Technische Universität Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen
Professor Dr. Harald Löwe

Sommersemester 2024
15. Juni 2024

Abschlussklausur Ingenieurmathematik 1 — Seite 1 von 2 Seiten

Aufgabe 1 (Grundlagen / 16 Punkte):

a. Zeige nur mit Hilfe der Grenzwert–Definition: **6 P.**

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3) = 7.$$

b. Zeige nur mit Hilfe der Definition der Ableitung: $(x^2-2x+2)' = 2x-2$. **5 P.**

c. Welchen Konvergenzradius besitzt die Potenzreihe **5 P.**

$$\sum_{k=2024}^{\infty} \frac{2024^k}{k^{2024}} \cdot (x-2024)^k?$$

Was bedeutet das für die Konvergenz der Reihe?

Aufgabe 2 (Stammfunktionen / 15 Punkte):

a. Bestimme eine Stammfunktion für **7 P.**

$$f(x) = \frac{x^4+x^3+3x+4}{(x-1)(x+2)}.$$

b. Bestimme eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = (\ln(x))^2$ **8 P.**

(i) per partieller Integration und

(ii) per Substitution $u = \ln(x)$.

Besitzt die Stammfunktion $F(x)$ auf dem Intervall $(0,\infty)$ lokale oder sogar globale Extrema?

Hinweis: Eine Stammfunktion von $\ln x$ ist $x\cdot\ln x - x$. Eine Stammfunktion von x^2e^x ist $(x^2-2x+2)e^x$.

Aufgabe 3 (Kurvendiskussion / 14 Punkte):

Vorgelegt ist die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$$

a. Bestimme die lokalen Extrema von f. **5 P.**

b. Bestimme die Grenzwerte **5 P.**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x).$$

Besitzt f auf $\mathbb{R}$ sogar ein globales Maximum oder Minimum?

c. Warum besitzt f auf dem Intervall $(-2,0)$ eine Umkehrfunktion f^{-1}? Auf welchem Intervall ist f^{-1} definiert? Welchen Wert besitzt $(f^{-1})'(1)$? **4 P.**

Abschlussklausur Ingenieurmathematik 1 — Seite 2 von 2 Seiten

Aufgabe 4 (Anwendung wichtiger Sätze / 25 Punkte):

a. Vorgelegt ist die Funktion **8 P.**

$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \text{ für } x \neq 0.$$

Zeige, dass sich f in $x = 0$ zu einer stetigen Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt und dass sich die so fortgesetzte Funktion F im Punkt $x = 0$ sogar in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Berechne außerdem die achte Ableitung $F^{(8)}(0)$ von F in $x = 0$.

b. Vorgelegt ist die Funktion $f(x) = ae^x - 1 - x - x^2/2$ mit $a > 0$. Es gilt **9 P.**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

(i) Zeige, dass f wenigstens eine und höchstens drei Nullstellen besitzt.

(ii) Zeige $f'(x) = f(x) + x^2/2$ und folgere, dass jedes lokale Maximum von f nicht–positiv ist.

(iii) Weise nach, dass f genau eine reelle Nullstelle besitzt.

c. Wir betrachten die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion **8 P.**

$$f(x) = \cos(\arctan(x)).$$

(i) Berechne die Ableitung $f'(x)$ sowie den Quotienten $f'(x)/f(x)$.

(ii) Folgere aus (i), dass

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Hinweis: Es gilt $-\frac{1}{2}\ln a = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ und $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$.

Beachte: Auf die Lösungen der Klausur können maximal 70 Punkte erworben werden. Ab 62 Punkten gibt es eine 1,0; mit 31 Punkten haben Sie auf jeden Fall bestanden.