Technische Universität Braunschweig
Institut Für Partielle Differentialgleichungen
Professor Dr. Harald Löwe

Sommersemester 2023
1. Juli 2023

Abschlussklausur Ingenieurmathematik 2 — Seite 1 von 2 Seiten

Aufgabe 1: Vorgelegt ist der Raum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ s & -r \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

der symmetrischen (2×2)–Matrizen mit Spur 0.

a. Zeige nur mit Hilfe der Definition, dass V ein Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen (2×2)–Matrizen ist. **4 P.**

Offenbar ist $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von V.

b. Weise nach, dass auch **8 P.**

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von V ist. Bestimme außerdem die Transformationsmatrizen

$$T = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \qquad \text{und} \qquad S = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$$

sowie den Koordinatenvektor der Matrix $P = \begin{pmatrix} 15 & -4 \\ -4 & -15 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Für eine Matrix M aus V setzen wir

$$f(M) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

und erhalten wieder ein Element von V (das muss nicht gezeigt werden). Folglich ist f eine Abbildung von V nach V.

c. Wieso ist $f : V \to V$ linear? **2 P.**

d. Bestimme die Darstellungsmatrix $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$. Berechne hieraus die Darstellungsmatrizen $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ und $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ mit Hilfe der Transformationsformel. **6 P.**

e. Berechne die Darstellungsmatrix $[f \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$. **3 P.**

f. Bestimme – wenn möglich – eine Basis $\mathcal{C}$ von V, für die $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}$ die Einheitsmatrix ist. **2 P.**

Abschlussklausur Ingenieurmathematik 2 — Seite 2 von 2 Seiten

Aufgabe 2:

a. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix **8 P.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Gibt es eine invertierbare Matrix T, für die $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat?

b. Bestimme sämtliche $t \in \mathbb{R}$, für die die Matrix **6 P.**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & t & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

nicht invertierbar ist. Bestimme für diese t den Kern von B.

Aufgabe 3: Die Gleichung $x + 2y - z = 0$ beschreibt einen 2–dimensionalen Untervektorraum ε von $\mathbb{R}^3$; aus geometrischer Sicht ist ε eine Ebene durch den Ursprung des Koordinatensystems.

a. Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{O}$ von ε. **5 P.**

b. Bestimme den Fußpunkt des Lots vom Punkt $P = (1,1,1)^t$ auf ε. **3 P.**

c. Bestimme den Schnittpunkt von ε mit der Geraden **4 P.**

$$g: \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \ \ t \in \mathbb{R}.$$

d. Beschreibe die Schnittgerade von ε mit der durch $x - y + 2z = 6$ gegebenen Ebene in parametrisierter Form $\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u}$; $t \in \mathbb{R}$. **4 P.**

Hinweis: In dieser Klausur können maximal 55 Punkte erworben werden. Ab 25 Punkten ist die Klausur bestanden.