A: Folgen und Grenzwerte

Definition: Eine Folge (genauer "reelle Zahlenfolge") ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, d.h. die Folge a ordnet jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl $a(n)$ zu.

Statt $a(n)$ schreibe meist a_n und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ statt a.

$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$

Bsp $\quad a_n := \frac{1}{n^2}$, $\quad b_n := \sin(n)$, $\quad c_n := n!$, $\quad d_n := \sqrt{n-5}$

(aber: $d: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist keine Abb., da $d_0 = \sqrt{0-5}$ nicht def!

Abhilfe: $\quad d: \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$

oder definiere $\quad d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$

Schreibe $\quad L = \lim_{n \to \infty} a_n$, falls: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit $|a_n - L| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Dann: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent; falls es so ein n nicht gibt, dann heißt $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ divergent.

Notiz: $\quad \lim_{n \to \infty} a_n = \pm \infty$ wie üblich definiert.

Bsp.: $\quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\boxed{\text{STOP}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt.

Setze $N = \frac{1}{\varepsilon} + 1$

Betrachte $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Dann gilt

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

Damit ist alles gezeigt.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \underline{n} > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}} = \underline{N}$$

Lieblingstrick des Dozenten !

3. binomische Formel

Bsp $\lim\limits_{n\to\infty} (\underbrace{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}_{= a_n})$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}_{a_n} = 0$$

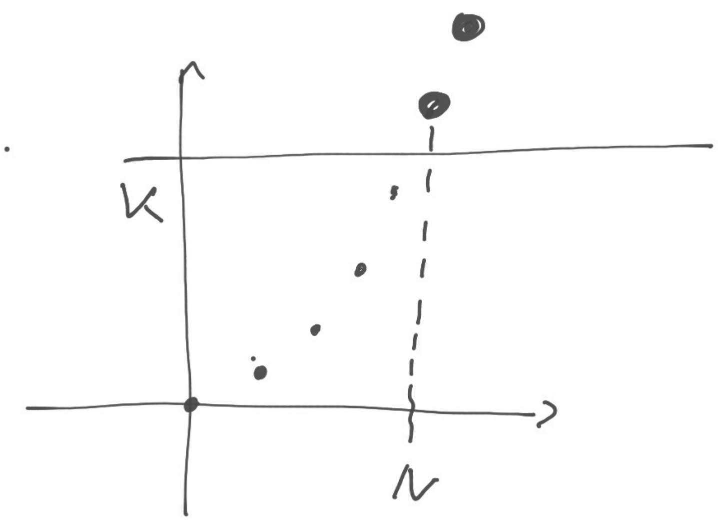
$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon \quad \Big|\ {}^\wedge 2 \ \& \text{ Kehrwert } \& -1$$

$$\underline{n} \underline{\geq} \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 = \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \underline{N}$$

Formal aufschreiben

$\boxed{\text{STOP}}$

Bsp.: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$



Beh.: Zu $K > 0$ gibt es ein N mit:

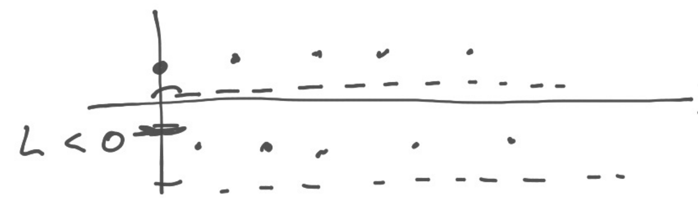
$\sqrt{n} \geq K$ für alle $n \geq N$.

Beweis: Sei $K > 0$ vorgelegt.

Setze $N = K^2$

Betrachte ein $n \geq N = K^2$.

Dann gilt $\sqrt{n} \geq K$.



Bsp.: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ gibt es nicht.

$\boxed{\text{STOP}}$

Zeige: "Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit: $|(-1)^n - L| < \varepsilon$ f. $n \geq N$" ist für jedes L falsch.

Nachweis: Sei L vorgelegt

Zeige: Es gibt $\varepsilon > 0$, sod. kein N "passt"; d.h.

es gibt $n \geq N$ mit $|(-1)^n - L| \geq \varepsilon$.

Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sei N vorgelegt. Setze $n := \begin{cases} 2N & \text{f. } L < 0 \\ 2N+1 & \text{f. } L \geq 0 \end{cases}$

$|(-1)^n - L| \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$ $\leftarrow$

$L < 0$: $|(-1)^{2N} - L| = |1 - L| = 1 + |L| \geq 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$

$L \geq 0$: $|(-1)^{2N+1} - L| = |-1 - L| = 1 + |L| \geq 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$

Bsp $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ existiert ebenfalls nicht.

Speziell gelten alle Grenzwert-rechenregeln aus dem 1. Kapitel auch für Folgen.

Wunderbare Rechenregel: Sind alle $a_n > 0$ und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Bsp.: $a_n = 2^n \rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$

Bsp.: $a_n = n \rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 1$

$$\rightsquigarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

Regel Vorgelegt:

- eine beschränkte Folge b_n, d.h. es gibt ein R mit: $|b_n| \le R$ f. alle n
- eine Folge u_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$(u_n)_{n=0}^{\infty}$ "Nullfolge"

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \cdot b_n = 0$.

b_n muss nicht konvergieren

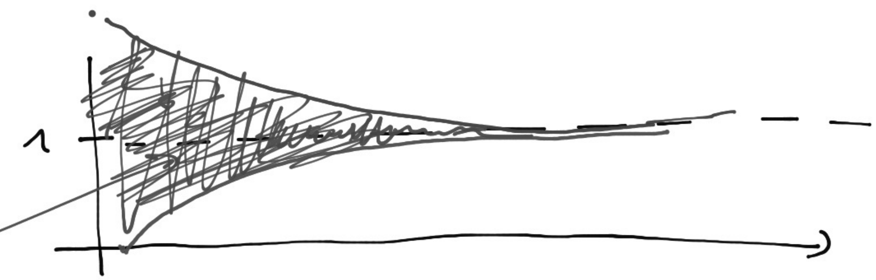
Bsp.: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ "beschränkt × Nullfolge = Nullfolge"

Zangensatz

$$a_n = 1 + \frac{\sin(n)}{n}$$

Analyse $\quad 1 + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Nullfolge}} \cdot \underbrace{\sin(n)}_{\text{beschränkt}}}_{\to 0} \longrightarrow 1$

$$\underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\to 1} \le \underbrace{1 + \frac{\sin(n)}{n}}_{\downarrow\, 1} \le \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\downarrow\, 1}$$



hier liegen die a_n

Zangensatz: Vorgelegt sind Folgen a_n, u_n, v_n mit

$u_n \le a_n \le v_n$ für alle (großen) n

und $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = L = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$.

Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$.

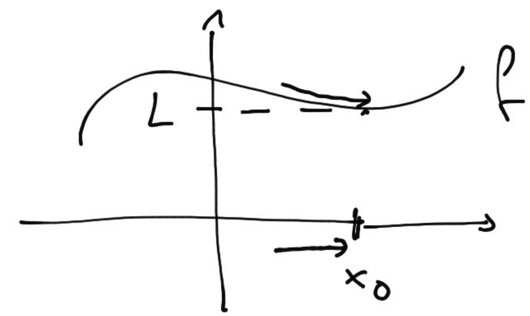
Folgenstetigkeit

f reelle Funktion

Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

genau dann, wenn für jede Folge a_n aus dem Def.bereich von f mit (1.) $a_n \neq x_0$ f. alle n, (2.) $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$

gilt: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$



Speziell ist f in x_0 genau dann stetig, wenn für $a_n \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ stets $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Beispiel $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

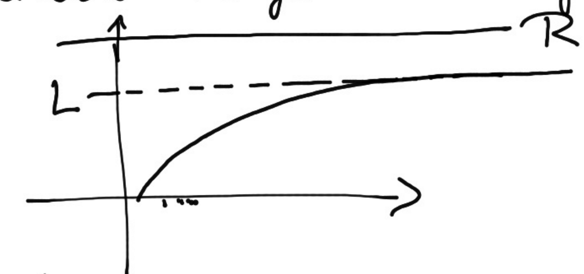
$$= \cos\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}_{=0}\Big) = \cos(0) = 1$$

SATZ ÜBER DIE MONOTONE KONVERGENZ:

Def: Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n gilt:

[monoton fallend: analog]

Satz Jede monoton wachsend (fallend) und beschränkte Folge konvergiert.



Erinnerung: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

(muss wissen: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle x → später)

Beh: $\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$

$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

12 % Zinsen pro Jahr → 0,12

Rechnung der Bank: 1 % pro Monat

Kapital K nach 1 Monat: $(1+0{,}01)\cdot K = 1{,}01\, K$

nach 1 Jahr $1{,}01^{12} \cdot K$

$\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12}$ mit Zinszuschlag

$\left(1 + \frac{0{,}12}{n}\right)^n$ bei n Zinszuschlägen pro Jahr $\xrightarrow[n \to \infty]{} e^{0{,}12}$

$\underline{\text{Übung}}$: $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{=a_n} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}_{=s_n} (=e) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = e^x$

$e = \exp(1)$

Binomialkoeffizienten:

$0\le k\le n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$ $\leftarrow$ k Faktoren $\leftarrow$ k Faktoren

Binomische Formel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$

- s_n ist monoton wachsend:

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} > s_n \checkmark$$

- $a_n \le s_n \le s_{n+1} \le s_{n+2} \le \ldots \le \lim_{n\to\infty} s_n$, $(a_n)_n$ beschränkt

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \quad \text{(binomische Formel)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\underbrace{\underset{\le 1}{\frac{n}{n}}\cdot\underset{\le 1}{\frac{(n-1)}{n}}\cdot\ldots\cdot\underset{\le 1}{\frac{(n-k+1)}{n}}}_{\le 1} \quad \begin{matrix}\leftarrow k \text{ Faktoren}\\ \leftarrow k \text{ Faktoren}\end{matrix}$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = s_n$$

<u>Übung</u> (Forts.) $a_n = (1 + 1/n)^n$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Bereits gezeigt: $(s_n)_n$ monoton wachsend, $a_n \leq s_n$ f. alle

- Die geometrische Reihe

  - Geometrische Summenformel:

    Für $q \neq 1$ gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

    Denn: $\underbrace{(1-q) \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k}$ $= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$

    $$= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = \underbrace{q^0}_{=1} + \cancel{\sum_{k=1}^{n} q^k} - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} q^k} + q^{n+1} \right)$$

    $$= \underline{1 - q^{n+1}} \quad \Big| \text{ Teile durch } 1 - q \neq 0$$

  - Für $|q| < 1$ gilt

    $$\underline{\sum_{k=0}^{\infty} q^k} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{1-q}$$

    "Reihe" (unendl. Summe) $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ für $|q| < 1$

$$q \neq 1: \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\boxed{|q| < 1: \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

GEOMETRISCHE REIHE

Übung (Forts.) $\quad s_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{k!}}_{z_k}$ monoton wachsend

- s_n ist beschränkt:

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \quad \text{konvergiert gegen } 0.$$

Also (wunderbarer Grenzwertsatz) konvergiert auch $\sqrt[k]{\frac{1}{k!}}$ gegen 0.

Folgt: $0 \leq \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} \leq \frac{3}{4}$ für große k, etwa für $k \geq k_0$

$$0 \leq \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \quad \text{für } k \geq k_0$$

Für $n > k_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=k_0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^k}_{>0} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!}}_{\text{hängt nicht von } n \text{ ab}} + \underbrace{\frac{1}{1-\frac{3}{4}}}_{4} = R \quad \text{Konstante}
\end{aligned}$$

Übung (Forts.):

- Satz über die monotone Konvergenz:

  $\lim_{n\to\infty} s_n$ existiert (und ist größer als jedes s_n).

- $a_n \leq s_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n$, d. h. $(a_n)_n$ ist beschränkt.

- Beh. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton wachsend. Dann:

  $\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n$.

- Bernoulli-Ungleichung: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$

- Zur Beh.

$$a_n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \leq a_{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{=\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \overset{!}{\leq} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \left(\frac{\overset{(n+1)^2}{n^2+2n+1}-1}{(n+1)^2}\right)^n$$

$$= \Big(1 \underbrace{- \frac{1}{(n+1)^2}}_{x \geq -1}\Big)^n$$

$$\Leftarrow 1 - \frac{1}{n+2} \overset{?}{\leq} 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow n+2 \leq \frac{(n+1)^2}{n} \Leftrightarrow n^2 + 2n \leq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

✓

Übung (Forts.): Fehlt noch $\lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} a_n$, dann:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \quad (=e)$$

Dazu: Betrachte festes $m \in \mathbb{N}$ und $n \ge m$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{(a_n) \text{ mon. wachsend}}{\ge} a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \ge \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n}$$

$$= 2 + \underbrace{\sum_{k=2}^{m}}_{m+1 \text{ Summanden}}\frac{1}{k!}\,\underbrace{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\text{höchstens } m \text{ Faktoren, jeder davon konvergiert gegen } 1 \ (n\to\infty)}$$

konvergiert gegen $2 + \sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = s_m$

Also $s_m \le \lim_{n\to\infty} a_n$ gilt für alle m

Folgt $\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} a_n$, wie gewünscht.

Übung (Forts.): $\lim\limits_{n \to \infty} \sin(n)$ gibt es nicht.

Angenommen, $L = \lim\limits_{n \to \infty} \sin(n)$ gibt es doch.

Additionstheorem: $\sin(n+k) = \sin(n)\cos(k) + \cos(n) \underbrace{\sin(k)}_{\neq 0}$

k festhalten $\quad \cos(n) = \dfrac{\sin(n+k) - \sin(n)\cos(k)}{\sin(k)}$

$n \to \infty \quad \longrightarrow \dfrac{L - L\cos(k)}{\sin(k)} = G \quad (*)$

$$\lim_{n \to \infty} \cos(n) = G$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \sin(2n) = \lim_{n \to \infty} 2\sin(n)\cos(n) = 2LG$$

$$G = \lim_{n \to \infty} \cos(2n) = \lim_{n \to \infty} \left(\cos^2(n) - \sin^2(n)\right) = G^2 - L^2$$

Also $\quad L = 2LG$
$\quad\quad\; G = G^2 - L^2$

$L \neq 0 \Rightarrow G = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - L^2 \rightsquigarrow L^2 = -\frac{1}{4}$ ↯

Sonderfall: $L = 0$, $G = 0$ wg. $(*)$

$$1 = \lim_{n \to \infty} \left(\cos^2(n) + \sin^2(n)\right) = G^2 + L^2 = 0^2 + 0^2 = 0 \text{ ↯}$$

Also: "....." ist falsch: $\lim\limits_{n \to \infty} \sin(n)$ kann es nicht geben.

Exkurs: Die Additionstheoreme

Die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) = -y(x) \quad \text{mit } y(0) = a \text{ und } y'(0) = b$$

lautet $y(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$.

- $y(x) = \cos(x+u)$ erfüllt $y'' = -y$, also

$$y(x) = y(0) \cdot \cos(x) + y'(0) \cdot \sin(x)$$

$$\boxed{\cos(x+u) = \cos(u) \cdot \cos(x) - \sin(u) \cdot \sin(x)}$$

- $y(x) = \sin(x+u)$ erfüllt $y'' = -y$, also

$$y(x) = y(0) \cos(x) + y'(0) \sin(x)$$

$$\boxed{\sin(x+u) = \sin(u) \cdot \cos(x) + \cos(u) \sin(x)}$$

Die Hausaufgabe

(1) Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - n \right)$.

(2) $0,\overline{9} = 1$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}.$$

Aufgabe: Zeige $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 1$

(3) Zeige, dass $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für jedes feste $x \geq 0$ konvergiert.

(4) Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^5 - 8n^2 + 9n + 42}{7n^5 + n^2 + n + 1}$.

einscannen $\rightsquigarrow$ Dateigröße reduzieren $\rightsquigarrow$ per Mail an mich.

Zusatz $\quad a_1 = \sqrt{2}\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n}$ (rekursive Def.)

$$a_5 = \sqrt{2}^{\,a_4} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\,a_3}} = \dots = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}\right)}\right)}$$

Betrachte $f(x) = \sqrt{2}^{\,x} - x$: $\quad f(2) = 0 = f(4)$

$$= e^{x\cdot \ln\sqrt{2}} - x$$

Ergebnis

$$2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}}$$

$$f'(x) = \ln\sqrt{2}\cdot e^{x \ln\sqrt{2}} - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \ln\frac{1}{\ln\sqrt{2}}$$

Satz von Rolle: 2, 4 einzige Nullstellen von f

$f(0) = 1 > 0$, also gilt $f(x) > 0$ für $x \in (-\infty, 2)$

d.h. $x < \sqrt{2}^{\,x}$ für $x < 2$

Speziell: $a_n < 2 \implies a_n < \sqrt{2}^{\,a_n} = a_{n+1}$

$$a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n} < \sqrt{2}^{\,2} = 2$$

Analog: $a_{n+1} < 2 \implies a_{n+1} < a_{n+2} < 2$

$\implies a_{n+2} < a_{n+3} < 2$

Folgt (wg. $a_1 = \sqrt{2}$) : $(a_n)_n$ ist monoton wachsend und beschränkt durch 2, also gibt $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le 2$

$$a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L = \underbrace{\sqrt{2}^{\,L}}_{\text{Stetigkeit von } 2^x} \implies f(L) = \sqrt{2}^{\,L} - L = 0, \quad L \le 2$$

$\implies L = 2$ (einzig passende Nullstelle von $f(x)$)