$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (x_0 aus dem Def.bereich)

Einschub : <u>Intervalle</u>

a, b reelle Zahlen:

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

} " halboffen"

Sonderfälle

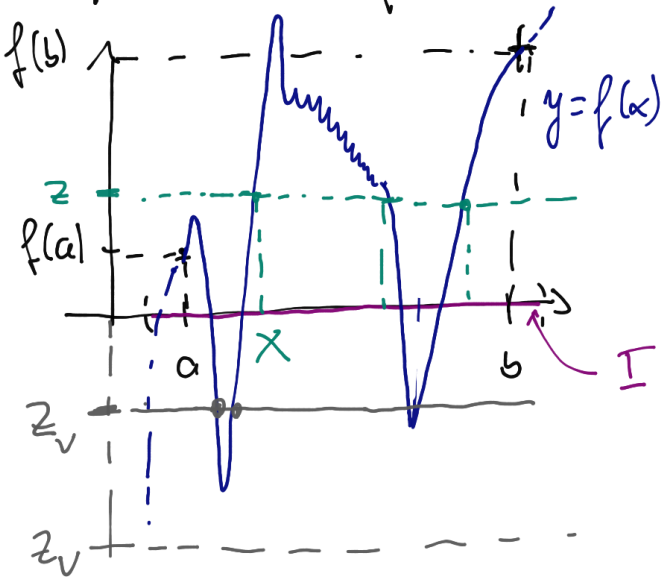
$(a, \infty) = \{x \mid a < x\}$, $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$

$\underbrace{(-\infty, \infty) = \mathbb{R}}_{\text{offen}}$

1.10 Zwischenwertsatz (ZWS)

Vorgelegt ist eine auf einem Intervall I erklärte, stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ sowie zwei Stellen $a < b$ aus I.



Dann gibt es zu jedem z zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein $x \in [a,b] \subseteq I$ mit $f(x) = z$.

<u>Beweis</u>: In jedem guten Buch über Analysis 1. $\square$

Kürzer: f nimmt jede Zahl z zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als Wert $z = f(x)$ an.

Der Zwischenwertsatz gilt **nicht** immer, wenn die Voraussetzungen verletzt sind:

(a) z liegt nicht zwischen $f(a)$ und $f(b)$

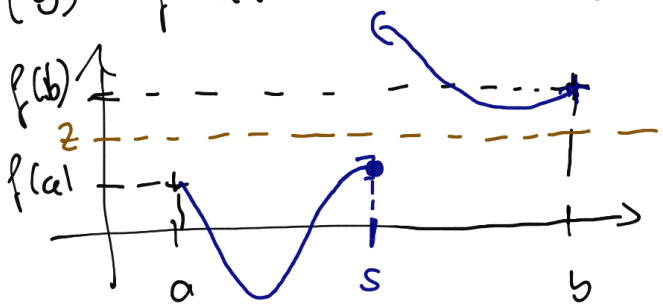
z.B. $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 2$
$f(a) = 0$, $f(b) = 4$

$z = -5$ liegt nicht zwischen $f(a)$ und $f(b)$

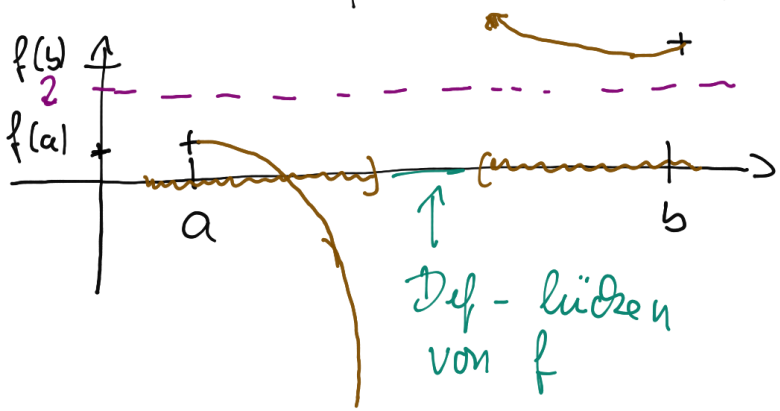
ZWS gilt nicht: $f(x) = x^2 = -5$ hat keine Lösung

$f(x) = x^2 = 10000$ hat keine Lösung in $[0,2]$

(b) f ist nicht stetig



(c) I ist kein Intervall (zwischen a und b liegen Definitionslücken von f)



<u>Beispiel</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 6x + 3$.

Besitzt f eine Nullstelle? (Lösung von $x^5 - 6x + 3 = 0$)

<u>Lösung</u>: Ansatz: Finde reelle Zahlen a und b mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. ← Zwischenstelle

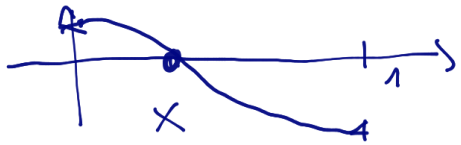
Dann wende den ZWS an!

Erhalte (da $\mathbb{R}$ ein Intervall, f stetig) die Existenz eines $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$

$f(0) = 3$, $f(1) = -2$, also fertig

Also zeigt der ZWS hier:

Es gibt ein $x \in (0, 1)$ mit $x^5 - 6x + 3 = 0$



Bisher für $f(x) = x^5 - 6x + 3 = 0$:

$f(0) > 0$, $f(1) < 0$. ZWS : $f(x) = 0$ für ein $x \in (0,1)$.

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$, $f(1) < 0$. ZWS: $f(x) = 0$ für ein $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 - 6 \cdot \frac{3}{4} + 3 = 3 - \frac{9}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{243}{1024} = \frac{-1536 + 243}{1024} < 0$$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$, $f(\frac{3}{4}) < 0$. ZWS : $f(x) = 0$ für ein $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Weiter so $\rightsquigarrow$ "Intervallhalbierungsverfahren"

<u>Hausaufgabe 031</u> : Führe für die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ einige Schritte des Intervallhalbierungsverfahrens aus.