Technische Universität Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen
Professor Dr. Harald Löwe

Sommersemester 2023
24.6.2023

Klausur zur Ingenieurmathematik 1

Aufgabe 1:

a. Finde zu $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ eine Funktion $\Phi(h)$, so dass $f(x+h) = f(x) + \Phi(h) \cdot h$ für alle h erfüllt ist. Verwende diese Information im Anschluss zum Nachweis der Gültigkeit von $f'(x) = 3x^2 - 2x$. **5 P.**

b. Zeige ausschließlich mit Hilfe des ε–δ–Kriterums für die Konvergenz: **5 P.**

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{1}{4-x} = \frac{1}{3}.$$

c. Vorgelegt ist die durch **5 P.**

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{3 + \sin t}{1 + t^4} \, \mathrm{d}t$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion f. Zeige, dass f eine differenzierbare Umkehrfunktion f^{-1} besitzt und berechne die Ableitung $(f^{-1})'(1)$.

Aufgabe 2:

Vorgelegt ist die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

a. Berechne die beiden ersten Ableitungen f' und f'' von f. **4 P.**

b. Bestimme die Nullstellen sowie die lokalen Extrema von f und berechne $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x)$. **5 P.**

c. Verwende die in b. gewonnenen Informationen, um eine möglichst aussagekräftige Skizze von f zu erstellen. **3 P.**

d. Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Punkt $x = -1$. **3 P.**

e. Bestimme die Taylorreihe von f im Punkt $x = 0$ und weise nach, dass diese für $|x| < 1$ gegen $f(x)$ konvergiert. **5 P.**

Aufgabe 3:

a. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot x^k$. **5 P.**

Hinweis: $\lim_{k \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e}$ darf verwendet werden.

b. Finde mittels partieller Integration eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$. **5 P.**

c. Bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 17x - 8}{x^2 - 6x + 8}$. **7 P.**

Aufgabe 4:

a. Die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf (a, b) zweimal differenzierbar und erfülle dort $f''(x) = e^x \cdot f(x)$. Zeige, dass f weder ein positives lokales Maximum noch ein negatives lokales Minimum in (a, b) besitzt. Folgere hieraus, dass aus $f(a) = f(b) = 0$ bereits $f(x) = 0$ für alle x folgt. **7 P.**

b. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion sowie $K > 0$ eine Konstante, so dass **6 P.**

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K \cdot |x - x_0|$$

für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Zeige, dass f automatisch stetig ist. Gibt es umgekehrt auch für jede stetige Funktion eine derartige Konstante K?

Sie haben in jedem Fall bestanden, wenn Sie von den 65 Punkten wenigstens 30 erreichen.