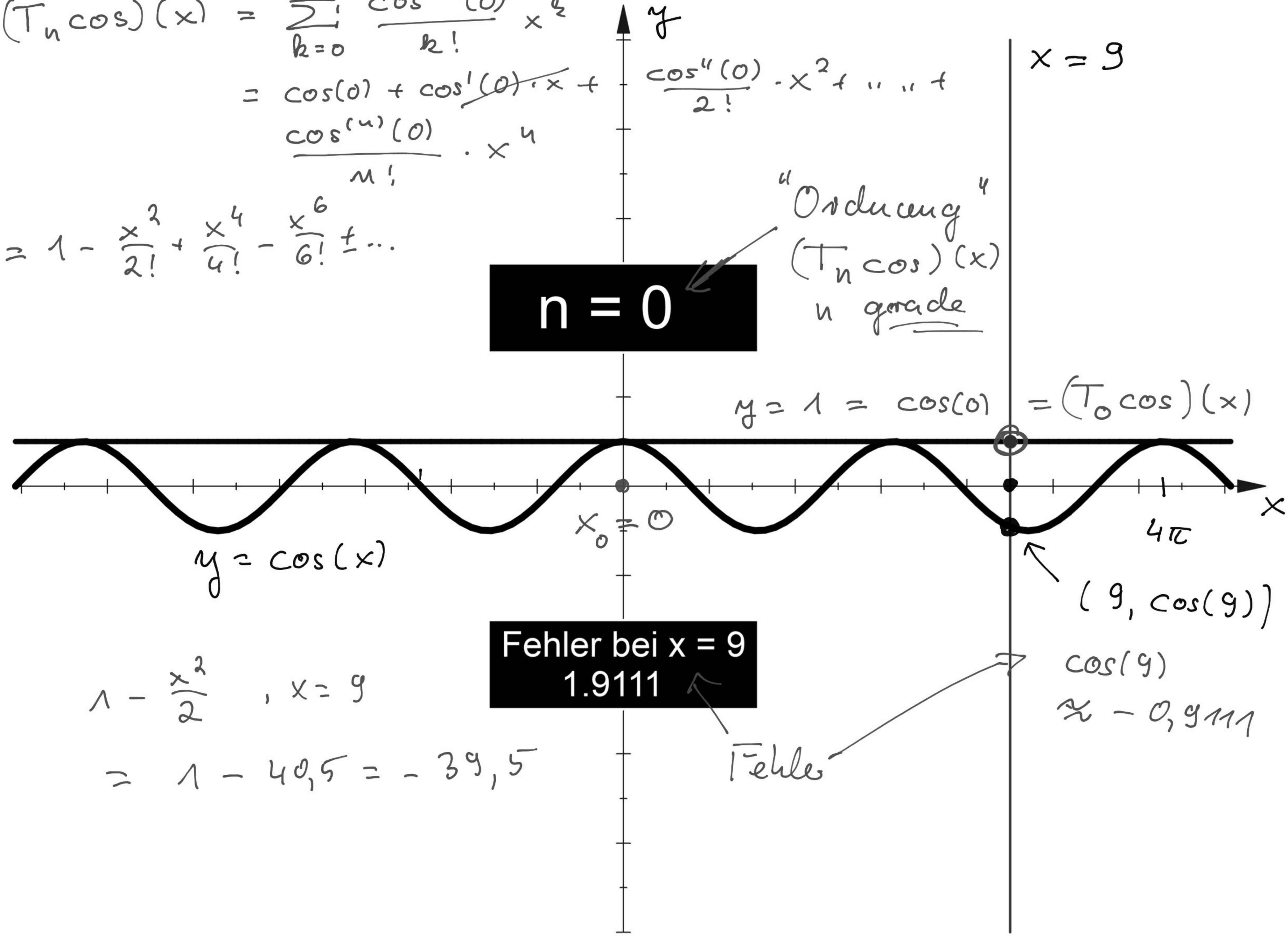
$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$e^x = p(x) + \underbrace{\frac{e^z}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}}_{\text{klein für große } n}$

$$(T_n\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

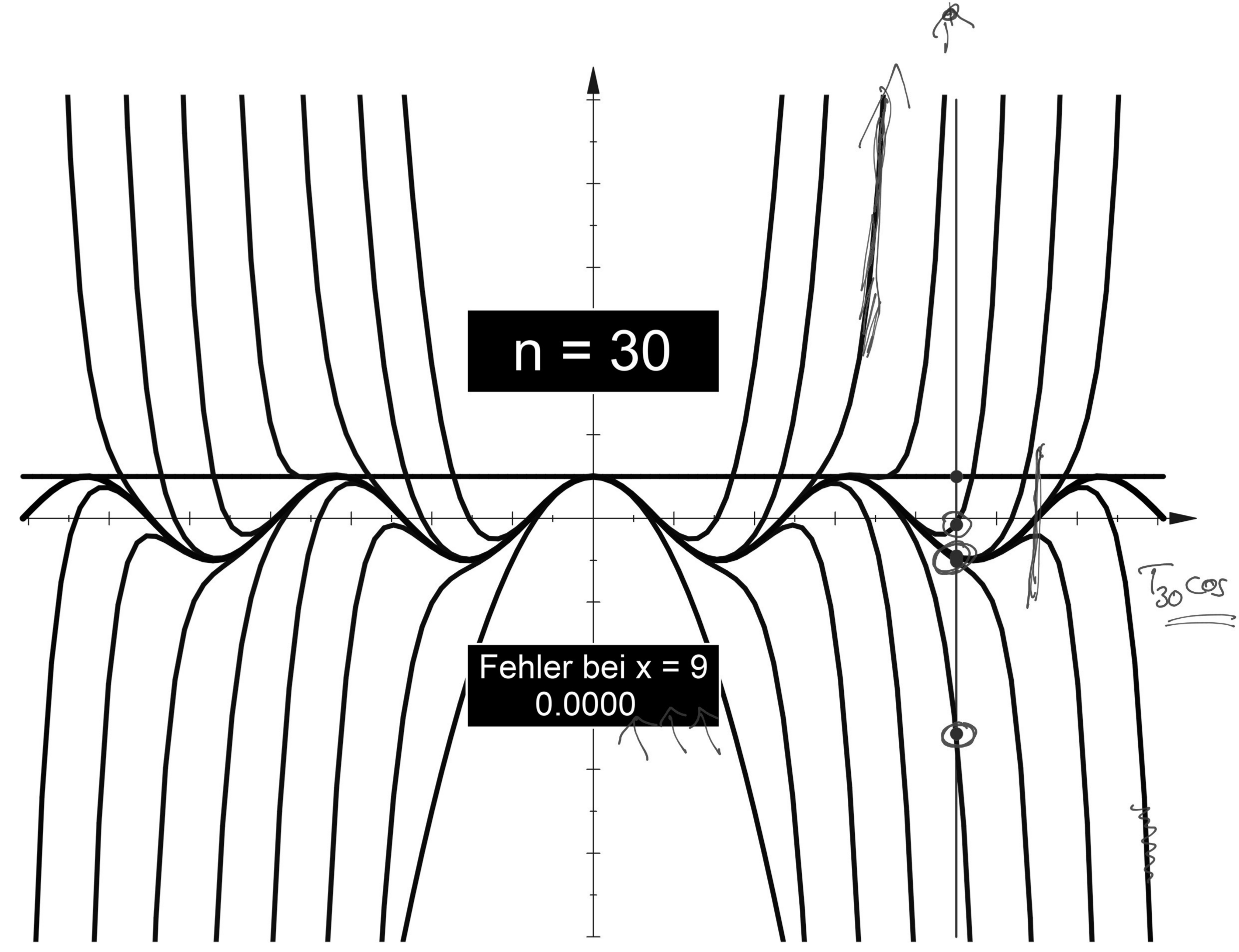
$$= \cos(0) + \cancel{\cos'(0)\cdot x} + \frac{\cos''(0)}{2!}\cdot x^2 + \dots + \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$



$1 - \frac{x^2}{2}$, $x = 9$

$= 1 - 40{,}5 = -39{,}5$


n = 30
Fehler bei x = 9
0.0000
$T_{30} \cos$

Das Summenzeichen:

<u>Bsp.</u>: $\displaystyle\sum_{k=3}^{6} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

$k = 3, 4, 5, 6$ einsetzen und summieren

Allg.: $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n + a_{n+1} + \dots + a_m$

Zahlen

<u>Bsp.</u>: Taylorpolynom der Exponentialfunktion: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =$

$k=0$ $\quad k=1 \quad k=2 \quad \dots \quad k=n$

$$= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{k!}$$

$(x^0 = 1,\ 0! = 1)$

Σ "Sigma"

Produktzeichen Π "Pi"

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Gilt für ein festes x immer $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für große n?

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \longleftarrow$$

$s(1) = 1$

$s(2) = 1 + x$

$s(3) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$\vdots$

Allg.:

$s(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

gilt das?

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$: unendliche Summe: $\underbrace{\text{WAS SOLL DAS SEIN}}_{= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}$?

$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ WAS SOLL DAS SEIN?

$$= \underbrace{1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \ldots}_{\text{unendliche Summe}}$$

Gilt: ?

$\lim_{n \to \infty} s(n) = e^x$

$$\left.\begin{aligned}
a(0) &= 1 &&= 1 \\
a(1) &= 1{,}4 &&= 1 + \tfrac{4}{10} \\
a(2) &= 1{,}41 &&= 1 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{1}{100} \\
a(3) &= 1{,}414 &&= 1 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{4}{100} \\
a(4) &= 1{,}4142 &&= \ldots
\end{aligned}\right\} \text{ O.K.?}$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \downarrow$ Grenzübergang

Was ist mit $\underline{\sum_{k=42}^{\infty} \sin(k) \cdot x^k}$? "$= g(x)$"?

Allgemein: $a(n) = \sqrt{2}$ auf n Nachkommastellen

$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Was ist $\lim_{n \to \infty} a(n)$? Klar: $= \sqrt{2}$

Plan für dieses Kapitel

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{s(n)} = \lim_{n\to\infty} s(n) \qquad (x \text{ fest})$$

$s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt <u>Folge</u>; schreibe s_n statt $s(n)$

Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \longrightarrow$ Eigenschaften

Betrachte "<u>Reihen</u>" $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \to$ Eigenschaften

(a_k Folge)

"<u>Potenzreihe</u>" $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{u_k \cdot x^k}_{a_k} = g(x)$ (festes x) z.B. $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sin(k)\, x^k$

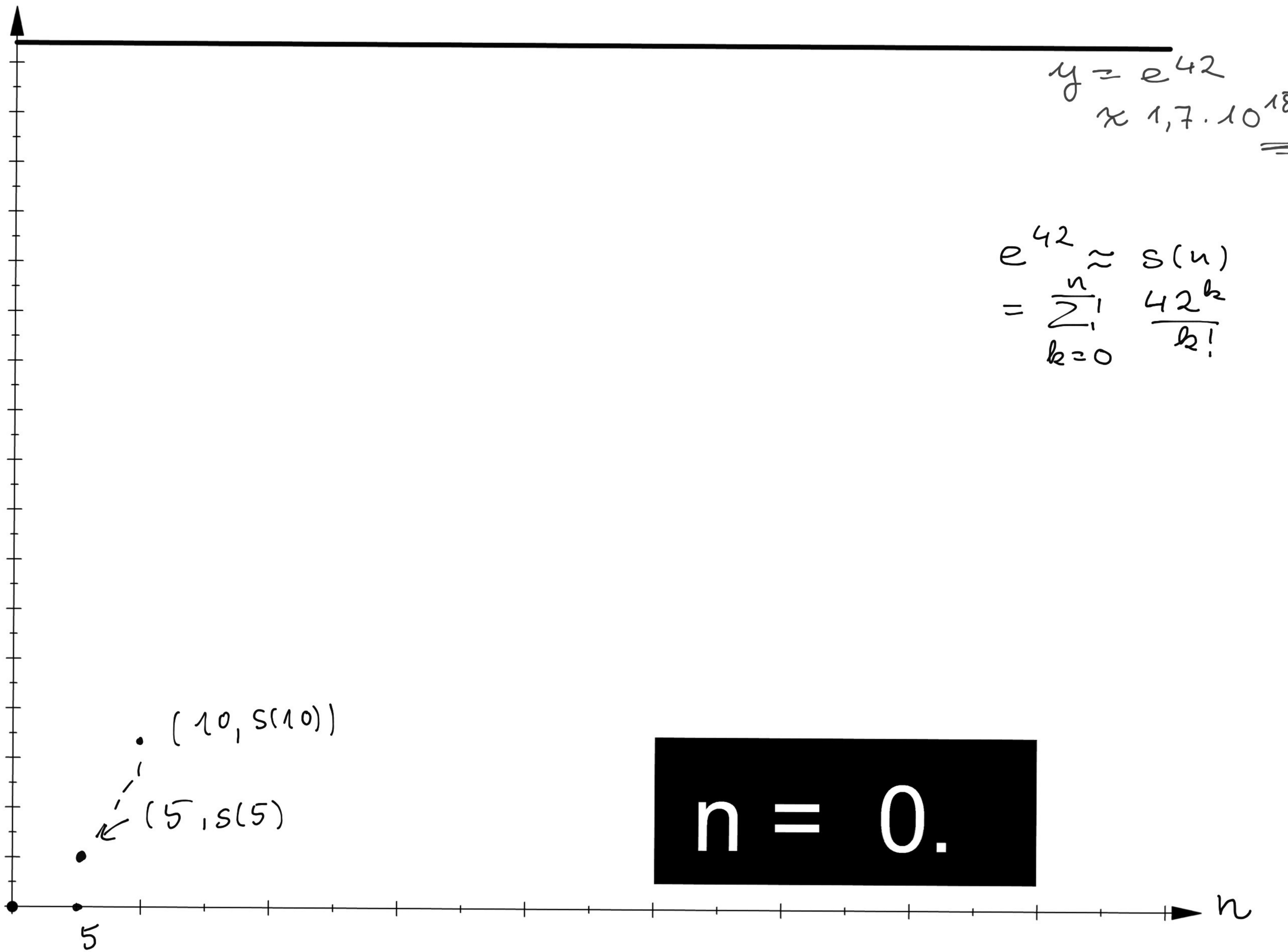
für welche x gibt es $g(x)$

Welche Eigenschaften hat $g(x)$?

Welche Funktionen lassen als $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k x^k$?

$u_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ scheint gute Wahl — geht das anders?

<u>Taylorreihe</u> $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$


$y = e^{42}$
$\approx 1{,}7 \cdot 10^{18}$
$e^{42} \approx s(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{42^k}{k!}$
$(10, s(10))$
$(5, s(5))$
n = 0.
5
n

$x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor$ = "x ohne Nachkommastellen" (für pos. x)

$\varphi(x) = s(\lfloor x \rfloor)$ ist eine Treppenfunktion

$$s(k) = \sum_{l=0}^{k} \frac{42^l}{l!}$$

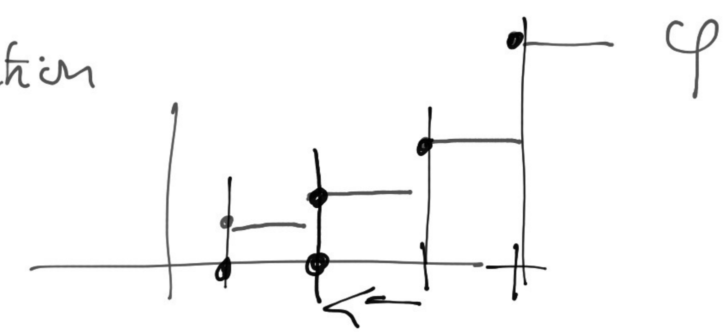
← $(k, s(k))$

k natürliche Zahl

→ Funktion $\psi(x)$

$1{,}7 \cdot 10^{18}$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} s(n) = \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \lim_{x \to \infty} \psi(x)}$$



n = 90